HPM通訊
發行人：洪萬生（台灣師大數學系退休教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）
助理編輯：黃俊瑋（台灣師大數學所研究生）
編輯小組：蘇意雯（台北市立教育大學）蘇俊鴻（北一女中）
黃清揚（福和國中）葉吉海（陽明高中）
陳彥宏（成功高中）陳啟文（中山女高）
王文珮（青溪國中）黃哲男（台南女中）
英家銘（台北醫學大學）謝佳叡（台灣師大數學系）
創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng

第十六卷 第六期 目錄（2013年6月）

- 《數》與《筭數書》：跨越兩千年的漢簡數學書
- 高觀點看數學～生手教師指導科展的探究
- 指導科展心得分享

《數》與《筭數書》：跨越兩千年的漢簡數學書

洪萬生
台灣師範大學退休教授

一、前言

目前在全世界的古代出土文物中，超過兩千年的數學文本，可以說是鳳毛麟角。近二十年來，在中國發現的秦簡《數》與漢簡《筭數書》，就是極珍貴的例子，它在世界文化遺產上，有著不可或缺的價值與意義。

在公元 **2000** 年之前，我們對於中國兩漢先秦數學的理解，都是依賴《九章算術》這一部被認為是漢代的數學經典。顧名思義，這本算經共有九章，不過，目前存世的最早版本 － 南宋版 － 卻僅存前五章。無論中國古代歷史文獻之傳承如何可靠，這部算經終究不是原版，何況目前看起來，它的首度問世在時間上可能稍晚於《數》與《筭數書》。因此，我們在說明後兩部竹簡時，運用比較系統化的《九章算術》作為參照點，的確相當便利。不過，要想真正體會「第一手」的中算文本，那麼，最佳的切入點當推《數》與《筭數書》無疑！現在，經由這兩部第一手的竹簡，我們多少可以掌握得以分享兩千多年前的「數學實作」－ 譬如，如何形成問題？如何解題？甚至如何抄寫講義以流通或傳承數學知識？等等，從而當時的「說算者」進行跨時空的對話。

一、《數》

《數》是湖南大學嶽麓書院於 **2007** 年從香港古董市場收購的一本中國古代竹簡算書。本書包含了許多與社會、經濟、政治、法律和軍事有關的計算，對於研究其它歷史問題也十分重要。《數》書的編定時間下限或為公元前 **212** 年（秦始皇三十五年）。也就是說，這本竹簡保留了至少 **2230** 年前的數學真實活動內容。

本書編號簡 **236** 枚，無編號簡 **18** 枚，簡文字數約有 **6300** 字。至於竹簡的形制，則大多數簡長約 **27.5** 釐米，少數完整簡長約 **27.0** 釐米。完整的簡約寬 **0.5-0.6** 釐米。簡文

字數約有 **6300** 字。又，此一簡書有三道編繩。這些形制在西漢初的《筭數書》也出現。不過，有別於《筭數書》，《數》的挖掘現場已經無從重建，因此，原始簡序已經難以復原。好在數學文本有其「內在的」知識邏輯性（史家喜歡稱之為「內在理路」)，因此，我們對於本書內容之探索，也大致可以說出個所以然來。

以《九章算術》的九章「方田、粟米、衰分、少廣、商功、均輸、盈不足、方程，以及句股」為參照，《數》在九類中，缺乏「方程」與「均輸」算題。儘管《數》有兩個算題與《九章算術》均輸章類似，但都不是運用均輸算法解出。如按數學知識內容來分類，本書約可分為如下：土地面積測算、農作物產量與租稅計算、倉儲物資管理、工程土方計算、物資交換和商品貿易有關計算，以及與軍事有關之計算等六類。其中軍事算題雖然只有一題，卻未見諸於《筭數書》與《九章算術》，因此，我們在此稍作說明。《數》的「營軍之術」題如下：

> **營軍之術曰：先得大卒數而除兩和各千二百人而半棄之，又令十而一，三步置戟，即三之，四置戟，即四之，五步置戟，即五之。令卒萬人，問延幾何里？其得袤三里二百卌步，此三步置戟也。**

這是一個有關構築營壘，布置軍陣的術文。最後一句是給定條件（**三步置戟**）下的答案（**三里二百卌步**）。本算題提供了一個軍陣營壘的實例，營壘為長方形，若其中一個邊長為給定，另一個邊長則可根據人數和置戟的間距（如本題有三步、四步與五步三種置戟之間距）計算出來：

