HPM通訊
發行人：洪萬生（台灣師大數學系退休教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）
助理編輯：黃俊瑋（台灣師大數學所研究生）
編輯小組：蘇意雯（台北市立教育大學）蘇俊鴻（北一女中）
黃清揚（福和國中）葉吉海（陽明高中）
陳彥宏（成功高中）陳啟文（中山女高）
王文珮（青溪國中）黃哲男（台南女中）
英家銘（台北醫學大學）謝佳叡（台灣師大數學系）
創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng

第十六卷 第五期 目錄（2013年5月）

HPM 教室

單元十：巴斯卡三角形 (II)

蘇惠玉
台北市立西松高中

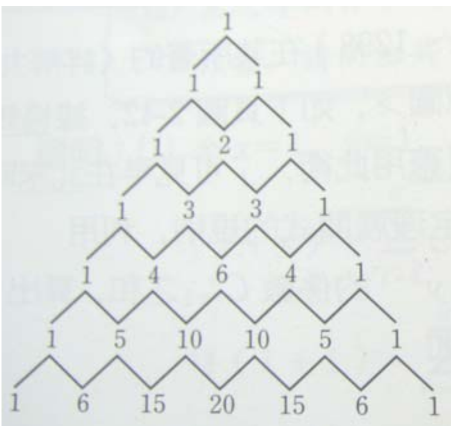
適用單元：99 課綱數學 II 之組合、二項式定理

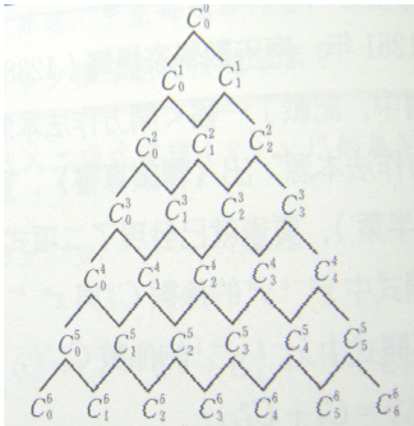
III. 二項式定理

在 **99** 課綱高中數學 **II** 的〈二項式定理〉單元中，利用組合的觀念來證明二項式定理：

$$(x+y)^n=(x+y)(x+y)\cdots(x+y)=C_0^n x^n+C_1^n x^{n-1}y+\cdots+C_r^n x^{n-r}y^r+\cdots+C_{n-1}^n xy^{n-1}+C_n^n y^n$$

在南一版本中，以 **3** 次方與 **4** 次方為例，利用分離係數法的直式運算來說明巴斯卡三角形中上層與下層數字間的關係，最後結論說道：「當正整數 **n** 不是很大時，利用巴斯卡三角形，也可以容易地寫出$(x+y)^n$的展開式。」





這樣的說法，以及課本中的例子，都將二項式定理與「巴斯卡三角形」的應用侷限在展開與計算係數上。而課本提了楊輝、賈憲，忽略了他們利用「巴斯卡三角形」在開方法上的貢獻，等於略過中算史中相當特別的一個章節，有點可惜。

楊輝在《詳解九章算法》（**1261** 年）中，附了一張「開方作法本源圖」，並說明：「源出《釋鎖》算書，賈憲用此術。」此圖之所以稱為「開方作法本源圖」，就是因為開高次方時需要用到的高次展開係數，來自於此。

賈憲利用他在開平方、開立方中引入的新方法—隨乘隨加的「增乘」法，給出了求二項式展開式中的各項係數的方法，而有了「開方作法本源圖」，開高次方就不成問題了。以求開六次方會用到的 **6** 次方展開式的係數為例，首先列出五層，每一層都是 **1(I)**，其次"以隅算一，自下增入前位至首位而止"**(II)**。"復以隅算如前升增，遞減一位求之"**(III~VI)**，就是由下而上每低一位而止。最後結果再加上隅（**1**）和積（**1**），剛好是 **6** 次方的展開係數：**1**、**6**、**15**、**20**、**15**、**6**、**1**。如下表：

	(I)	(II)	(III)	(IV)	(V)	(VI)
上廉	1	1+5=6 止				
二廉	1	1+4=5	5=10=15 止			
三廉	1	1+3=4	4+6=10	10+10=20 止		
四廉	1	1+2=3	3+3=6	6+4=10	10+5=15 止	
下廉	1	1+1=2	2+1=3	3+1=4	4+1=5	5+1=6 止
隅	1	1	1	1	1	1

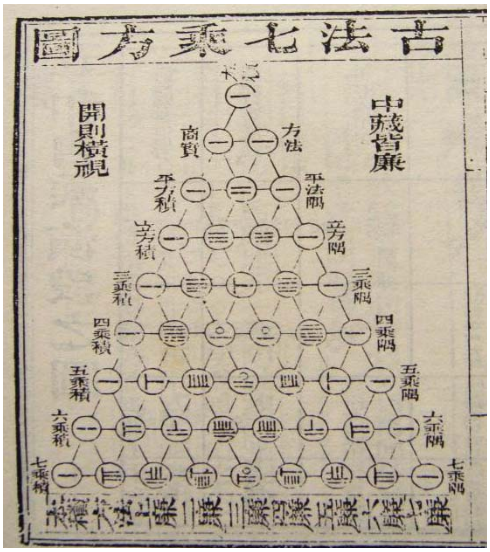
這樣的隨乘隨加的方法，說明了「巴斯卡三角形」中每一數的由來。在「開方作法本源圖」中，列有幾行「口訣」：

