HPM通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系退休教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）
助理編輯：黃俊瑋（台灣師大數學所研究生）
編輯小組：蘇意雯（台北市立教育大學）蘇俊鴻（北一女中）
黃清揚（福和國中）葉吉海（陽明高中）
陳彥宏（成功高中）陳啟文（中山女高）
王文珮（青溪國中）黃哲男（台南女中）
英家銘（台北醫學大學）謝佳叡（台灣師大數學系）
創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng

第十六卷 第四期 目錄（2013年4月）

1665 年，牛頓和 e 相遇了嗎？

林倉億
國立台南一中

一、 前言

數學家毛爾的《毛起來說 *e*》是一本很清楚介紹自然常數 *e* 的好書，筆者最近在準備高三微積分的延伸課程時，得益於此書甚多。不過，毛爾在該書「一些和 *e* 有關的有趣公式」中，寫道：

$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots\cdots$ 這個無窮級數是牛頓在 1665 年發現的；[1]

這句話倒是引起了筆者的好奇：倘若牛頓真的在 1665 年就寫出上式，那後來的雅各・伯努利、歐拉等數學家何以苦苦追尋 *e* 呢？顯然這其中必有「祕辛」，且聽筆者娓娓道來。

1. 1665 年 VS. 1669 年

牛頓 1669 年寫了《論利用無窮多項方程式的分析學》(***DE ANALYSI PER ÆQUATIONES INFINITAS***)一書，呈現了他在 1665~1666 年間得到的數學成果，其中一項就是後來被認為與自然常數 *e* 有關的級數：$x=z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{24}z^4+\frac{1}{120}z^5+\cdots\cdots$（見下頁圖一中箭頭所指之處）。[2]我們現在知道，函數 e^x 的展開式是 $e^x=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5+\cdots\cdots$，將它與牛頓的級數相比較，可以看出牛頓

---

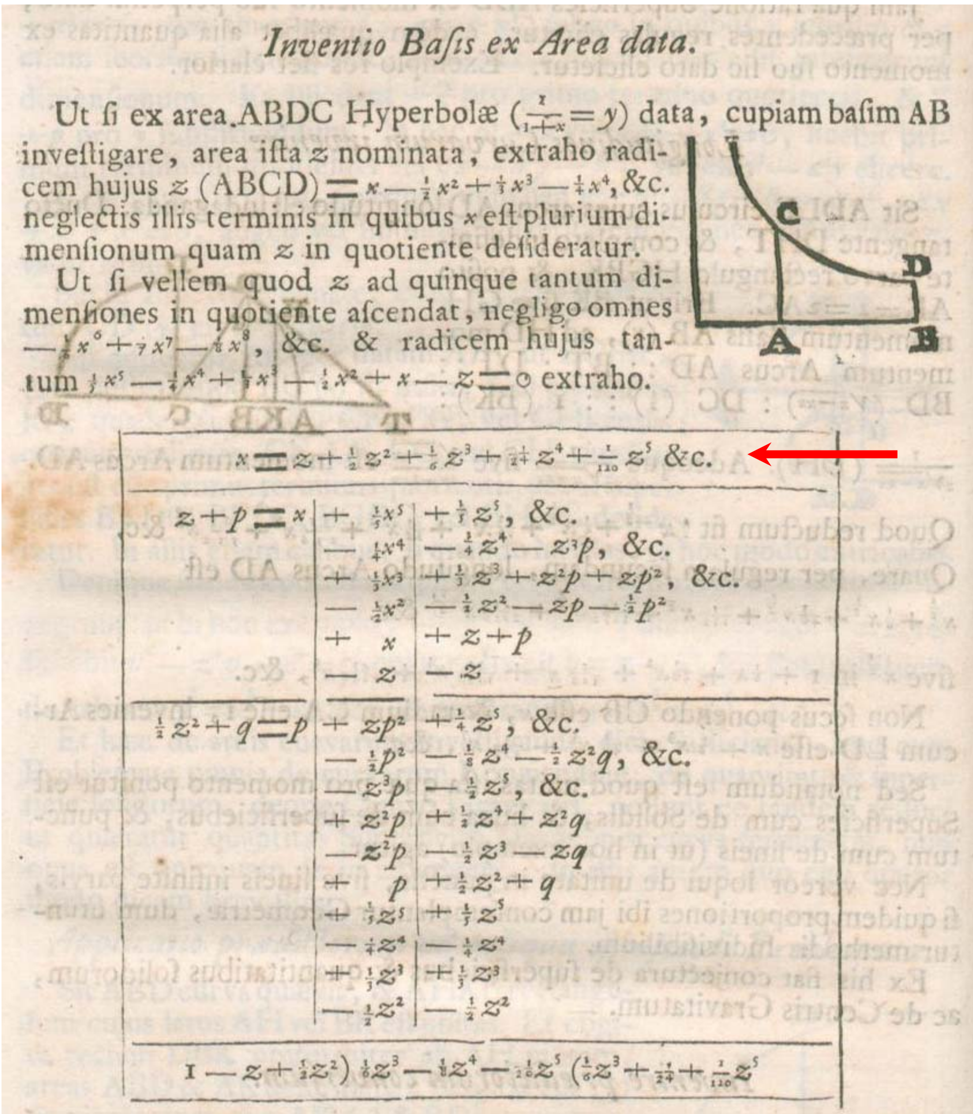
[1] 毛爾的原文是：$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots\cdots$ This infinite series was discovered by Newton in 1665;

[2] 本文中所有的《論利用無窮多項方程式的分析學》圖片，均來自 Astronomie-rara 網站，網址：http://astronomie-rara.ethbib.ethz.ch/zut/content/pageview/556058。至於該書的內容，則是參考 Whiteside (2008)。

的 $z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{24}z^4+\frac{1}{120}z^5+\cdots\cdots$ 其實就是 e^z-1 的展開式。最後，再將 $z=1$ 代入，就可以得到

$$e-1=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots\cdots \Rightarrow e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots\cdots$$

毛爾書中說牛頓在 **1665** 年就發現了 ***e*** 的無窮級數，追根究底，就是源自於此。[3]看到這裡，或許有讀者更加深信毛爾的說法，認為牛頓只差在沒有將 $z=1$ 代入或是將 $e-1$ 的數值寫出來而已。但吹毛求疵一點的讀者，就像筆者一樣，會想要更進一步了解牛頓究竟是在什麼情況下、或是為了什麼目的求出 $x=z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{24}z^4+\frac{1}{120}z^5+\cdots\cdots$。就讓筆者帶領各位讀者從頭看《論利用無窮多項方程式的分析學》這本書吧。


Inventio Basis ex Area data.

Ut si ex area ABDC Hyperbolæ ($\frac{1}{1+x}=y$) data, cupiam basim AB investigare, area ista z nominata, extraho radicem hujus z (ABCD) $= x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4$, &c. neglectis illis terminis in quibus x est plurium dimensionum quam z in quotiente desideratur.

Ut si vellem quod z ad quinque tantum dimensiones in quotiente ascendat, negligo omnes $-\frac{1}{6}x^6+\frac{1}{7}x^7-\frac{1}{8}x^8$, &c. & radicem hujus tantum $\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x-z=0$ extraho.

$x = z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{24}z^4+\frac{1}{120}z^5$ &c.