> **長方形軍陣營壘的兩對邊延伸之長度＝〔大卒數扣除兩倍的一千二百人，先半棄之，再除以十，最後乘上置戟之步數〕** $=\dfrac{10000-(1200+1200)}{2}\times\dfrac{1}{10}\times 3=1140$

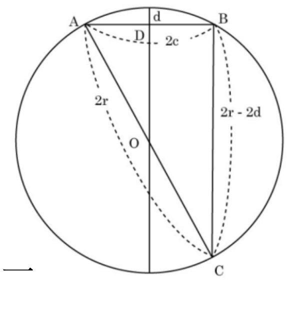
即三里二百卌步（一里＝三百步)。

《數》還包含有《筭數書》所沒有的句股算題：

> **有圓材埋地，不知小大，斲之，入材一寸而得平一尺，問材周大幾何。即曰：半平得五寸，令相乘也，以深一寸為法，如法得一寸，有又以深益之，即材徑也。**

意思是說：有一根埋在地下的圓形木材，不知大小，如果用鋸子鋸下深一寸(「入材一寸」)，則鋸口交木材圓形截面之弦長一尺（「平一尺」）。（參考圖一）根據題意，我們可以將本題求解這根圓材周長的方法，「翻譯」成如下現代算式：

$\dfrac{\text{半平}\times\text{半平}}{\text{深}}+\text{深}=\text{材徑}$。以半平=**5** 寸代入，得 $\dfrac{5\text{寸}\times 5\text{寸}}{1\text{寸}}+1\text{寸}=26\text{寸}$。



圖一

事實上，本題幾乎與《九章算術》勾股章第9題:：

> 今有圓材，埋在壁中，不知大小。以鋸鋸之，深一寸，鋸道長一尺。問徑幾何？答曰：材徑二尺六寸。
>
> 術曰：半鋸道自乘，如深寸而一，以深寸增之，即材徑。

如果不考慮問題的情境及語言表達的差別，只看給定條件，則這兩個問題幾乎一致，唯一差別，乃在於《九章算術》最終要求的是圓的直徑，而秦簡《數》則是求圓的周長。

二、《筭數書》

不同於《數》簡，《筭數書》出土過程完整。它在公元一九八四年初，出自中國湖北省張家山漢墓第 **247** 號。墓主名可能是新，或許姓張，據考古學家推測，是西漢初地方政府小吏。這部竹簡問世不會晚於西漢呂后二年，亦即公元前 **186** 年，也就是說，它是距今（**2013** 年）至少 **2199** 年抄寫的一部竹簡。

《筭數書》出「土」時，竹簡失去了完整的捲束狀態，使得它的編次，變成了現代考古學家與數學史家的「還原」的最大挑戰。所幸，正如《數》書一樣，文本有其「內在的」邏輯性，因此，我們針對這份文本校勘時，顯然多了關鍵的憑藉或參考。換句話說，即使前後兩枚竹簡（或上下文）還原連綴後可以讀得「通」，但是，卻明顯地違背了算理，那麼，我們就必須放棄而另尋他途。

《筭數書》竹簡共有一百九十枚，簡長 **29.6-30.4** 厘米，寬 **0.6-0.7** 厘米。編線三道，上中各一道。全書編成一卷。至於文字都以毛筆書寫於竹黃那一面，只有書名「筭數書」例外，它寫在全書第一題的末簡（第六支）竹簡背面，頂端還塗上黑色方塊，以作為標誌用。上編線之上如有文字，則屬於本書的「題名」，如第一題的「相乘」。正文寫在上、下編線之間。至於下編線之下所出現的「楊」、「王」、「楊已讎」或「王已讎」，或許指楊某或王某的兩人曾擔任抄寫或校對工作，但是，也有史家懷疑這是竹簡製作工序完成之後，檢核品質之工人所留下的紀錄。

本書分為 **69** 題，如上所述，每個題名都寫在上編線上，體例一致，可見抄寫者遵守了抄算書的某種規則。至於算題內容則包括了方田、粟米、衰分、少廣、商功、均輸、盈不足等七類，而相較於《九章算術》，則顯然少了方程與句股二類。

最後，茲引述「約分」（第 **7** 題）與「方田」（第 **68** 題），略見《筭數書》之趣味於一斑：

> 約分術曰：以子除母，母亦除子，子母數交等者，即約之矣。……二千一十六分之百六十二，約之百一十二分之九。

本題「約分術」實質上是一個「輾轉相除法」，其更成熟形式見諸於《九章算術》，但未見於《數》簡。不過，請注意這些分子、分母的唸法，譬如 **2016** 讀作「**二千一十六分之百六十二**」，其中「零」的數學意義尚未出現。其實，同樣情形也在《數》簡中出現，