左袤乃積數，右袤乃隅算，中藏者皆廉；以廉乘商方，命實而除之。

前三句在說明這個算術三角各位置的名稱，若以$(x+a)^n$ 為例，左邊斜線上的數字指的是積 a^n 的係數，「隅算」指的是 x^n 的係數，而「廉」指的就是展開式中的其他個項的係數；後兩句即是利用其來開方的方法。賈憲的開高次方的方法稱為增乘方法，主要在改進以前籌算的方式，利用隨乘隨加的方法，在一個籌式之內依次進行。以開三次方根為例，利用三次方的展開式$(a+b)^3=a^3+[3a^2+(3a+b)b]b$來找出某一數的三次方根。如求$\sqrt[3]{N}$時，若猜測其為一二位數，即$N=(a+b)^3$，先猜測出十位數字$a$，再利用隨乘隨加的方法，將$N$減去$a^3$後，再猜測個位數字$b$，同樣利用隨乘隨加的方法，減去$[3a^2+(3a+b)b]b$，所得$a+b$即為開方後所得。賈憲的方法如下表：

商	a	a	a	a	$a+b$	$a+b$
實	N	$N-a^2\cdot a=N-a^3$	$N-a^3$	$N-a^3$	$N-a^3$	$N-a^3-[3a^2+3ab+b^2]b=N-(a+b)^3$
方	0	$0+a\cdot a=a^2$	$a^2+2a\cdot a=3a^2$	$3a^2$	$3a^2$	$3a^2+(3a+b)b=3a^2+3ab+b^2$
廉	0	$0+1\cdot a=a$	$a+1\cdot a=2a$	$2a+1\cdot a=3a$	$3a$	$3a+1\cdot b=3a+b$
隅	1	1	1	1	1	1

賈憲將這種方法擴充到開任意高次方，只要知道高次方的二項展開係數即可。在朱世傑的《四元玉鑑》中也有所謂的「古法七乘方圖」，其中有所謂「中藏皆廉」的字樣，「廉」指的就是廉法，也就是開方中「實、方、廉、隅」中的廉，指的就是二項展開式中各項的係數；而「開則橫視」指的卻是每一橫行為開某高次方時應採用的係數。



在中國古算中，雖然知道「巴斯卡三角形」這個算術三角的用處，但是，無論是朱世傑的垛積招差，還是賈憲、楊輝的開方法，都也僅限於單一用法，無法將這個算術三角當成一個純數學的物元（**object**）來研究。

「巴斯卡三角形」中的數字，不是只帶有二項式定理展開係數的意義而已。如果只侷限在這一部份，就如同只注意到花園中的一花一石，而忽略的花園整體的壯觀與美麗。第一個將「巴斯卡三角形」當成一個研究實體，並將其三層意義整合在一體的，就是巴斯卡（**B. Pascal**），所以，我們才以他的名字來命名。

三、巴斯卡的《論算術三角(A Treatise on the Arithmetical triangle)》

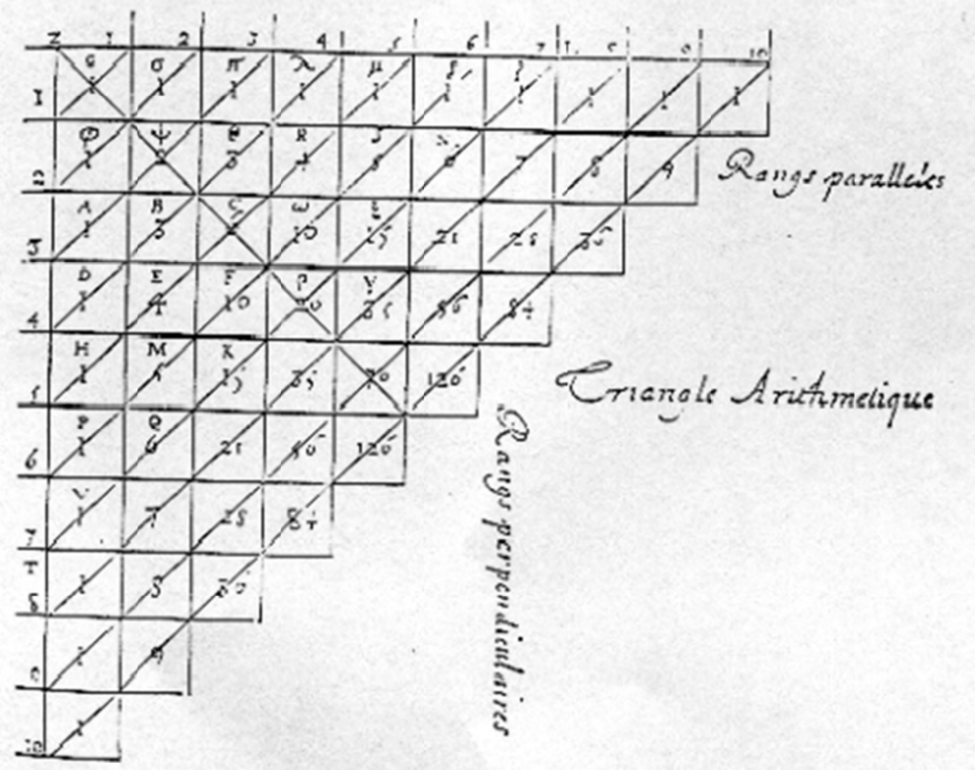
四、巴斯卡的《論算術三角》大約完成於 **1654** 年。當時因為他成功地解決了賭博中賭金分配的問題（**Promble of Points**），刺激了他對組合的興趣。《論算術三角》這一本書中分成兩個部份，第一個部份包含了算術三角的定義和 **19** 的推論，以及一個問題。在這個部份中，巴斯卡給出了算術三角的性質，以及我們所熟悉的許多組合公式。第二個部份為算術三角的應用，包含了四個章節：