$z+p=x$	$+\frac{1}{5}x^5$	$+\frac{1}{5}z^5$, &c.
	$-\frac{1}{4}x^4$	$-\frac{1}{4}z^4-z^3p$, &c.
	$+\frac{1}{3}x^3$	$+\frac{1}{3}z^3+z^2p+zp^2$, &c.
	$-\frac{1}{2}x^2$	$-\frac{1}{2}z^2-zp-\frac{1}{2}p^2$
	$+x$	$+z+p$
	$-z$	$-z$
$\frac{1}{2}z^2+q=p$	$+zp^2$	$+\frac{1}{4}z^5$, &c.
	$-\frac{1}{2}p^2$	$-\frac{1}{8}z^4-\frac{1}{2}z^2q$, &c.
	$-z^3p$	$-\frac{1}{2}z^5$, &c.
	$+z^2p$	$+\frac{1}{2}z^4+z^2q$
	$-zp$	$-\frac{1}{2}z^3-zq$
	$+p$	$+\frac{1}{2}z^2+q$
	$+\frac{1}{5}z^5$	$+\frac{1}{5}z^5$
	$-\frac{1}{4}z^4$	$-\frac{1}{4}z^4$
	$+\frac{1}{3}z^3$	$+\frac{1}{3}z^3$
	$-\frac{1}{2}z^2$	$-\frac{1}{2}z^2$

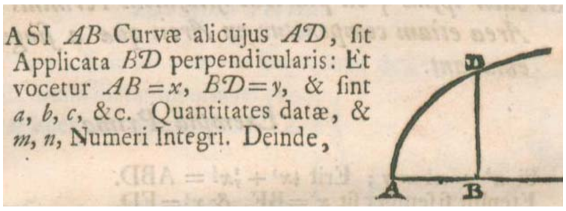
$1-z+\frac{1}{2}z^2)\ \frac{1}{6}z^3-\frac{1}{8}z^4-\frac{1}{120}z^5\ (\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}z^5$

圖一

[3] 毛爾並未在書中說明其依據為何或是引用的出處。筆者查閱資料後，發現最早出現此級數的牛頓著作，就是 1669 年的《論利用無窮多項方程式的分析學》。

2. 《利用無窮多項方程式的分析學》

牛頓在書中開宗明義的說：「我在前些時日已經想出利用已有的無窮級數來估量曲線的量的一般方法，以下的內容是簡短地說明而不是詳細地證明。」牛頓所謂的「曲線的量」指的就是曲線與 x 軸所圍之面積，如右圖二 ABD 之面積。然後牛頓給出了三個法則：


ASI AB Curvæ alicujus AD, ſit Applicata BD perpendicularis: Et vocetur $AB=x$, $BD=y$, & ſint a, b, c, &c. Quantitates datæ, & m, n, Numeri Integri. Deinde,

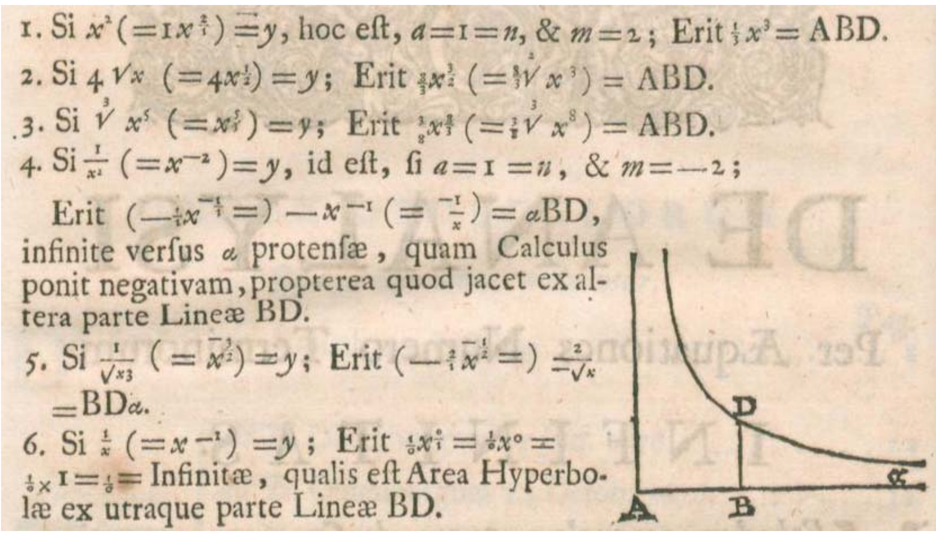
圖二

法則 **1**：若 $y = a x^{\frac{n}{m}}$，則 ABD 面積等於 $\frac{na}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}}$。

法則 **2**：若 y 是由若干項所組成的，每一項都如同法則 **1** 那樣的形式，那 ABD 面積也會是那幾項個別求得的面積所組成。

法則 **3**：如果 y 不是由法則 **1** 那樣的形式所組成的，那它必須先化成一些比較簡單的項，方式就如同數學家 **(Arithmeticians)** 作小數的除法、求方根、解方程式 **(affected equations)** 那般。

「法則 **1**」就是今日所謂的單項式的積分公式。在「法則 **1**」之後有 **6** 個例子，分別是 $y=x^2$、$y=4\sqrt{x}$、$y=\sqrt[3]{x^5}$、$y=\frac{1}{x^2}$、$y=\frac{2}{3\sqrt{x^3}}$ 以及 $y=\frac{1}{x}$。牛頓對第 **4** 個例子 $y=\frac{1}{x^2}$ 與第 **6** 個例子 $y=\frac{1}{x}$ 的說明十分有趣，值得一看。照「法則 **1**」所給的公式，$y=\frac{1}{x^2}$ 求出來的面積為 $-\frac{1}{x}$，是個負值，但面積為何會小於 **0** 呢？牛頓說那是因為所求出的 $\frac{1}{x}$ 代表的是從 B 往 α 方向無限延伸的面積（見圖三），故用「αBD」表示，而負號則是因為這面積位在 A 的另一側。

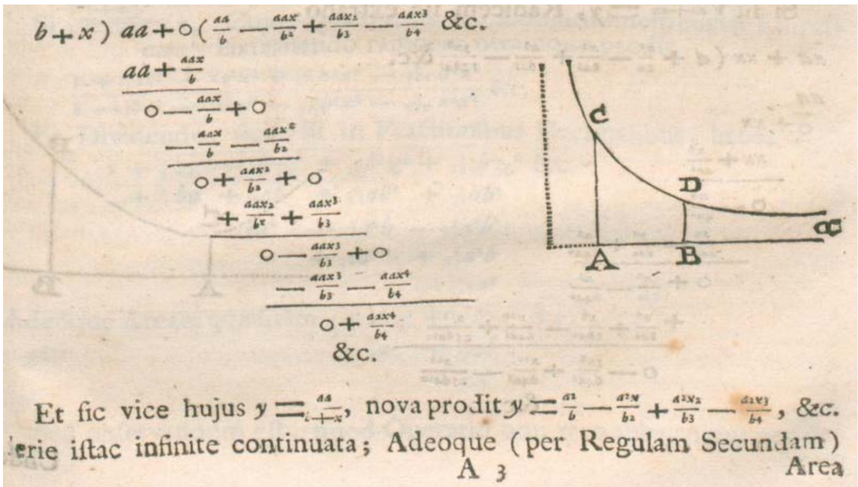

1. Si $x^2\,(=1x^{\frac{2}{1}})=y$, hoc eſt, $a=1=n$, & $m=2$; Erit $\frac{1}{3}x^3=ABD$.
2. Si $4\sqrt{x}$ $(=4x^{\frac{1}{2}})=y$; Erit $\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}$ $(=\frac{8}{3}\sqrt{x^3})=ABD$.
3. Si $\sqrt[3]{x^5}$ $(=x^{\frac{5}{3}})=y$; Erit $\frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}}$ $(=\frac{3}{8}\sqrt[3]{x^8})=ABD$.
4. Si $\frac{1}{x^2}$ $(=x^{-2})=y$, id eſt, ſi $a=1=n$, & $m=-2$;
Erit $(-\frac{1}{1}x^{-\frac{1}{1}}=)\,-x^{-1}\,(=\frac{-1}{x})=\alpha BD$, infinite verſus α protenſæ, quam Calculus ponit negativam, propterea quod jacet ex altera parte Lineæ BD.
5. Si $\frac{1}{\sqrt{x^3}}$ $(=x^{-\frac{3}{2}})=y$; Erit $(-\frac{2}{1}x^{-\frac{1}{2}}=)\,\frac{2}{-\sqrt{x}}$ $=BD\alpha$.
6. Si $\frac{1}{x}$ $(=x^{-1})=y$; Erit $\frac{1}{0}x^{\frac{0}{1}}=\frac{1}{0}x^0=\frac{1}{0}\times 1=\frac{1}{0}=$ Infinitæ, qualis eſt Area Hyperbolæ ex utraque parte Lineæ BD.