譬如在它的體積類算題中，就有數詞「**四千九十六**」，這即表示 **4096**，同樣也不唸作「四千零九十六」。

方田題如下：

方田：田一畝方以幾何步？曰：方十五步卅一分步十五。术曰：方十五步不足十五步，方十六步有徐（餘）十六步。曰：并赢（盈）、不足以為法，不足子乘赢（盈）母，赢（盈）子乘不足母，并以為實。復之，如啟廣之术。

本題乃是利用「赢（盈）不足術」來解。不過，在「後見之明」的對照下，這是求平方根 $\sqrt{240}$ 近似值的一種方法。由於

$$\sqrt{240}=\sqrt{15^2+15}=\sqrt{16^2-16}\text{ ，}$$

根據「盈不足術」，

$$\sqrt{240}\approx\frac{\text{不足子乘盈母并盈子乘不足母}}{\text{并盈、不足}}=\frac{15\times16+16\times15}{16+15}=15\frac{15}{31}\text{ 。}$$

此一近似值恰好是利用割線

$$\frac{y+15}{x-15}=\frac{16+15}{16-15}$$

逼近二次曲線 $y=x^2-240$ 的結果。只是此一公式如何「想像」得到，還真是耐人尋味呢。

三、結論

《數》與《筭數書》非常具體地反映了中國古算的實用基調。不過，有關它們的研究仍然方興未艾，尤其是它與可能稍後問世的漢代算經《九章算術》之關係，更是引人注目。無論如何，我們通過這些文本，可以和兩千多年前的「數學知識活動參與者」（**mathematical practitioner**，中國古稱「說算者」）對話，分享他們的數學關懷。這是現代人的福份，值得我們好好珍惜。

參考書目

洪萬生、林倉億、蘇惠玉、蘇俊鴻 **(2006).**《數之起源》，台北：台灣商務印書館。
劉金華 **(2008).**《張家山漢簡《算數書》研究》，香港：華夏文化藝術出版社。
蘇意雯等**(2012),** 〈《數》簡校勘〉,《**HPM** 通訊》第 **15** 卷第 **12** 期。

高觀點看數學～生手教師指導科展的探究

林益弘
國立台北科技大學 技術及職業教育研究所研究生

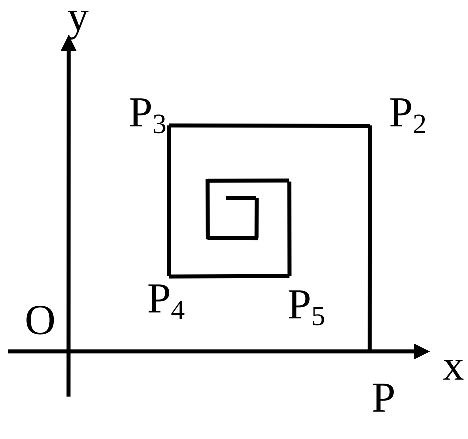
科展，一個在台灣菁英教育的下的一環，幾乎所有設有資優班的高中學生都會經歷的一個活動。第 **51** 屆全國科展中，數學科有一組來自新竹高商的學生。在印象中，較少高職的學生參與數學科科展，而該組學生雖於全國科展一獎未得，但卻在五個月後的國際科展，獲得一等獎，其中的作品上出現什麼改變，又或者指導教師在這個歷程上，對於作品做了什麼努力？在訪問過指導老師林典蔚後，筆者感覺這個歷程十分艱辛，但卻也十分鼓舞有志於從事科展研究的生手教師，因此，特別針對本作品如何與高觀點看數學進行連結，撰寫本文跟讀者分享我的心得。