（**1**） 在擬形數理論上的應用
（**2**） 在組合理論上的應用
（**3**） 在機會遊戲（**game of chance**）中賭金分配問題上的應用。
（**4**） 在二項展開式上的應用

在第一部份中，巴斯卡以組合規則中的加法公式 $f_k^l = f_k^{l-1} + f_k^l$，[1]定義所謂的算術三角。

然後在 **19** 個推論中，給出了從算術三角中可以看出的性質公式，並加以證明。節錄如下：

[1] 以下所用的符號 l, k 即（表一）之 l 與 k，也就是算術三角中，行為 l，列為 k。



Pascal's original Arithmetical Triangle, from the *Traité du triangle arithmétique* (1665)

推論 2：在每一算術三角中，每一格等於它前一平行行中，由其所在的垂直行到第一垂直行的所有數字和。即 $f_k^l = \sum_{i=1}^{l} f_{k-1}^i$ 。

推論 5：在每個算術三角中，每一格都與它相反的格相等。即 $f_k^l = f_{l-1}^{k+1}$（或是我們熟悉的 $C_r^n = C_{n-r}^n$ ）。

這兩個推論改寫成現今的符號，就是 $C_k^n = \sum_{i=k-1}^{n-1} C_{k-1}^i$ 與 $C_k^n = C_{k-1}^{n-1} + C_k^{n-1}$ ，圖示如下：

	l	1	2	3	4	5	6	7	. . .
k	0	1	1	1	1	1	1	1	. . .
	1	1	2	3	4	5	6	7	. . .
	2	1	3	6	10	15	21	28	. . .
	3	1	4	10	20	35	56	84	. . .

表一）

推論 **8**：在任何算術三角中，每一底上數字之和構成一列幾何級數，這一幾何級數從 **1** 開始，順序與底的指標一致。即 $\sum_{r=0}^{n} C_r^n = 2^n$ 。

推論 **12**：在任意算術三角中，同底上的兩個毗鄰的格子，上面的格與下面的格的比等於從上面格到此底的頂格的格數，與從下面的格到底端的格數的比。那兩個格子都包含在其中。即 $kf_k^l = lf_{k-1}^{l+1}$（即是 $rC_r^n = (n-r+1)\cdot C_{r-1}^n$）。[2]

問題：給定 l 與 $k+1$，求 f_k^l 。

巴斯卡在解這一個問題的時候，重複的應用推論 **12**，給出了 $f_k^l = \dfrac{l(l+1)(l+2)\cdots(l+k-1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 1}$，即是我們現今熟悉的 $C_r^n = \dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots r}$ 的公式。

巴斯卡在第二部份的第一節中，同樣將擬形數命名為三角形數（**triangulaires**）、角錐形數（**pyramidaux**）、**triangulo-triangulaires** 等等，其他即如前面所述的，將擬形數與算術三角做一連結。在第二節組合數的理論中，先以簡單的例子（**n=3, r=1**）說明 $C_{r+1}^{n+1} = C_r^n + C_{r+1}^n$ 的一般性。然後利用這個引理說明組合數與算術三角中的數字的關係

$$f_r^{n-r+1} = C_r^n$$

在第四節應用到二項展開式的部份，巴斯卡先以簡單的例子說明求和二項式與差二項式的次數：[3]

> **如果求一項為 A，另一項為 1 的二項式的冪，如四次冪，即 A+1 的四次方，則看算術三角的第五底，及指標為 4+1 的底。這一底上的格字是 1, 4, 6, 4, 1，第一個數 1 是 A^4 的係數；第二個數 4 是 A 的低一次的冪即 A^3 的係數；底的下一個數 6 是再低一次的冪的係數，即 A^2 的係數；下一個數 4 是 A 的更低一次的冪，A 的係數；底的最後一個數 1 為常數。這樣我們得到：$1A^4 + 4A^3 + 6A^2 + 4A + 1$ 即是二項式 A+1 的四次（平方的平方）冪。……**

巴斯卡在給出例子之後說：

> **我不想給出所有的證明了，一方面有些人（如埃里岡（Hérigone））已研究過這些問題，另外，這些證明也過於簡單（the matter is self-evident.）。**[4]

---

[2] 在證明推論 12 時，巴斯卡以數學歸納法來證明。他先假設兩個前提：

引理 1：在第二底上此定理顯然成立。

引理 2：如在某一底上有此比例，則在下一底上一定也有此比例。

[3] 巴斯卡用「差二項式（apotome）」表示兩項差的二項式。見《數學珍寶》，p. 439，李家宏譯。

[4] 我所引的譯文來自《數學珍寶》中李家宏所譯。但是從英文原文看來，其實巴斯卡的原意應該是算術三

整個來講，巴斯卡的《論算術三角》是對算術三角和其應用的一種清楚的，簡明的陳述。他並且建構了一個很清楚的論述結構，先定義、建立算術三角的性質，然後應用在各種不同的領域，將「算術三角」這個數學物元（**object**），做一個結構性的整合，而不再只是二項式展開係數的一個應用工具。巴斯卡給我們一個非常好的示範，即是如何將一個主題很清楚、完整的整合在一起。從此以後，巴斯卡三角形不再只是用來求二項展開式的係數而已，數學的豐富性由此可窺一二。