圖三

在第 **6** 個例子 $y=\dfrac{1}{x}$ 中，牛頓寫出「$\dfrac{1}{0}x^{\frac{0}{1}}=\dfrac{1}{0}x^{0}=\dfrac{1}{0}\times 1=$ **Infinitæ**」，並說明雙曲線 $y=\dfrac{1}{x}$，BD 兩側的面積都是 **Infinitæ** (∞)。想必讀者第一眼就注意到了，牛頓完全不避諱分母是 **0**，他在意的是分母為 **0** 後，面積的意義。

「法則 **2**」用今日的話來說，就是逐項積分的意思。牛頓也給了 **3** 個例子：$y=x^2+x^{\frac{3}{2}}$、$y=x^{-2}+x^{-\frac{3}{2}}$ 與 $y=x^2+x^{-2}$，在此就略去不作說明。

牛頓還想要解決更多不同曲線的面積問題，所以，首要之務就是把各式的曲線寫成 $\sum a_k x^{n_k}$ 的形式，其中 $n_k\in Q$，特別地，當 n_k 都是非負整數的時候，$\sum a_k x^{n_k}$ 就是 x 的冪級數（無窮多項的多項式），而這正是牛頓在書中最常採用的形式。如何將各式曲線寫成 x 的冪級數，牛頓的方法就是「法則 **3**」中的「作除法」、「求方根」、「解方程式」。這三種方法，牛頓在書中都一一舉例說明。首先是「作除法」的例子 $y=\dfrac{a^2}{b+x}$，牛頓真的用長除法求 a^2 除以 $b+x$，差別在於被除式與除式都依升冪排列，如此以來就可以得出商為 $\dfrac{a^2}{b}-\dfrac{a^2}{b^2}x+\dfrac{a^2}{b^3}x^2-\dfrac{a^2}{b^4}x^3+\cdots\cdots$（見圖四），所以 $y=\dfrac{a^2}{b}-\dfrac{a^2}{b^2}x+\dfrac{a^2}{b^3}x^2-\dfrac{a^2}{b^4}x^3+\cdots\cdots$，這之中的每一項就都是「法則 **1**」中的形式了，所以再利用「法則 **2**」，就可以求出 $ABDC$ 的面積為 $\dfrac{a^2}{b}x-\dfrac{a^2}{2b^2}x+\dfrac{a^2}{3b^3}x^2-\dfrac{a^2}{4b^4}x^3+\cdots\cdots$。筆者每次將牛頓的長除法秀給學生看時（以 $\dfrac{1}{1+x}$ 為例），學生都是張大著嘴巴，然後迫不及待地問說：「為什麼長除法可以這麼做？」這做法徹底顛覆他們自國中二年級以來對長除法的刻板印象！筆者總是故意嘆口氣回答：「唉！國中時老師只說要降冪排列，沒有說升冪排列不行吧！沒特別提升冪排列的除法，那是因為那些年你們還太幼，不能理解得出後的結果，沒想到你們就一直陷在長除法只能依降冪排列來做的禁錮中，今天是你們長大的時候了！」當然了，筆者還會特別提醒學生，得出來的商並不是 x 用任何數代入都會成立的，這牽涉到更高等的數學，有待他們到大學微積分課中去尋找答案！



$$
\begin{array}{r l}
 & \dfrac{a^2}{b}-\dfrac{a^2}{b^2}x+\dfrac{a^2}{b^3}x^2-\dfrac{a^2}{b^4}x^3\cdots \\
b+x\,\big) & a^2+0 \\
 & a^2+\dfrac{a^2}{b}x \\
\hline
 & -\dfrac{a^2}{b}x+0 \\
 & -\dfrac{a^2}{b}x-\dfrac{a^2}{b^2}x^2 \\
\hline
 & +\dfrac{a^2}{b^2}x^2+0 \\
 & +\dfrac{a^2}{b^2}x^2+\dfrac{a^2}{b^3}x^3 \\
\hline
 & -\dfrac{a^2}{b^3}x^3+0 \\
 & \vdots
\end{array}
$$

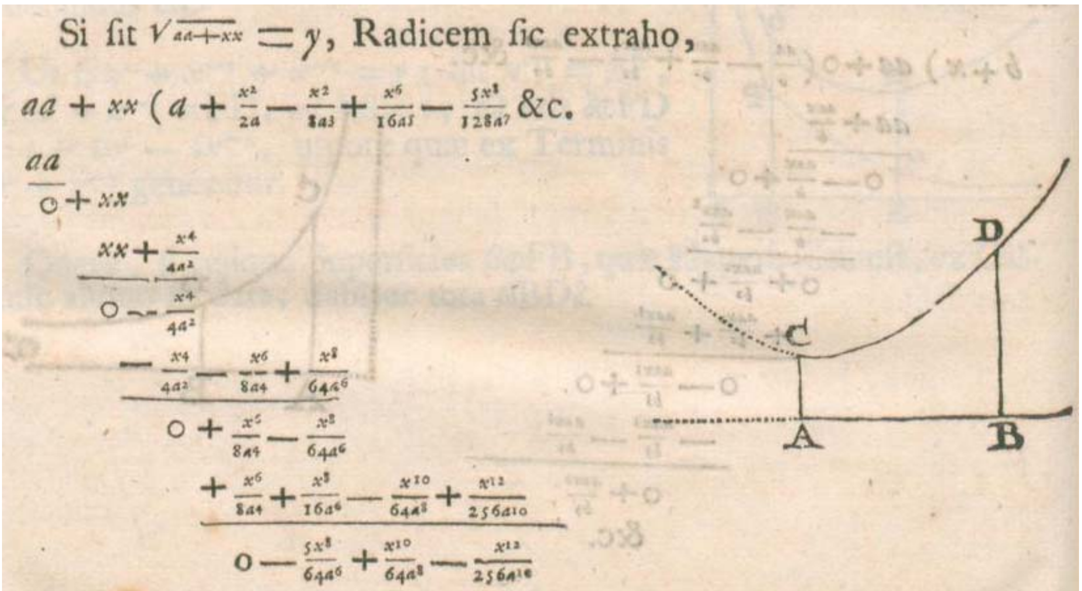
圖四

牛頓在給出 $y=\dfrac{a^2}{b+x}$ 展開式後，還以 $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ 為例，將其寫成 $y=1-x^2+x^4-x^6+\cdots\cdots$，然後就可以得出 $ABDC$ 的面積為 $x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7\cdots\cdots$。$x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7\cdots\cdots$ 這個冪級數，其實就是 $\tan^{-1}x$ 的展開式，因此，有人也就如同認為牛頓已經寫出 e 的展開式般，宣稱牛頓已經寫出了 $\tan^{-1}x$ 的展開式。不過，從上述的說明中可看出，牛頓完完全全是在求面積，壓根沒沾到 $\tan^{-1}x$，所以，那樣子的宣稱其實是有欠周詳的。

既然「作除法」是真的用除法來除，那讀者也就可以猜到「求方根」就是開方法了。牛頓以 $y=\sqrt{a^2+x^2}$ 為例，說明如何利用開方法將它寫成

$y=a+\dfrac{x^2}{2a}-\dfrac{x^4}{8a^3}+\dfrac{x^6}{16a^5}-\dfrac{5x^8}{128a^7}+\cdots\cdots$（見圖五），因此 $ABDC$ 的面積就是