一、作品簡介

在此，筆者只列出這份作品的原題與結果，至於其細節，請參閱第 **51** 屆全國科展或 **2012** 年臺灣國際科展作品「峰迴路轉 — 等比繞行的秘密」。

原題：

坐標平面上一機器瓢蟲由原點出發，先向東移動 **1** 單位，停在 P_1 點，再往北移動 $\frac{4}{5}$ 單位，停在 P_2 點，接著又向西移動 $\left(\frac{4}{5}\right)^2$ 單位，停在 P_3 點，再向南移動 $\left(\frac{4}{5}\right)^3$ 單位，停在 P_4 點，再依序向東、向北、向西、向南、**…**繼續不斷（如下圖一），每次移動距離都是前一次的 $\frac{4}{5}$，則這隻機器瓢蟲最後幾乎停止於 P 點，則 P 點的坐標為何？已知瓢蟲於 P_1、P_2、P_3、**…**時均需轉變行進方向，故瓢蟲轉變行進方向 k 次後會來到點 P_{k+1}，當 $k \to \infty$ 且此瓢蟲行進公比 $r = \frac{\overline{P_1P_2}}{\overline{OP_1}} = \frac{\overline{P_2P_3}}{\overline{P_1P_2}} = \ldots = \frac{\overline{P_kP_{k+1}}}{\overline{P_{k-1}P_k}} = \ldots$，$0 < r < 1$ 時，此瓢蟲最終會幾乎停止於某一個點 P。而當瓢蟲來到點 P_1、P_2、P_3、**…**時，原始行進方向與下個行進方向的夾角**(**以下簡稱轉向角**)**均為 θ，則此瓢蟲最後均會停止於各點**(**以下簡稱收斂點**)**，而這些收斂點 ***P*** 於坐標平面上所成的軌跡為何？



結論：

一、當機器瓢蟲的轉向角為$\frac{360^\circ}{N}\left(N\in\mathbb{N},N\geq 3\right)$時，各收斂點均位於圓上$C$。

（圓C：$\left(x-\frac{1}{1-r^2}\right)^2+y^2=\left(\frac{r}{1-r^2}\right)^2$）

二、當機器瓢蟲的轉向角θ為任意角時，各收斂點 $\boldsymbol{P}$ 恰形成圓C。

三、當瓢蟲從原點O行走至第一個轉向點P_1時，若瓢蟲以轉向角 $\boldsymbol{\theta}$、行進公比r進行運動，則我們只要先畫出圓C（圓心為$\left(\frac{1}{1-r^2},0\right)$，半徑為$\frac{r}{1-r^2}$），並繪出以$C$與$P_1$為焦點，$\frac{r}{1-r^2}$為長軸長的橢圓 $\boldsymbol{\Gamma}$，若自P_1以有向角θ射出一光線，當此光線射到橢圓 $\boldsymbol{\Gamma}$ 後，反射光的相反射線與圓C的交點就是瓢蟲的收斂點。

四、當瓢蟲以行進公比 $\boldsymbol{r}$、轉向角為α行進時，各轉向點$P_n\left(n\in\mathbb{N}\right)$位於一個極坐標方程式為 $R=m\cdot r^{\frac{\theta-\pi}{\alpha}},m=\overline{OP}=\sqrt{\frac{1}{1-2r\cos\alpha+r^2}}$ ，定角為$\cot^{-1}(\frac{\ln r}{\alpha})$之等角螺線上。

二、教師指導歷程的訪談內容

Q1：請教一下老師您當初是怎麼找到這個題目跟這群學生的？

A：當初是學生參觀過 **2011** 年國際科展後「主動」找我指導，題目則是由學生當年高一課後發問時所提出的問題。由於我沒帶過科展，學生也非資優體系的學生，對於課外延伸的題材涉獵不多，因此，學生能想到將課內的教材做點延伸已十分難得。

Q2：在第一次全國科展的歷程中是否有經歷過什麼困難？

A：當初參加北二區科展比賽的時後根本沒想過會得獎，只想著將事情做好而已。要說有沒有經歷過什麼困難，我想應該是軟體的選擇吧！當初學生提出這個題目我們只想到要「紙上談兵」，也沒想過要用動態幾何軟體呈現，而到了要交件的前一個月，才由我研究所的老師提醒可以用幾何軟體 **GSP** 呈現，而軟體的注入使得很多的臆測，得以不需計算的即時驗證。所以，個人覺得選擇恰當的數學軟體，是進行數學科展活動的首要工作。其次，是學生的書面溝通能力，由於學生大多懂得證明，但僅僅給出證明而缺乏兩證明間的論述，會使得科展缺乏「故事性」，因此，教師對於書面的潤飾工作就顯得重要。最後就是口語溝通，兩位學生至少講過 **50** 次以上才去參賽，而講解的場合，也從講給指導老師聽，講給學弟妹聽，到講給路人聽，個人認為膽量的訓練，也是科展的重要一環，唯有放膽的「臨場學習」才能在最終展現得落落大方，也就更能暢所欲言。