Exercise

1. 證明下列各式：

(1) $1+2+3+4+\ldots+n=\dfrac{1}{2!}n(n+1)$

(2) $1+3+6+10+\ldots+\dfrac{1}{2}n(n+1)=\dfrac{1}{3!}n(n+1)(n+2)$

(3) $1+4+10+20+\ldots+\dfrac{1}{3!}n(n+1)(n+2)=\dfrac{1}{4!}n(n+1)(n+2)(n+3)$

2. 十個相異物，編號 **0, 1, 2, …9**，從中任選 **3** 個，

(1) 若編號 **0** 的東西一定要取，共有幾種方法？將其一一列出填在下表：

一	**012**	**013**	**014**					**019**
二		**023**	**024**					
三			**034**					
四				**045**				
五					**056**			
六						**067**		
七							**078**	
八								**089**

(2) 若編號 **0** 不取，且 **1** 號一定要取，將其各種組合一一列出，算算共有幾種方法？

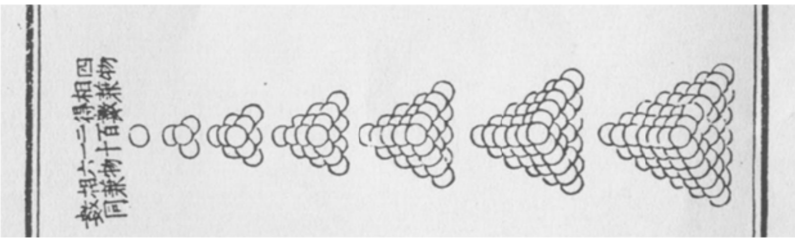
一		**123**	**124**					**129**
二			**134**					
三				**145**				
四					**156**			
五						**167**		
六							**178**	
七								**189**

(3) 若編號 **0** 與 **1** 皆不取，**2** 號一定要取，共有幾種方法？

(4) 按照**(1), (2), (3)**的方法依序類推，可得十個相異中物中取 **3** 物的方法數為何？

角這個形式中，即隱含了二項式定理的證明，它是不證自明（self-evident）的。

3. 解釋下圖中，汪萊「十物取四物的遞兼分數」的選取意涵：



3. 利用增乘方法開立方，算出$\sqrt[3]{39304}$ ＝？

4. 證明：$rC_r^n = (n-r+1)\cdot C_{r-1}^n$

參考文獻

Edwards, A.,1987, Pascal's Arithmetical Triangle. U. K.: Charles Griffin & Company Limited.

Pascal, 1654, 《論算術三角》，李家宏譯，節錄於《數學珍寶》，李文林主編，台北：九章出版社。

汪萊，**1798-1799,**《衡齋算學》，收錄於《中國科學技術典籍通彙 數學卷》

李兆華，**1993**，〈汪萊的《遞兼數理》、《參兩算經》略論〉，收錄於《談天三友》，洪萬生主編，台北：明文書局。

李儼，**1983**，《中國古代數學簡史》。台北：九章出版社。

錢寶琮主編，**1964**，《中國數學史》。北京：科學出版社。

蘇俊鴻，**2000**，〈古代文本在課堂上的使用：單元--組合數的介紹〉

2013 數學文化與教育國際研討會

一、活動日期：中華民國 102 年 6 月 21 日至 6 月 22 日(星期五、六)
二、活動地點：國立臺灣大學天文數學館 202 演講廳 (地址：臺北市羅斯福路四段 1 號)
三、指導單位：行政院國家科學委員會科學教育處
四、主辦單位：國立勤益科技大學、中央研究院數學研究所
五、活動目的：

台灣中學生近十年來無論是在 TIMSS 的數學成就測驗，或 PISA 的數學素養評量等國際評比中皆名列前茅。但是相關數據也顯示出台灣學生在「數學正向態度」 和「學習自信心」上顯著低於國際平均。這種反差現象影響的將是學生未來透過數學探索與瞭解世界的信心與動力。真正的數學素養不僅僅在於知識的深度，而更在於知識應用的廣度。數學素養就是一種數學眼光，一種從數學瞭解世界的眼光。然而要培養瞭解世界的數學眼光，不能只強調數學知識的工具面，還必須關心其文化面。

有鑑於此，從民國 100 年開始，國科會科教處數學教育學門將「數學文化與教育」列為重點徵求專題研究計畫項目之一，並展開一系列的倡導活動。本次研討會為繼「數學文化與教育重點計畫徵求說明會」與「數學文化與通識課程規劃座談會」之後的國際交流觀摩學習活動。

六、報名日期：102 年 5 月 13 日(星期一)～102 年 6 月 16 日(星期日)
七、報名網址：國科會科教處數學教育學門學門資訊網 / 2013 年數學文化與教育國際研討會 http://w3.math.sinica.edu.tw/nsc_mathedu/mathculture/index.php
八、研討會議程：

6 月 21 日（星期五）			
時間	活動內容	主持人/演講者/與談人	場地
9:00~9:30	報　到		
9:30~9:40	開幕典禮	主持人：李國偉教授	台灣大學天文數學館 202
9:40~10:40	專題演講（一） How mathematics traveled from East to West via “Telling mathematics”.	主持人：洪萬生教授 主講人：Jan van Maanen 教授	台灣大學天文數學館 202
10:40~11:00	茶 敘 與 交 流		
11:00~12:00	專題演講（二） 教育取向的數學文化管窺	主持人：劉柏宏教授 主講人：汪曉勤教授	台灣大學天文數學館 202
12:00~13:10	午餐		
13:10~14:40	專家論壇（一）	主持人：楊德清教授	台灣大學天