$ax+\dfrac{x^3}{6a}-\dfrac{x^5}{40a^3}+\dfrac{x^7}{112a^5}-\dfrac{5x^9}{1152a^7}+\cdots\cdots$。



圖五

如果讀者會用直式開方法求 $\sqrt{2}$ 的近似值話，不妨先作一次，然後再將所寫的過程和圖五相比較，就會發現本質上是一樣的。現將牛頓的過程拆解成如下幾個步驟：

步驟 **1**：令 r 是 $y=\sqrt{a^2+x^2}$ 的近似值。取 $r=a\ \Rightarrow\ y^2-r^2=x^2$。

步驟 **2**：取 $r = a + t_1 \ \Rightarrow\ y^2 - r^2 = x^2 - t_1(2a + t_1)$，取 $t_1 = \dfrac{x^2}{2a}$，則 $y^2 - r^2 = -\dfrac{x^4}{4a^2}$。

步驟 **3**：取 $r = a + \dfrac{x^2}{2a} + t_2 \ \Rightarrow\ y^2 - r^2 = y^2 - \left[(a + \dfrac{x^2}{2a}) + t_2\right]^2 = -\dfrac{x^4}{4a^2} - t_2(2a + \dfrac{x^2}{a} + t_2)$，

取 $t_2 = -\dfrac{x^4}{8a^3}$，則 $y^2 - r^2 = \dfrac{x^6}{8a^4} - \dfrac{x^8}{64a^6}$。

步驟 **4**：取 $r = a + \dfrac{x^2}{2a} - \dfrac{x^4}{8a^3} + t_3 \ \Rightarrow\ y^2 - r^2 = y^2 - \left[(a + \dfrac{x^2}{2a} - \dfrac{x^4}{8a^3}) + t_3\right]^2 = \dfrac{x^6}{8a^4} - \dfrac{x^8}{64a^6}$

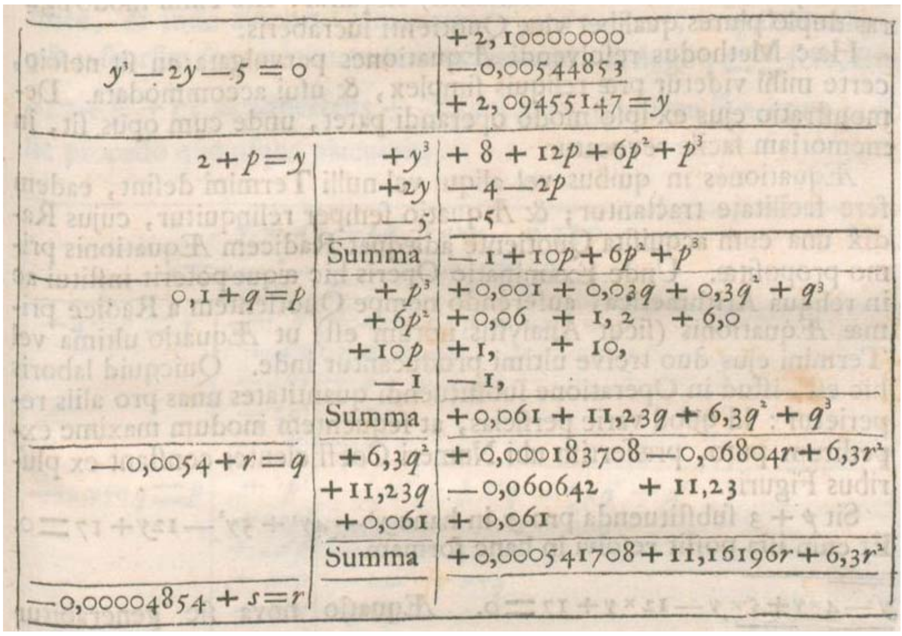
$-t_3(2a + \dfrac{x^2}{a} - \dfrac{x^4}{4a^3} + t_3)$，取 $t_3 = \dfrac{x^6}{16a^5}$，則 $y^2 - r^2 = -\dfrac{5x^8}{64a^6} + \dfrac{x^{10}}{64a^8} - \dfrac{x^{12}}{256a^{10}}$。

$\vdots$

$\vdots$

故得 $r = a + \dfrac{x^2}{2a} - \dfrac{x^4}{8a^3} + \dfrac{x^6}{16a^5} - \dfrac{5x^8}{128a^7} + \cdots\cdots$。

開完根號後，就是「解方程式」了，也就是解一元高次方程式。由於這個方法比較複雜、困難，牛頓先舉一個係數是常數的一元三次方程式 $y^3 - 2y - 5 = 0$ 為例，展示如何求 y 的（近似）值（見圖六）。



$y^3 - 2y - 5 = 0$		$+2,10000000$ $-0,00544853$ $+2,09455147 = y$
$2 + p = y$	$+y^3$	$+8 + 12p + 6p^2 + p^3$
	$+2y$	$-4 - 2p$
	-5	-5
	Summa	$-1 + 10p + 6p^2 + p^3$
$0,1 + q = p$	$+p^3$	$+0,001 + 0,03q + 0,3q^2 + q^3$
	$+6p^2$	$+0,06 \quad + 1,2 \quad + 6,0$
	$+10p$	$+1, \quad + 10,$
	-1	$-1,$
	Summa	$+0,061 + 11,23q + 6,3q^2 + q^3$
$-0,0054 + r = q$	$+6,3q^2$	$+0,000183708 - 0,06804r + 6,3r^2$
	$+11,23q$	$-0,060642 \quad + 11,23$
	$+0,061$	$+0,061$
	Summa	$+0,000541708 + 11,16196r + 6,3r^2$
$-0,00004854 + s = r$		

圖六

其實這個方法和上一個開方法很類似，差別在於此處有不同次方的項，然後在計算上又可因高次方的關係，適時略去某些項，因此，看起來會較為複雜。在此筆者同樣將它拆解成幾個步驟說明：

步驟 **1**：可以發現 **2** 是方程式解的一個近似值，接下來要求小數部分。

步驟 **2**：令 $y=2+p$，代入 $y^3-2y-5=0$ 得 $-1+10p+6p^2+p^3=0$，因 p^3 和 $6p^2$ 的值很小可以忽略不計，故由 $-1+10p=0$ 可得 $p=0.1$。

步驟 **3**：令 $p=0.1+q$，代入 $-1+10p+6p^2+p^3=0$ 得 $0.061+11.23q+6.3q^2+q^3=0$，同樣地將 q^3 和 $6.3q^2$ 略去不計，由 $0.061+11.23q=0$ 可得

$q=-\dfrac{0.061}{11.23}\doteq -0.0054$。

步驟 **4**：令 $q=-0.0054+r$，代入 $0.061+11.23q+6.3q^2+q^3=0$ 中，特別地，因為 q^3 項的值很小，所以代入時略去 q^3 項，得 $0.000541708+11.16196r+6.3r^2=0$。同樣地略去 $6.3r^2$ 後，可得 $r=-\dfrac{0.000541708}{11.16196}\doteq -0.0004853$。

步驟 **5**：由步驟 **1** 至 **4**，可得 y 的近似值

$=2+0.1-0.0054-0.00004853=2.009455147$。

牛頓在解完 $y^3-2y-5=0$ 後，特別說了一段話：「我不知道這個解方程式的方法是否廣為人知，但相較於其他方法，它確實是簡單且易於操作的。從操作的模式就可明白它的證明，因此當需要（證明）時，可以很輕易地從心中喚起它。無論方程式有無缺項，這方法都能很有效地實行，也幾乎一樣地容易。」