Q3：老師您在第 **51** 屆全國科展一獎未得時，當時的想法為何？又之後的國際科展作品上有什麼改變之處？

A：能從北二區脫穎而出，當然對於全國賽也會有所期待。但回頭來看，我個人倒是覺得這一跤跌得很值。因為跌倒，才讓我看出自己作品的最大問題－「數學的舞台選錯」，整個作品基本上應建構於「複數平面」而非「實數平面」，實數平面上的收斂點 $\boldsymbol{p}$ 之坐標為

$\begin{cases} x = \dfrac{1-r\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2} \\ y = \dfrac{r\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2} \end{cases}$，但換到複數平面上卻只剩下 $\dfrac{1}{1-z}$，兩者從數學的「表徵」上來看，簡潔度就有差。而全國科展後，我與學生決定改由複數重新出發，也確實發現原本需要寫一頁 **A4** 的證明，只剩下 **5** 行就完成，這也是在後續指導工作上，一件讓我很驚豔的事情。此外，當時學生正值高三，一個緊鄰學測的階段下，學生還能進行後續的研究，也讓我感受到該生對於數學的熱愛與執著。

三、結語

看待林老師的作品，筆者想到數學家克萊因《高觀點下的初等數學》(**1908**) 所闡述的數學教育思想：從大學數學來看待初等數學，從而進行一個垂直面上的連結與統整 (**vertical connection and integration**)，來提升中學數學教師的宏觀視野。本作品的創作正符應這樣的概念，以下，我分幾個面向來談這個作品。

1. 數學的垂直（縱深）架構：

學習階段	相關數學內容	收斂點 $\boldsymbol{P}$ 的數學表徵
高中數學	三角函數 無窮等比級數	$\boldsymbol{P}\begin{cases} x = \dfrac{1-r\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2} \\ y = \dfrac{r\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2} \end{cases}$
大一 線性代數	仿射變換	$P = T^{-1}\begin{bmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$， 其中 $T = \left(I - rR\right)^{-1}$，$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$
大二 高等幾何	位似旋轉變換	$\overline{PO} : \overline{PP_1} = \sqrt{x^2+y^2} : \sqrt{\left(x-1\right)^2+y^2} = 1 : r$
大三 複變數函數	**Mobius** 變換	$f\left(z\right) = 1 + z + z^2 + \cdots = \dfrac{1}{1-z}, z = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$

簡略的說明後面二個學習階段：

（1） 線性代數觀點：本作品的收斂點 ***P*** 之坐標可寫成

$$\left(I+rR+(rR)^2+(rR)^3+\cdots\right)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=(I-rR)^{-1}\begin{bmatrix}r\cos\theta\\r\sin\theta\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

，其中 $R=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$為平面上的旋轉矩陣，經計算可知矩陣$T=(I-rR)^{-1}$為一個保角矩陣，也就是說在$\mathbb{R}^2$上給定兩非平行單位向量$\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}$ ，則

$$\frac{\left\langle T\left(\overrightarrow{u}\right),T\left(\overrightarrow{v}\right)\right\rangle}{\left|T\left(\overrightarrow{u}\right)\right|\left|T\left(\overrightarrow{v}\right)\right|}=\left\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right\rangle$$

，又本身$\begin{bmatrix}r\cos\theta\\r\sin\theta\end{bmatrix}$為圓上一點，故經過保角變換下的圓仍為圓。[1]

（2）位似旋轉觀點：由於$\overline{PO}:\overline{PP_1}=\sqrt{x^2+y^2}:\sqrt{(x-1)^2+y^2}=1:r$ ，故P點位於一個以 $(0,0)$，$(1,0)$為固定點，位似比為 **1：r** 的阿波羅圓上，故 ***p*** 點所成的軌跡方程式為$\left(x-\dfrac{1}{1-r^2}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{r}{1-r^2}\right)^2$。

（3）複變數函數觀點：複變函數$f(z)=1+z+z^2+\cdots=\dfrac{1}{1-z}$ ，$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$本身為一個 **Möbius** 變換，又該 **Möbius** 變換為保角變換 **(conformal mapping)**，因此，保角變換下的圓仍為圓。

身為一個教育研究者，我常思考著何以一個任教於高中的教師，至少需要經過大學四年數學基本功的洗禮。**Bruner (1969)** 認為教師要教授某一學科的基本結構，必須注意下列四要點：