	數學文化面面觀	與談人： 張維忠教授、李國偉教授 黃文璋教授	文數學館 202
14:40~15:00	茶 敘 與 交 流		
15:00~16:30	專家論壇（二） 數學文化融入課程的策略與挑戰	主持人：陳建平教授 與談人： Helmer Aslaksen 教授 單維彰教授、英家銘教授	台灣大學天 文數學館 202
16:30~17:00	綜合座談	主持人： 李國偉教授、劉柏宏教授	台灣大學天 文數學館 202

6 月 22 日（星期六）			
時間	活動內容	主持人/演講者/與談人	場地
9:00~9:40	報　到		
9:40~10:40	專題演講（三） 中國大陸數學文化與數學教育研究的回顧與反思	主持人：林孝信教授 主講人：張維忠教授	台灣大學天 文數學館 202
10:40~11:00	茶 敘 與 交 流		
11:00~12:00	專題演講（四） Teaching a course on mathematics in art and architecture	主持人：李國偉教授 主講人： Helmer Aslaksen 教授	台灣大學天 文數學館 202
12:00~13:10	午餐		
13:10~14:40	專家論壇（三） 數學文化與師資培育	主持人：楊德清教授 與談人： 汪曉勤教授、黃友初教授 張子貴教授	台灣大學天 文數學館 202
14:40~15:00	茶 敘 與 交 流		
15:00~16:30	專家論壇（四） What can Western and Eastern mathematics learn from each other?	主持人：單維彰教授 與談人： Jan van Maanen 教授 洪萬生教授、陳建平教授 蘇意雯教授	台灣大學天 文數學館 202
16:30~17:00	綜合座談與閉幕	主持人： 李國偉教授、劉柏宏教授	台灣大學天 文數學館 202

讀《天地明察》有感

陳玉芬
新北市明德高中

精彩的不只是是春海在歷史上留下的成就
更是這位少年從埋頭苦算的知識狂到傾聽世人對改曆的渴望
在支持與挫敗中慢慢擔起重任
奮力追求夢想的這一路歷程
春海以自己對天文的好奇、解題的熱情
向宛如棋局般的星宿展開一場以上天為對手的艱難對決
這就是《天地明察》的故事
引自 原書的緣起~~新經典文化編輯部

一、前言

《天地明察》以日本江戶初期的真實人物・澀川春海為書中主角，講述出身圍棋世家的他從小對算術的狂熱，以及極富寓意的成長人生。書中舖陳著多種衝突的張力，諸如：澀川春海在江戶任職棋士，卻醉心於算術；完全不懂劍術，卻無論他去到何處，都要佩掛著如瘟疫般隨行的雙刀；繼承父親的名字「安井算哲」，在家中的位分卻讓他尷尬的只想自稱「澀川春海」；對日本的和算始祖關孝和幾近於偶像般的崇拜，追逐著關的足跡，但另一端的本因坊道策卻將他視為最可敬的棋手，也追逐著他要下一場世紀的棋局；最後，終其一生做的是幕府棋士，但留名青史的卻是他所完成的大和曆。

二、內容簡介

本書共有六章，依序如下：

第一章　一瞥即答
第二章　算法對決
第三章　北極出地
第四章　授時曆
第五章　改曆請願
第六章　天地明察

在第一章的開始，即點出澀川春海對算術的狂熱，早在他到達江戶做幕府棋士前，在京都即已期待要一睹傳說中的「算額繪馬」，[5]而在他聽到那一大片繪馬串相互碰撞

5 “繪馬”，日語念“えま” (Ema)，即懸掛於神社、廟宇廊簷的木制彩色匾額,也就是向神或佛祈願或者感謝神佛使自己祈願實現，而書寫相應願望的木板畫，供奉於神社或廟宇之中。而在此木匾上書寫算術題目的則稱為「算額繪馬」，上面還會寫著出題者的名字，最後解答者會將答案寫於上，若答題正確，出題者會寫著「明察」，若答案錯誤，出題者

所發出的喀啷、鏗隆清脆聲響時，竟有著因為身處江戶而有的莫名幸福感！這與他取名為澀川春海的內心世界似乎有著相同的渴望。[6]顯示作者在一開始，即已提點主角最終的想望不在「棋藝」。

第二章的內容則是春海用盡畢生算術功力，設計了一題**自認不是輕易能解的題目**，只為了想與他心中的偶像關孝和對決，除了想要展現自己的能力之外，更大的企圖則是期待他的偶像關注意到他的存在。但似乎事與願違，在關輕掃題目寫下「無術」二字時，已完全暴露出春海所有的自尊與自信已消失殆盡，甚至想用那在他身上極不協調的雙刀切腹自盡，最終是拖著亡靈似的軀體邁向他人生中真正的對決。

第三章，一場人生中的對決，也是春海發現竟是自己一直在尋找的春天之濱。在他一直期待一個**不無趣的對決**機緣下，春海被幕府大將軍最親近的大臣酒井派去觀測北極星。與之同行的隊伍居然是書法家建部、醫師伊藤，還有他這個棋士。這似乎也是作者刻意突顯在江戶時代天文之術並沒有形成一個職業，而唯一的技藝只有「棋奕」，但諷刺的是，春海正是無法從他的正職（棋士）中找到樂趣，相反地，他從伊藤、建部如赤子般的熱情中找到了「**交給我吧**」的堅定勇氣。