在 $y^3-2y-5=0$ 這個例子之後，牛頓舉了幾個更複雜的方程式，並用上述的方法求解。例如 $y^3+a^2y-2a^3+axy-x^3=0$ 的解 $y=a-\dfrac{x}{4}+\dfrac{x^2}{64a}+\dfrac{131x^3}{512a^2}+\dfrac{509x^4}{16384a^3}+\cdots\cdots$，然後利用「法則 **2**」，就可求得此曲線下的面積為 $ax-\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{x^3}{192a}+\dfrac{131x^4}{2048a^2}+\dfrac{509x^5}{81920a^3}+\cdots\cdots$。

以上就是牛頓將各式曲線寫成 x 的冪級數的三種方法：「作除法」、「求方根」、「解方程式」。想必各位讀者看到這裡，內心對牛頓的佩服一定又增加了幾分。這三種方法其實都是舊瓶子，但牛頓裝進新酒後，風味變得更豐富、更有層次了！

最後，讓我們進入本文的主題，看牛頓是如何得到 $x=z+\dfrac{1}{2}z^2+\dfrac{1}{6}z^3+\dfrac{1}{24}z^4+\dfrac{1}{120}z^5+\cdots\cdots$。由下頁圖一可知，雙曲線 $y=\dfrac{1}{1+x}$ 下 $ABDC$ 的面積 $z=x-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{4}x^4+\dfrac{1}{5}x^5+\cdots\cdots$，[4]，其中 $\overline{AB}=x$，接下來牛頓問了相反的問題：「若 $ABDC$ 的面積 z 已知，那如何求出 $\overline{AB}$ 的長度 x？」雖然 z 由許多項所組成，但牛頓

[4] 雖然牛頓在書中沒有寫出求出 z 的過程，但由「法則 3」的「作除法」及「法則 1、2」，很容易就可以求得 z。

希望先用 z, z^2, z^3, z^4, z^5 來表示 x，所以他就將 $\frac{1}{5}x^5$ 後的各項略去。因此，牛頓接下來就要用上述「解方程式」的方法，將方程式 $\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x-z=0$ 中的 x 解出來（見下頁圖七）：

步驟 1：令 $x=z+p$，則：

$\frac{1}{5}x^5=\frac{1}{5}(z+p)^5\doteq\frac{1}{5}z^5$　　$-\frac{1}{4}x^4=-\frac{1}{4}(z+p)^4\doteq-\frac{1}{4}z^4-z^3p$

$\frac{1}{3}x^3=\frac{1}{3}(z+p)^3\doteq\frac{1}{3}z^3+z^2p+zp^2$

$-\frac{1}{2}x^2=-\frac{1}{2}(z+p)^2=-\frac{1}{2}z^2-zp-\frac{1}{2}p^2$

代入原方程式得

$zp^2-\frac{1}{2}p^2-z^3p+z^2p-zp+p+\frac{1}{5}z^5-\frac{1}{4}z^4+\frac{1}{3}z^3-\frac{1}{2}z^2=0\cdots\cdots(1)$。

步驟 2：**(1)**式中，只留下 p 和 z 單獨存在且次方最小的項，即 $p-\frac{1}{2}z^2\doteq 0$，故可令

$p=\frac{1}{2}z^2+q$，則：$zp^2=z(\frac{1}{2}z^2+q)^2\doteq\frac{1}{4}z^5$

$-\frac{1}{2}p^2=-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}z^2+q)^2\doteq-\frac{1}{8}z^4-\frac{1}{2}z^2q$　　$-z^3p=-z^3(\frac{1}{2}z^2+q)\doteq-\frac{1}{2}z^5$

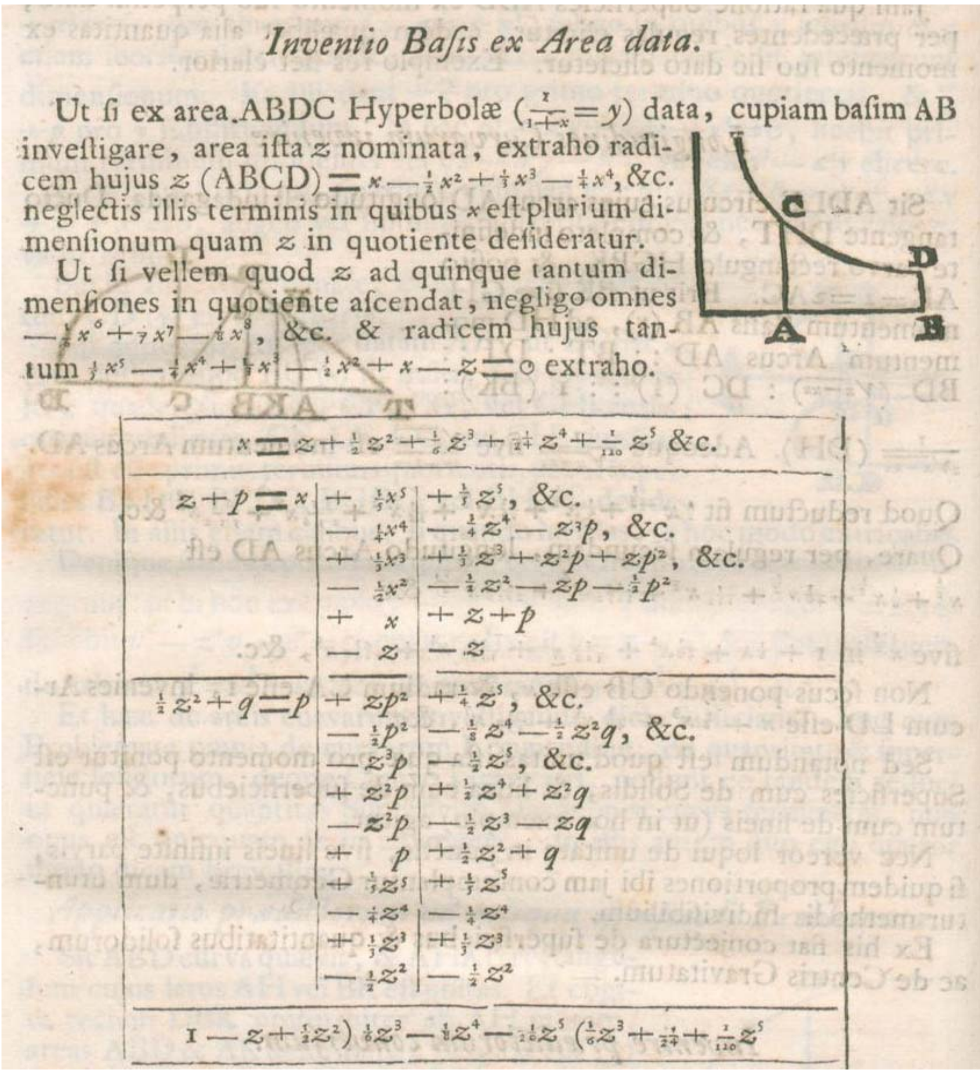
$z^2p=z^2(\frac{1}{2}z^2+q)=\frac{1}{2}z^4+z^2q$　　$-zp=-z(\frac{1}{2}z^2+q)=-\frac{1}{2}z^3-zq$

代入**(1)**式後可得 $(1-z+\frac{1}{2}z^2)q-\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{8}z^4-\frac{1}{20}z^5=0$

$\Rightarrow\ q=(\frac{1}{6}z^3-\frac{1}{8}z^4+\frac{1}{20}z^5)\div(1-z+\frac{1}{2}z^2)\doteq\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{24}z^4+\frac{1}{120}z^5$

步驟 3：將得到 p 、 q 代回 $x=z+p$，就可得到 $x=z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{24}z^4+\frac{1}{120}z^5$。

上述的過程中，只要在後續的代換中會產生 z^6 以上的項，牛頓一概將其省去，如此一來就能達成他只用 z, z^2, z^3, z^4, z^5 來表示 x 的目的。雖然牛頓只解出 $x=z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{24}z^4+\frac{1}{120}z^5$，但他後來有補充說明，只要一開始的 $z=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5+\cdots\cdots$ 中取的項越多，則 $x=z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{24}z^4+\frac{1}{120}z^5+\cdots$ 就能依相同的方法求出越多項。



Inventio Basis ex Area data.