- **了解學科的基本觀念**
- **提供教材結構形式**
- **了解基本原則與觀念**
- **檢視基本知識與高深知識之關係**

上述的第四點，也就是數學教師需具有教材內縱向連結的能力。而透過該科展作品，我們就可以看出，身為高中教師，若具有更廣泛與更高觀點的數學素養，則也就更能有洞察單一問題背後本質的能力。簡單來說，一個教師當然可以以一個高中生的數學基礎，給予適當的數學工具，但若教師具有多重解決問題能力的高觀點素養，則單一作品也會有更多元的價值。而林老師所指導的作品從全國科展到國際科展所呈現結果的不同，也驗證了上述

[1] 參閱林義雄、黃文達、洪萬生，《線性代數導引》，台北市：森大圖書，1979。

的說法。

2. 數學的橫向（統整）架構

科展的精神，除了激發學生對科學研習之興趣與獨立研究之潛能外，也提升了對於數學問題的解決能力。[2]以往高中數學所呈現各單元的教材，往往顯得孤立而缺乏連結，而該作品融合了高中數學的以下單元：等比級數（有限與無窮）、複數、二次曲線（拋物線、圓、橢圓、雙曲線）、三角函數，因此，我們可以說該作品對於高中數學的諸多單元，進行了學科內的橫向連結。

現今高中的科展作品中，多數為延伸閱讀後所得到的研究成果，但對於技職體系的學校來說，能從課內問題出發，向上延伸而連結到大學層次的結構已屬難得。而這樣的活動也讓我了解到，若高中教師具有垂直地連結與統整中學數學與大學數學的能力，則引領學生的過程中也就能以一個宏觀的角度來看待數學知識，也更能順利地引領學生之數學學習與數學思維。[3]

---

[2] 參閱朱楠賢，《臺灣國際科展會 10 週年的回顧與展望專輯》，台北市：國立科學教育館。2011。

[3] 參考黃俊瑋，〈《高觀點下的初等數學》第一卷算術・代數・分析之評論〉，《HPM 通訊》13(9): 4-10。

指導科展心得分享

林典蔚
新竹女中

一、楔子

還記得 **95** 年大學畢業前，我給自己立下了一個人生的階段目標：考上老師、帶一次科展、帶學生參加數學奧林匹亞競賽。我高中的時候沒有接觸過科展，以舊有的印象來說，我認為科展就是老師做好、學生接收老師的全部作品，然後發表的無聊過程。但歷經一次科展的洗禮後，我發現這趟旅程顛覆了我過往的印象，也奠定了我日後對於科展的熱情與努力。

民國 **96** 年實習完後，我順利的在當年考上新竹高商成為正式教師。平凡的教書 **5** 年，直到 **100** 年的 **2** 月，在某位老師的安排下，我帶著綜合高中部的學生到科學教育館，參觀 **2011** 年台灣國際科展。參觀後的心情並不平靜，因為我想起當年立下的第二個目標：帶科展。好巧不巧，我的二年級學生孫宏奇回來後，就問我能否指導他做一次科展，也因此開啟了後續的科展旅程。

二、有關孫宏奇二三事

說實話，我的學生孫宏奇並非是別人眼中明星學校的資優生。當時的我曾懷疑，一個考不上新竹高中而到新竹區第 **4** 志願的新竹高商綜合高中部就讀的學生，對於數學能有多大的能耐，但後續的過程卻也讓我了解，這個孩子對於數學的敏銳度，絕對不亞於第一志願的孩子。

孫宏奇就讀新竹高商普通科，簡單的說，他所接受的教育跟一般高中的孩子是相同的。據他本人透露，當年基測時因為社會科考糟了，因而才到新竹高商就讀。孫宏奇在高二上學期時才由我任教，而我對於這個學生一開始印象就很深刻，因為他總會在上課時，問我很多特別且難以回答的問題。如：為何 $\frac{1}{x}$ 不是多項式？最讓我印象深刻的是某一次數學考卷出了一道題目：

> **已知 x_1,x_2,x_3,x_4 均為整數且 $x_1+x_2+x_3+x_4=8$，試依下列各小題求出此方程式有多少組解？**
> **（1）非負整數解。**
> **（2）非負偶數解。**