第四章，提倡民生思想的重要幕政推手保科正之也已發現自中國傳入的宣明曆法出錯，「今天」竟然已是「後天」！導致農作歉收、宗教儀式混亂，於是在一場棋奕中，希望春海能與製作授時曆的三位才子並駕齊驅，[7]為這個國家帶來正確的**天理**，此時歡欣之情無可言喻的春海飄渺地說著：「**我真的可以嗎？**」彷彿又再次聽到喀啷、鏗隆，那充滿幸福的夢幻音色在他耳朵深處響起，他後退一步趴倒在地，口中回應：『必至！』但不幸的是，春海一直視為最正確的授時曆，竟為他帶來了災難。

第五章，交付改曆重任失敗後的春海，彷彿又回到了當初出了「病題」[8]與他的偶像關對決的絕望心情，就在此時，關的再次出現，並出了一道題目，指名要春海解題，結局的走向似乎又有了新的變化。

第六章，他賭上了自己的一生，因為想要回報一路上給予他支持和鼓勵的朋友，走遍日本，觀測星象、研究曆法、專研數學。立誓找出「**天理**」和「**地測**」的正確解答，達成「**天地明察**」之願。終於，在人與天最高對決的最後一刻──人終於碰到了上天。

會寫上「惜哉！」

6 他的名字來自一首歌。「雁鳴菊花開　秋意正盎然　心嚮春之海　住吉海之濱」，詩中大意為大雁嘶鳴、菊花盛開的優雅秋季，但自己卻只想在春天的海邊，擁有「住吉（適合居住）」的海濱就足夠了。表示在完成自己喜愛的事業之後找到屬於他人生的海濱。

7 元朝皇帝忽必烈希望改曆，於是招聘了許衡、王恂及郭守敬三位才子而成授時曆。

8 「病題」指所出的題目有問題或條件不足。

三、評論

首先從書中可以瞥見春海背後的江戶時代，幕府制度、治國思想的改變，因此對日本戰國時代以後的歷史，讀者約略可有所認識。而本書主角澀川春海〔安井算哲〕是日本歷史上真實存在的人物，不過既是小說，難免有虛構的成分，就像春海在書中崇拜的數學家關孝和，書中是和春海同年，歷史上卻有可能不是〔因為關的生年不確定〕。但對於本書的書名《天地明察》個人覺得「氣勢滂薄」！天地就是天文與地理，明察是當時解出數學題時，出題者對答題者的誇獎，也就是「聰明，答對了」的意思。所以，「天地明察」可說明渺小的人類想與上天做一場對決，最終在堅定的勇氣博鬥下，上天給了人類一個公道。

本書雖以看似毫無相關的棋藝、算術、天文做為混雜的題材，但仔細想來，滿天密佈的星盤、日月運行的軌跡又何嘗不是遵循著有如棋局中的「定石」[9]在運轉？所以作者也許想透過主角對算術的熱情，理解宛如棋局般的天地真理。同時，賦予主角一種非英雄式的角色，讓他在跌跌撞撞的人生中，締造了新的職業（天文方）、新的地位（圍棋武士）以及新的機遇（創造大和曆）；他以天地為棋盤，以家國和歷史為算籌，澀川春海賭上一生，下了一盤最高對決的起落生涯。這又何嚐不是給我們閱讀者最大的生命勇氣呢！

---

9 定石，一般是指圍棋中，經過棋手們長久以來的經驗累積，而形成在某些情況下雙方都會依循的固定下法。

大破大立：難得一見的數學教育好書

洪萬生

台灣師大數學系退休教授

書名：《一個數學家的嘆息：如何讓孩子好奇、想學習，走進數學的美麗世界》（*A Mathematician's Lament*）

作者：保羅・拉克哈特（Paul Lockhart）

出版社：經濟新潮社，台北市

出版時間：預定 2013 年 6 月

本書應該是我所見過的數學教育宣言中最基進的（**radical**）一篇了。作者保羅・拉克哈特（**Paul Lockhart**）是一位成功的專業數學家，公元 **2000** 年，他毅然轉入紐約市一所中小學任教（年級遍及 **K-12**），身體力行他認為有意義的數學教學活動。本書即是他的現身說法，因此，他對於美國目前中小學數學教育的現實之沈重但真誠的嘆息，似乎沒有幾個有識之士敢視而不見。

事實上，本書（分上、下兩篇）所呈現的願景，乃是中小學數學教育的一種烏托邦。通常我們面對烏托邦，似乎總是看看就好，大可不必認真。然而，我仔細閱讀（英文原文⊕中譯文）之後，對於總編輯林博華的邀序，多少有些猶豫與掙扎。對照我自己的數學經驗，我將如何推薦本書呢？我自己曾在台灣師大數學系任教將近四十年，主要授課如數學史都涉及未來與現職中學教師之專業發展，而且也曾指導過幾十位在職教師班的碩士生，所以，我對於（台灣）數學教育現實的興革，當然也有相當清晰的理想與願景。不過，經歷過那麼多的數學教育改革爭議之後，我覺得務實地訓練與提升教師的數學素養，恐怕是最值得把握的一條可行進路。