Ut si ex area ABDC Hyperbolæ ($\frac{1}{1+x}=y$) data, cupiam basim AB investigare, area ista z nominata, extraho radicem hujus z (ABCD) $= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$, &c. neglectis illis terminis in quibus x est plurium dimensionum quam z in quotiente desideratur.

Ut si vellem quod z ad quinque tantum dimensiones in quotiente ascendat, negligo omnes $-\frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{8}x^8$, &c. & radicem hujus tantum $\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - z = 0$ extraho.

$x = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5$ &c.

$z+p=x$	$+\frac{1}{5}x^5$	$+\frac{1}{5}z^5$, &c.
	$-\frac{1}{4}x^4$	$-\frac{1}{4}z^4 - z^3p$, &c.
	$+\frac{1}{3}x^3$	$+\frac{1}{3}z^3 + z^2p + zp^2$, &c.
	$-\frac{1}{2}x^2$	$-\frac{1}{2}z^2 - zp - \frac{1}{2}p^2$
	$+x$	$+z+p$
	$-z$	$-z$
$\frac{1}{2}z^2+q=p$	$+zp^2$	$+\frac{1}{4}z^5$, &c.
	$-\frac{1}{2}p^2$	$-\frac{1}{8}z^4 - \frac{1}{2}z^2q$, &c.
	$-z^3p$	$-\frac{1}{2}z^5$, &c.
	$+z^2p$	$+\frac{1}{2}z^4 + z^2q$
	$-z^2p$	$-\frac{1}{2}z^3 - zq$
	$+p$	$+\frac{1}{2}z^2 + q$
	$+\frac{1}{5}z^5$	$+\frac{1}{5}z^5$
	$-\frac{1}{4}z^4$	$-\frac{1}{4}z^4$
	$+\frac{1}{3}z^3$	$+\frac{1}{3}z^3$
	$-\frac{1}{2}z^2$	$-\frac{1}{2}z^2$

$1 - z + \frac{1}{2}z^2)\ \frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{8}z^4 - \frac{1}{20}z^5\ (\frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24} + \frac{1}{120}z^5$

圖七

3. 牛頓和 *e* 相遇了嗎？

經由前面的介紹，毫無疑問地，牛頓的的確確寫出了 $x = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5 + \cdots$，但其目地是當雙曲線 $y = \frac{1}{1+x}$ 下 $ABDC$ 的面積 z 已知的情形下，求出 $\overline{AB}$ 的長度 x。當然我們可以合理猜測，牛頓有算過當面積 $z=1$ 時的 $\overline{AB}$ 長度 x，但即便如此，牛頓得到的值會是 **1.71828⋯**，而不會是 **2.71828⋯(** $=$ ***e*)**。換句話說，對牛頓來說，**1.71828⋯**只是眾多 x 中的一個，他並沒有在書中特地寫出來，更遑論指出它有何特別的意義了。當然啦，有心者仍可繼續替牛頓辯稱，既然 $\overline{AB}$ 的長度是 **1.71828⋯**，那原點到 B 的距離就是 **2.71828⋯(** $=$ ***e*)**了。這種說法是否得當，我想讀者自有公評。

最後，雖然筆者不認為毛爾在《毛起來說 ***e***》中的說法是恰當的，但也不能否定牛頓曾經如此地接近 ***e***，只能說牛頓與 ***e*** 這兩個數學界的巨星，曾經在歷史洪流中擦身而

過，卻來不及進一步地交往！

參考資料

Maor, Eli (1994). *e*: *The Story of a Number*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

Whiteside, D. T. (eds.) (2008). *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, *Volume II*. Cambridge: Cambridge University Press.

毛爾（鄭惟厚翻譯）**(2000).** 《毛起來說 ***e***》，台北：天下遠見。

1. **為節省影印成本，本通訊將減少紙版的的發行，請讀者盡量改訂 PDF 電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail 至 suhui_yu@yahoo.com.tw**
2. **本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。**
3. **歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請 e-mail 至 suhui_yu@yahoo.com.tw**
4. **本通訊內容可至網站下載。網址：http://math.ntnu.edu.tw/ ~ horng/letter/hpmletter.htm**
5. **以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡**

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本：陳昭蓉 (東京 Boston Consulting Group) 、李佳嬅（東京大學）
德國：張復凱（Mainz 大學）
基隆市：許文璋（南榮國中）
台北市：英家銘（台北醫學大學）楊淑芬（松山高中）杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中）
蘇俊鴻（北一女中）陳啟文（中山女高）蘇惠玉（西松高中）蕭文俊（中崙高中）
郭慶章（建國中學）李秀卿（景美女中）王錫熙（三民國中）謝佩珍、葉和文（百齡高中）
彭良禎（師大附中）郭守德（大安高工）張瑄芳（永春高中）張美玲（景興國中）
文宏元（金歐女中）林裕意（開平中學）林壽福、吳如皓 (興雅國中) 傅聖國（健康國小）
李素幸（雙園國中）程麗娟（民生國中）林美杏（中正國中）朱賡忠（建成國中）
新北市：顏志成（新莊高中） 陳鳳珠（中正國中）黃清揚（福和國中）董芳成（海山高中）孫梅茵
（海山高工）周宗奎（清水中學）莊嘉玲（林口高中）王鼎勳、吳建任（樹林中學）陳玉芬
（明德高中）羅春暉 (二重國小) 賴素貞（瑞芳高工）楊淑玲（義學國中）林建宏 （丹鳳國中）
莊耀仁（溪崑國中）、李建勳（海山國中）
宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中）吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）林宜靜（羅東高中）
桃園縣：許雪珍、葉吉海（陽明高中）王文珮（青溪國中） 陳威南（平鎮中學）
洪宜亭、郭志輝（內壢高中） 鐘啟哲（武漢國中）徐梅芳（新坡國中） 程和欽 (大園國際高中)、
鍾秀瓏（東安國中）陳春廷（楊光國民中小學）王瑜君（桃園國中）
新竹市：李俊坤（新竹高中）、洪正川、林典蔚（新竹高商）
新竹縣：陳夢綺、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）
苗栗縣：廖淑芳 (照南國中)
台中市：阮錫琦（西苑高中）、劉雅茵（台中二中）、林芳羽（大里高中）、洪秀敏（豐原高中）、李傑霖、
賴信志、陳姿研（台中女中）、莊佳維（成功國中）
南投縣：洪誌陽（普台高中）
嘉義市：謝三寶（嘉義高工）郭夢瑤（嘉義高中）
台南市：林倉億（台南一中）黃哲男、洪士薰、廖婉雅（台南女中）劉天祥、邱靜如（台南二中）張靖宜
（後甲國中）李奕瑩（建興國中）、李建宗（北門高工）林旻志（歸仁國中）
高雄市：廖惠儀（大仁國中）歐士福（前金國中）林義強（高雄女中）
屏東縣：陳冠良（枋寮高中）楊瓊茹（屏東高中）黃俊才（中正國中）
澎湖縣：何嘉祥 林玉芬（馬公高中）
金門：楊玉星（金城中學）馬祖：王連發（馬祖高中）

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。懇請各位老師惠賜高見！

HPM 教室

單元十：巴斯卡三角形 (I)