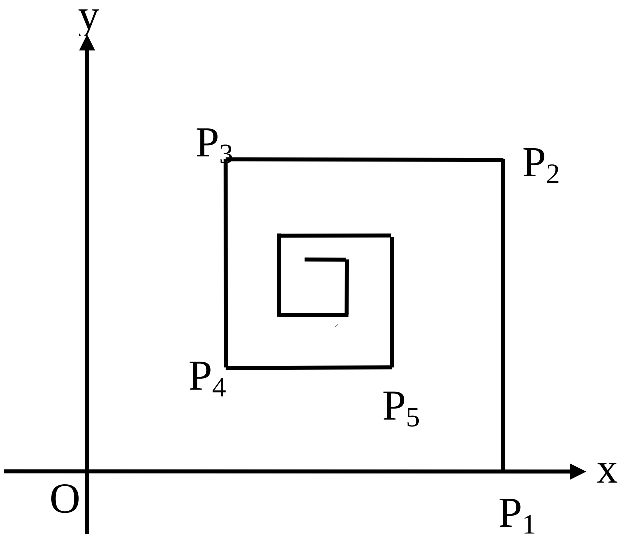
對於第一小題在重複組合的單元中應屬基本題型，而緊接著，當我告知全班第二小題的精神在於“非負偶數”等於“正偶數或零”的時候，孫宏奇突然舉手告知：老師，

非負偶數也可能是負奇數或零或正整數。在此，我才意識到這個題目本身敘述上有模糊地帶，也再三的佩服這個學生對於數學的敏銳度。

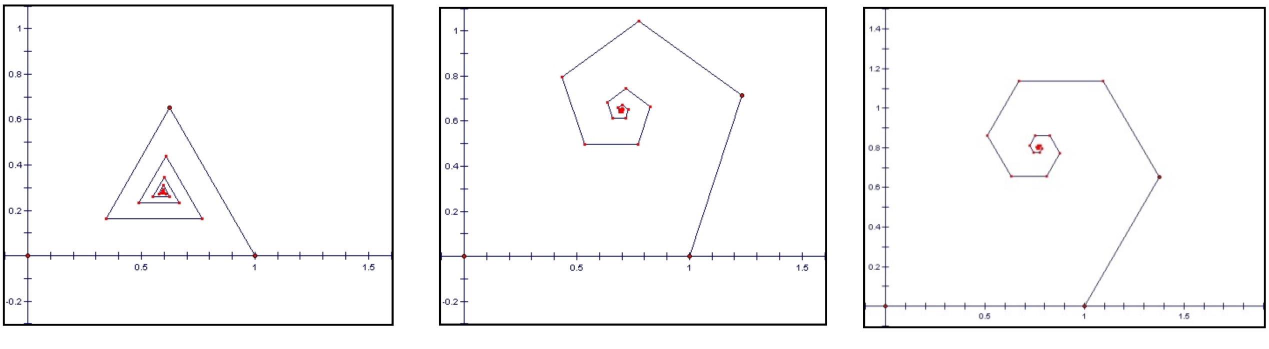
三、找題目

回到科展主題。當孫宏奇提出要我指導科展的當下，我想起高一時我的某位學生曾問了我一個問題：

坐標平面上一機器瓢蟲由原點出發，先向東移動 1 單位，停在 P_1 點，再往北移動 $\frac{4}{5}$ 單位，停在 P_2 點，接著又向西移動 $\left(\frac{4}{5}\right)^2$ 單位，停在 P_3 點，再向南移動 $\left(\frac{4}{5}\right)^3$ 單位，停在 P_4 點，再依序向東、向北、向西、向南、…繼續不斷（如下圖），每次移動距離都是前一次的 $\frac{4}{5}$，則這隻機器瓢蟲最後幾乎停止於 P 點，則 P 點的坐標為何？



當時該學生問我，倘若瓢蟲走的是三角形、五邊形、六邊形、…、**n** 邊形瓢蟲也會有個收斂點，則這些收斂點的坐標要怎麼求（如下圖），



由於學生正值高一上學期，尚未學習三角函數，因此，當時我只告知學生由於工具不足尚無法處理這個問題。之後，孫宏奇來找我指導科展時，我當下就將這個問題拋給他，並要他回去思考看看是否有些有趣的性質，兩節課過後，這個孩子開心的將計算成果跟我分享，其結果如下：

瓢蟲的轉向角為 $\dfrac{360°}{N}\left(N\in\mathbb{N},N\geq 3\right)$ 時，收斂點坐標為 $\begin{cases} x=\displaystyle\sum_{k=1}^{N}S_k\cos\left(\frac{360°}{N}(k-1)\right) \\ y=\displaystyle\sum_{k=1}^{N}S_k\sin\left(\frac{360°}{N}(k-1)\right)\end{cases}$