話說回來，作者的願景所引伸出來的策略，也並非完全不可行！譬如說吧，在本書結束時，作者語重心長地鼓勵老師「**需要在數學實在中悠遊。你的教學應該是從你自己在叢林中的體驗很自然地湧出，而不是出自那些在緊閉窗戶車廂中的假遊客觀點。**」因此，「**丟掉那些愚蠢的課程大綱和教科書吧！**」因為「**如果你沒有興趣探索你自己個人的想像宇宙，沒有興趣去發現和嘗試了解你的發現，那麼你幹嘛稱自己為數學教師？**」

對許多數學教師來說，要是丟掉課程大綱與教科書，大概會有一起丟掉洗澡水與嬰兒的制式（**conventional**）焦慮感，儘管有一些教師平常教學時，根本不太理會課程大綱與教科書內容，而只是使用自己或同仁共同編輯的講義。然而，不管你是否贊同拉克哈特的主張，也不管他的主張是否能夠付諸實現，本書是老師、家長與學生都不容錯過的金玉良言，值得我們咀嚼再三。底下，我要稍加說明我大力推薦本書的三個理由。

本書上篇主題是「悲歌」，依序有〈數學與文化〉、〈學校裡的數學〉、〈數學課程〉、〈中學幾何：邪惡的工具〉以及〈標準數學課程〉等四節。下篇主題是「鼓舞」，但不分節論述。上篇文字曾由齊斯•德福林（**Keith Devlin**）安排，在 **MAA** 線上（**MAA Online**）

每月專欄「德福林觀點」全文披露（**2008** 年 **3** 月），獲得大大超乎預期的迴響。在上篇一開始，作者拉克哈特利用虛構的音樂與繪畫之學習夢境，說明相關語言或工具的吹毛求疵，讓這些藝術課程之學習，變得既愚蠢又無趣，最終摧毀了孩子們創作模式那種天生的好奇心。或許上述夢魘並非真實，但是，「類比」到數學教育現場，卻是千真萬確。而拉克哈特的立論，是一般人容易忽略的數學知識活動特性：數學是一門藝術！至於它和音樂和繪畫的差別，只在於我們的文化並不認同它是一門藝術。拉克哈特進一步指出：

> 事實上，沒有什麼像數學那樣夢幻及詩意，那樣基進、具破壞力和帶有奇幻色彩。我們覺得天文學或物理學很震撼人心，在這一點上，數學完全一樣（在天文學發現黑洞之前，數學家老早就有黑洞的構想了），而且數學比詩、美術、或音樂容許更多的表現自由，後者高度依賴這個世界的物理性質。數學是最純粹的藝術，同時也最容易受到誤解。

這種主張呼應了英國數學家哈帝（**G. H. Hardy**）之觀點：數學家是理念模式（**patterns of ideas**）的創造者。在他的《一個數學家的辯白》（***A Mathematician's Apology***）中，哈帝藉此宣揚他的柏拉圖主義（**Platonism**）。不過，拉克哈特卻將柏拉圖的理念（**ideas**）拉回到人類玩遊戲的層次：「我純粹就是在玩。這就是數學 – 想知道、遊戲、用自己的想像力來娛樂自己。」事實上，在遊戲情境中，吾人會基於天生的好奇，而開始探索。而這無非是人類學習活動的最重要本質所在。反過來，如果數學學習只是要求學生死背公式，然後在「習題」中反覆「套用」，那麼，「興奮之情、樂趣、甚至創造的過程會有的痛苦與挫折，全都消磨殆盡了。再也沒有困難了。問題在提出來時也同時被解答了 – 學生沒事可做。」對於這種強調精準卻無靈魂地操弄符號的文化及其價值觀，拉克哈特利用簡單例證戳破它的虛幻，這是我大力推薦本書的第一個理由。

在〈學校裡的數學〉這一節中，拉克哈特指出教改迷思，在於它企圖「要讓數學變有趣」，以及「與孩子們的生活產生關連」。針對這兩點，他的批判非常犀利：「你不需要讓數學有趣 – 它本來就遠超過你了解的有趣！而它的驕傲就在與我們的生活完全無關。這就是為什麼它是如此有趣！」顯然為了達到「有趣」與「關連」的目的，教科書的編寫難免「牽強而做作」。譬如，為了幫助學生記憶圓面積和圓周公式，拉克哈特建議：與其發明一套圓周先生（**Mr. C**）和面積太太（**Mrs. A**）的故事，不如敘說阿基米德甚至劉徽有關圓周率的探索史實，說不定更能觸動學生的好奇心靈。這種強調發生認識論（**genetic epistemology**）的歷史關懷，也與他批判數學課程的缺乏歷史感互相呼應。

拉克哈特對於數學課程的僵化之批判，還擴及它所連結的「階梯迷思」，他認為這種一個主題接一個主題的進階安排，除了淘汰「失敗的」學生之外，根本沒有（其他）目標可言。因此，學校裡的數學教育所依循的，「是一套沒有歷史觀點、沒有主題連貫性的數學課程，支離破碎地收集了分類的主題和技巧，依解題程序的難易度湊合在一起」。相反地，「數學結構，不論是否具有實用性，都是在問題背景之內發明及發展出來的，然後從那個背景衍生出它們的意義」。

或謂中學幾何可以滿足此一智性需求，不過，拉克哈特卻將它稱為「邪惡的工具」。

作者在〈中學幾何：邪惡的工具〉這節中，指出數學證明的意義在於「**說明，而且應該說明得清楚、巧妙且直截了當**」，同時，只有當你想像的物件之行為違反了直覺，或者有矛盾出現時，嚴謹的證明才有其必要，而這當然也符合歷史真實。基於此，他嚴厲批判「兩行證明」（**two-column proof**）既沈悶又「**沒有靈魂**」，學生只是被訓練去模仿，而不是去想出論證！