蘇惠玉
台北市立西松高中

適用單元：99 課綱數學 II 之組合、二項式定理

一、前言

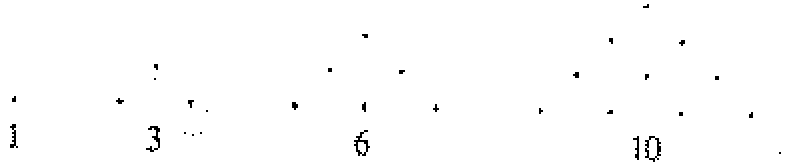
巴斯卡三角形的介紹首見於現行 99 課綱高中數學第二冊的〈二項式定理〉單元中，提到二項係數的「巴斯卡三角形」；以及 $C_{k-1}^{n-1}+C_{k}^{n-1}=C_{k}^{n}$。在南一版本課本的課文中附了一張楊輝在《詳解九章算法》書中的「開方作法本源圖」，並說明「據楊輝說：「〝開方作法本源〞出《釋鎖算書》，賈憲用此術。」事實上，楊輝確實在他這本書的附註中有說過這一件事。不過，課本僅是強調賈憲在十一世紀上半葉「就已發現了二項式定理的規則」，比巴斯卡早了約六百年。一般教科書通常把「巴斯卡三角形」當成一個找出二項展開式係數的工具，因此會有這樣的論調，然而若論及「巴斯卡三角形」本身所蘊含的數學結構，以及對這個「數學物件」各面向的整合，中國的數學家可能就不及巴斯卡的深知卓見了。另外，課本提到楊輝、賈憲，但是並沒有說明這兩個數學家用「開方作法本源圖」來做什麼？這二點，都是此一單元所主要考量之處。

二、巴斯卡三角形的各個面向

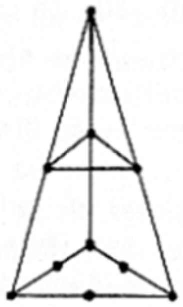
「巴斯卡三角形」在數學知識上，有三層意義：圖形數（**figurate numbers**）、組合數（**combinatorial numbers**）、二項係數（**binomial numbers**）。這三層內容，可以在不同的單元中互相呼應，以期達到更廣泛、更深刻的瞭解。

I. 圖形數

畢氏學派認為：所有的東西都含有數的成分，數是形成宇宙的要素。他們通常以沙粒或卵石解說數，他們以所排列之形狀區分數為許多種類，下列的一種被稱為三角形數（**triangle numbers**）：



若將三角形數的二維度空間擴充，即成 **Theon** 和 **Nicomachus** 所稱的三維度的角錐形數（**pyramidal numbers**）：



我們可以觀察得出，角錐形數

1, 4, 10, 20, 35, 56, 84,......

是由三角形數

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28,……

所構成，而三角形數又是由整數

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,……

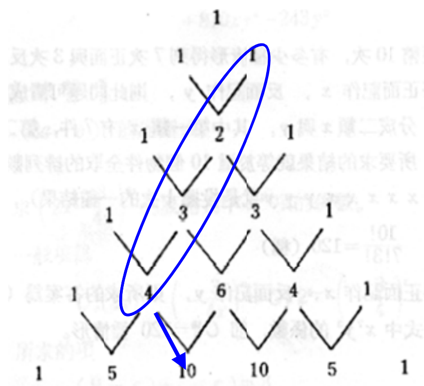
所構成，而整數又是由

1, 1, 1, 1, 1, 1, 1,……

所構成。若將這些寫成如表一，再佐以三角形數及角錐形數的形成特性（例如：三角形數 **3=1+2, 6=1+2+3=3+3, 10=1+2+3+4=6+4,** 角錐形數 **10=4+6, …**），將可以得到我們在「巴斯卡三角形」中常看到的結果：$C_k^n = C_{k-1}^{n-1} + C_k^{n-1}$，$C_k^n = \sum_{i=k-1}^{n-1} C_{k-1}^{i}$

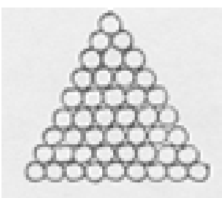
k \ l	1	2	3	4	5	6	7	. . . .
0	1	1	1	1	1	1	1	. . . .
1	1	2	3	4	5	6	7	. . . .
2	1	3	6	10	15	21	28	. . . .
3	1	4	10	20	35	56	84	. . . .

（表一）

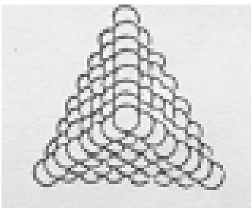


其實，我們再仔細觀察一下三角形數 **1, 3, 6, 10, 15, 21, 28,……**，可以發現這個數列其實是一個二階等差數列，而角錐形數 **1, 4, 10, 20, 35, 56, 84,......**即是一個三階等差數列。西元十一至十三世紀的中國數學家們，在這樣的高階等差級數求和問題上（稱為垛積招差術），取得了輝煌的成就。其中以朱世傑《四元玉鑑》中所取得的成就為最重要。朱世傑的研究成果分別記載在《四元玉鑑》中的「茭草形段」（共 **7** 個問題）、「如像招數」（**5** 個問題）、「果垛疊藏」（**20** 個問題）中。

在朱世傑的許多求和問題中，可歸納出一些有著重要意義的公式：



茭草垛：$1+2+3+4+...+n = \frac{1}{2!}n(n+1)$



三角垛（或稱落一行垛）：

$$1+3+6+10+\ldots+\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{3!}n(n+1)(n+2)$$

撒星形垛（或稱三角落一形垛）：

$$1+4+10+20+\ldots+\frac{1}{3!}n(n+1)(n+2)=\frac{1}{4!}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

三角撒星形垛（或稱撒星更落一形垛）：

$$1+5+15+35+\ldots+\frac{1}{4!}n(n+1)(n+2)(n+3)=\frac{1}{5!}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$$

在上述的一串公式中，前面一個公式的結果，剛好是後一個公式的一般項。從垛積上的意義來講，也就是把前式所表示的垛積算到第 **n** 層止的所有各層，「落為一層」，作為後式所表示垛積的第 **n** 層。這也是朱世傑把後式稱為前式的落一形垛的原因。

這個部份的內容，也是「巴斯卡三角形」的一部份，但是，卻不屬於「二項式定理」這個單元。反而在巴斯卡三角形中可以進一步看出在級數上意涵。

II. 組合數

在 **99** 課綱高中數學 **II** 的組合單元中定義何謂組合：

從 n 個不同的物件中，每次取 m 個不同的物件為一組 $(m\le n)$，同一組內的物件若不計較其前後順序，就叫做 n 中取 m 的組合。其中每一組，稱為一種組合，所有的組合的總數稱為組合數，以符號 C_m^n 表示。

因為在前一節中，課本已經介紹過排列的觀念與排列數的算法，在這一節中，就將排列總數分解成兩個步驟來求：

(1) 先自 n 中選取 m 個出來（就是組合數 C_m^n）。

(2) 在把取出的 m 個物件，任意去排。

因為這樣的分解動作，就可以得到

$$C_m^n = \frac{n!}{m!(n-m)!} \ (m \le n)$$

這樣的定義方式，有其順序上的便利性，但是，卻也讓人迷惑：這樣的公式算法，到底和「選取」有什麼關係？

從歷史上的起源來看，西元三世紀的 **Porphyry** 為了要介紹亞里士多德的「範疇 **(Categories)**」，他必須知道在五種亞里士多德的「語態**(voices)**」:「種**(genus)**」、「屬（**species**）」、「***proprium***」、「差別（**differentia**）」、「偶然（**accidents**）」中，有幾種不同的配對方法。他的方法是：以第 **1** 種東西為標準，有 **4** 種東西和它配對；再看第 **2** 種東西，剩下其他 **3** 種東西和它配對；如此，**5** 種不同東西中取 **2** 種的方法數為 **4+3+2+1=10** 種方法。**Pappus** 將這種方法推廣，從 n 種不同的東西中，取 **2** 種的方法數為 $(n-1)+(n-2)+...+3+2+1=\frac{n(n-1)}{2}=C_2^n$。