在作者深刻批判學校數學、課程綱要以及幾何證明之後，他還揭露了一個目前通行的「標準數學課程」之真相，這個戳破學校數學（**school mathematics**）神話的深刻反思，是我大力推薦本書的第二個理由。

在上篇解構性的「大破」之後，拉克哈特在本書下篇中，為我們貢獻了令人鼓舞的「大立」，這是我大力推薦本書的第三個理由。在本篇中，拉克哈特想像了一個數學實在（**mathematical reality**），其中「**充滿了我們為了娛樂自己而建構出來的（或是偶然發現）的有趣又可愛的架構。我們觀察它們、留意它們的模式、嘗試做出簡捷又令人信服的敘述，來解釋它們的行為**」。至於如何做數學？拉克哈特利用實例演示，啟發我們「**與模式遊戲、注意觀察事物、做出猜測、尋找正反例、被激發去發明和探索、製做出論證並分析論證，然後提出新的問題**」。此外，他還特別提醒：小孩子都知道學習和遊戲是同一回事。可惜，成年人已然忘卻。因此，他最後給讀者的實用忠告是：玩遊戲就對了！做數學不需要證照。數學實在是你的，往後的人生你都可以悠遊其中。

總之，本書作者分享了他自己基於好奇，探索數學知識活動被忽略面向的深刻體會，其中他認為數學如同音樂、繪畫及詩歌一樣，也是一門藝術。同時，學習與遊戲是同一回事。因此，在遊戲的情境中，基於人類天生的好奇心而探索模式，才是學習數學的正道。這也部份解釋了何以他那麼重視數學史的殷鑑，因為數學都是從歷史脈絡（**context**）產生，並因而獲得意義。

對於教師或甚至家長來說，如果你覺得本書的主張太過基進，不妨參考作者的玩數學比喻，那麼，你對數學學習一定會有全新的體會。根據寵物書籍的說明，離開幼兒階段還喜歡遊戲的物種，只有成年人和成犬。人類幼童利用遊戲來學習包括數學在內的各種事物。如今，我們身為成年人，甚至有幸帶領小孩子學習，為什麼不可繼續玩下去呢？

1. 為節省影印成本，本通訊將減少紙版的的發行，請讀者盡量改訂 PDF 電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail 至 suhui_yu@yahoo.com.tw
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請 e-mail 至 suhui_yu@yahoo.com.tw
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：http://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/hpmletter.htm
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本：陳昭蓉 (東京 Boston Consulting Group) 、李佳嬅（東京大學）
德國：張復凱（Mainz 大學）
基隆市：許文璋（南榮國中）
台北市：英家銘（台北醫學大學）楊淑芬（松山高中）杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中）蘇俊鴻（北一女中）陳啟文（中山女高）蘇惠玉（西松高中）蕭文俊（中崙高中）郭慶章（建國中學）李秀卿（景美女中）王錫熙（三民國中）謝佩珍、葉和文（百齡高中）彭良禎（師大附中）郭守德（大安高工）張瑄芳（永春高中）張美玲（景興國中）文宏元（金歐女中）林裕意（開平中學）林壽福、吳如皓 (興雅國中) 傅聖國（健康國小）李素幸（雙園國中）程麗娟（民生國中）林美杏（中正國中）朱賡忠（建成國中）
新北市：顏志成（新莊高中） 陳鳳珠（中正國中）黃清揚（福和國中）董芳成（海山高中）孫梅茵（海山高工）周宗奎（清水中學）莊嘉玲（林口高中）王鼎勳、吳建任（樹林中學）陳玉芬（明德高中）羅春暉 (二重國小) 賴素貞（瑞芳高工）楊淑玲（義學國中）林建宏 （丹鳳國中）莊耀仁（溪崑國中）、李建勳（海山國中）
宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中）吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）林宜靜（羅東高中）
桃園縣：許雪珍、葉吉海（陽明高中）王文珮（青溪國中） 陳威南（平鎮中學）洪宜亭、郭志輝（內壢高中） 鐘啟哲（武漢國中）徐梅芳（新坡國中） 程和欽 (大園國際高中)、鍾秀瓏（東安國中）陳春廷（楊光國民中小學）王瑜君（桃園國中）
新竹市：李俊坤（新竹高中）、洪正川、林典蔚（新竹高商）
新竹縣：陳夢綺、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）
苗栗縣：廖淑芳 (照南國中)
台中市：阮錫琦（西苑高中）、劉雅茵（台中二中）、林芳羽（大里高中）、洪秀敏（豐原高中）、李傑霖、賴信志、陳姿研（台中女中）、莊佳維（成功國中）
南投縣：洪誌陽（普台高中）
嘉義市：謝三寶（嘉義高工）郭夢瑤（嘉義高中）
台南市：林倉億（台南一中）黃哲男、洪士薰、廖婉雅（台南女中）劉天祥、邱靜如（台南二中）張靖宜（後甲國中）李奕瑩（建興國中）、李建宗（北門高工）林旻志（歸仁國中）
高雄市：廖惠儀（大仁國中）歐士福（前金國中）林義強（高雄女中）
屏東縣：陳冠良（枋寮高中）楊瓊茹（屏東高中）黃俊才（中正國中）
澎湖縣：何嘉祥 林玉芬（馬公高中）
金門：楊玉星（金城中學）馬祖：王連發（馬祖高中）

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。懇請各位老師惠賜高見！