同樣的想法也出現在中算家汪萊的《遞兼數理》中。汪萊（**1768-1831**）字孝嬰，號衡齋，為乾嘉時期著名的數學家。《遞兼數理》列在《衡齋算學》第四卷的後半卷，在其中，汪萊論述了組合的一些性質與公式由來，他的組合數意為：

> 設如有物各種。自一物各立一數起，至諸物合併共為一數止，其間遞以二物相兼為一數，交錯以辯得若干數，三物相兼為一數，交錯以辯得若干數，四物五物以至多物若不皆然，此為遞兼之數也。

設有 n 個不同的物件，“自一物各立一數”即每次取 **1** 個物件，“諸物合併共為一數”即一次取 n 個，如此類推。汪萊所謂「遞兼之數」即為現今我們熟悉的組合數 $C_1^n, C_2^n, C_3^n, ...C_n^n$。而汪萊將 $\sum_{p=1}^{n} C_p^n$ 稱為「遞兼總數」，相對於「遞兼總數」，他將 C_p^n 稱為「遞兼分數」：

> **以所設物數即為各立一數之數。減一數為三角堆之根，乃以根數求得平三角堆為二物相兼之數。又減一數求得立三角堆為三物相兼之數。又減一數求得三乘三角堆為四物相兼之數。如是根數遞減，乘數遞加，求得相兼諸數。……此遞兼之分數也。**

這裡的三角堆即為上述朱世傑垜積招差的茭草垜（平三角堆）、三角垜（立三角堆）、三角落一形垜（三乘三角垜）**……**等等。他所得的組合數公式“如是根數遞減，乘數遞加，求得相兼諸數”和朱世傑在垜積招差中所得的公式是一樣的：

$$C_p^n = \frac{1}{p!}(n-p+1)(n-p+2)\cdots(n-1)n$$

也和現今所熟悉的$C_p^n = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$是一樣的。

汪萊的公式推導過程，和上述所提的 **Porphyry** 與 **Pappus** 的想法是一樣的：

> 以一物為主而兼他物得若干數。至以又一物為主而兼他物及不復兼先為主之物，故所得必少一數。由此遞少遂成三角堆形。

汪萊以「十數遞兼分數圖解」為例說明，從 **10** 個物件（如 **0, 1, 2, 3, …9**）中，取 **2** 物得方法數（C_2^{10}）可先以 **0** 為主，取 **01, 02, …, 09** 共 **9** 個，再以 **1** 來選取，得 **12, 13, …19** 共 **8** 個，如此遞推，最後取 **89** 共一個，因此得取 **2** 物之數(C_2^{10})為 **9+8+7+…+3+2+1**，以圖形解說，即為一平三角堆。如下圖一。

而 **10** 物中取 **3** 物的方法數（C_3^{10}）情形相同，只是先以 **2** 物為主，如先以 **01** 為主，取物為 **012, 013, …, 019,** 再得 **023, 024, …029,** 以 **0** 為主的共 **8+7+6+…+2+1=36** 個，再換成以 **12, 13, …**以 **1** 為主的這一類共 **7+6+5+…+2+1=28** 個，以此類推，得取 **3** 物的方法數C_3^{10}＝**36+28+21+…+6+3+1=**$\dfrac{8\times 9\times 10}{3!}$**=210**。以圖解說，即是將平三角堆中的每一行擴展成一平三角堆，最後整體成為一立三角堆，如下圖二。

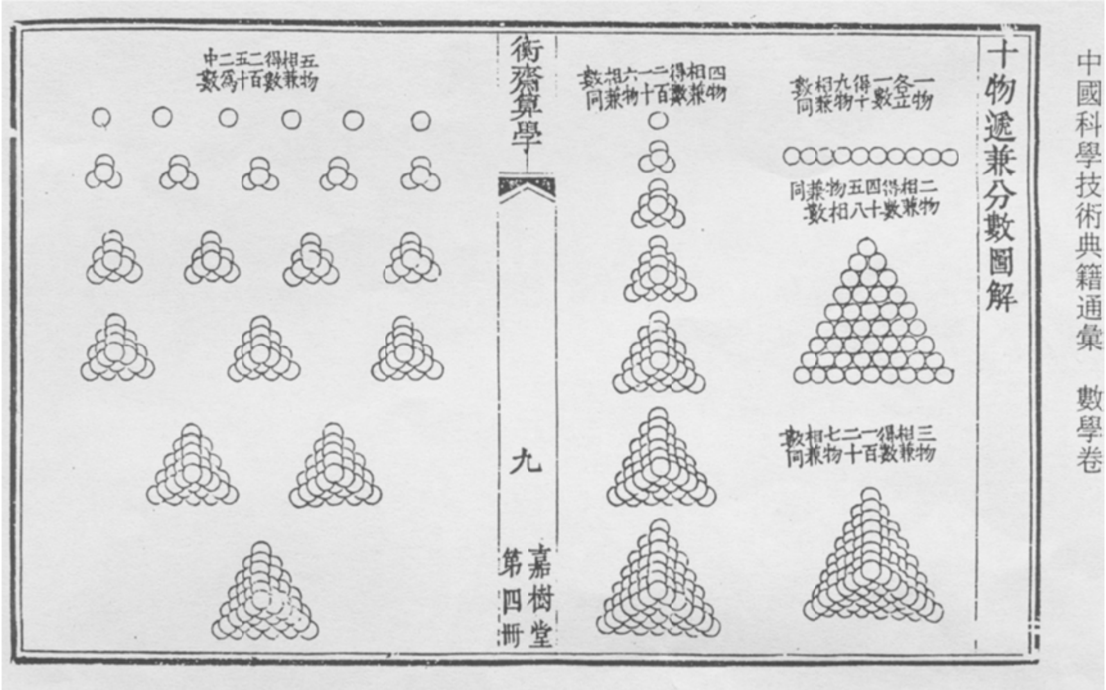
圖一

「二物相兼得數四十五，八物相兼數同」

圖二

「三物相兼的數一百二十，七物相兼數同」

在「十數遞兼分數圖解」中，汪萊還提到組合數的性質：「一物各立一數得十，九物相兼數同（$C_1^{10} = C_9^{10}$）」、「二物相兼得數四十五，八物相兼數同。（$C_2^{10} = C_8^{10}$）」等等。



汪萊在《遞兼數理》中，為我們呈現了組合的另一種想法，即是「選取」的概念。從這樣的選取觀念，組合數將呈現另一種不同的風貌。例如從 **n** 個物件中取 **k** 個時，可以固定某一個特殊的物件（例如第 **1** 個），在選取 **k** 個時，有包含這特殊的一個與不包含兩種情況。包含的話，則從剩下的 **n-1** 個中，取 **k-1** 個；如果不包含的話，則從剩下的 **n-1** 的中取 **k** 個。這即是我們所熟悉的 $C_k^n = C_{k-1}^{n-1} + C_k^{n-1}$ ，也是巴斯卡三角形的構成要素。這樣的想法藉著「巴斯卡三角形」將組合數與圖形數（高階等差級數）結合在一起。[5]

組合的概念與算法，在高中數學中，自有其重要性，課本雖然提供了我們從排列到組合的思考路徑，但是，汪萊的「遞兼數理」呈現了另一種思考方式。尤其當這樣的思考模式又和已經學過（等差級數）的，以及即將學習的（二項式定理），藉著「巴斯卡三角形」整合在一起時，這樣的學習方式不是帶有更深層的意義嗎？接下來，再細看「巴斯卡三角形」中的每一個數字，「巴斯卡三角形」將呈現出它的另一層意義：二項式定理。

（未完待續）

---

[5] 巴斯卡在他的《論算術三角》的書中，即是藉這個觀念與式子，將算術三角中的每一格數字，與組合數結合在一起。我在後面的章節會再加以論述。