由於孩子的態度非常積極，當下也就確立了這個問題研究的可行性。但時間是否來得及則是我緊接得考量的重點，當時是 **2** 月 **27** 日，科展說明書繳交日期是 **4** 月 **1** 日，也就是說我只剩一個月得從無到有，原本想說乾脆報名隔年的地區科展，但在學生的熱情驅使下我也決定賭上這一回。

四、研究歷程

說起來很特別，當研究題目確立後很多靈感都會油然而生。收斂點有了，緊接著就是這些收斂點間的關係了，由於收斂點坐標可化簡成 $\begin{cases} x=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}r^{n-1}\cos(n-1)\theta \\ y=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}r^{n-1}\sin(n-1)\theta\end{cases}$，透過棣美弗定理整理後坐標可化簡為 $\begin{cases} x=\dfrac{1-r\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2} \\ y=\dfrac{r\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}\end{cases}$，而以 **Excell** 繪圖後發現各收斂點存在於一個圓心在 $\left(\dfrac{1}{1-r^2},0\right)$，且半徑為 $\left(\dfrac{r}{1-r^2}\right)$ 的圓上。印象中發現這個圓的時候，我興奮到半夜三點還睡不著覺。而後我研究所的授課教師陳創義提醒我該作品可以以 **GSP** 呈現後，學生以此軟體又陸續在三個星期內發現如下性質[4]：

（**1**） 當瓢蟲以行進公比 $\boldsymbol{r}$、轉向角為 α 行進時，各轉向點 $P_n\left(n\in\mathbb{N}\right)$ 位於一個極坐標方程式為 $R=m\cdot r^{\frac{\theta-\pi}{\alpha}},m=\overline{OP}=\sqrt{\dfrac{1}{1-2r\cos\alpha+r^2}}$，定角為 $\cot^{-1}(\dfrac{\ln r}{\alpha})$ 之等角螺線上。

（**2**） 當轉向次數 $k=2$ 時瓢蟲行進之終點坐標 $P_3\begin{cases} x=1+r\cos\theta+r^2\cos 2\theta \\ y=r\sin\theta+r^2\sin 2\theta\end{cases}$ 的軌跡為一蚶

[4] 詳細證明請參閱中華民國第 51 屆全國科展作品或 2012 年台灣國際科展作品。

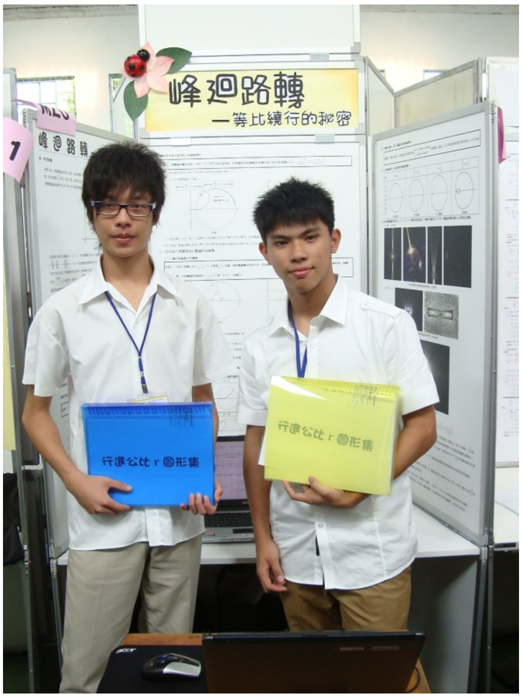
線，且其經平移後的極坐標方程式為 $R=r+2r^2\cos\theta$。

（**3**） 已知 C 為圓心在 $C\left(\frac{1}{1-r^2},0\right)$，半徑為 $\frac{r}{1-r^2}$ 的圓，假設瓢蟲轉向角為 θ 時，其收斂點為 P。當 θ 改變時，$\overleftrightarrow{P_1P_2}$ 與 $\overleftrightarrow{CP}$ 之交點 **S** 的軌跡形成一個橢圓，且此橢圓的焦點為 $C\left(\frac{1}{1-r^2},0\right)$ 與 $P_1(1,0)$。

作品順利的在 **4** 月 **1** 日交出，而後每天都將宏奇留到近晚上 **11** 點，訓練口說跟海報製作，然後送宏奇回家，約午夜 **12** 點才回到我家。對於宏奇願意全心全意的投入，我雖然累，但心裡卻是開心且滿足的。

五、心情如洗三溫暖的得獎歷程

4 月 **30** 日比賽完後成績公布，孫宏奇的作品得到北二區(桃竹苗區)的特優，並獲得參加七月底在苗栗舉辦的全國科展資格。第一次指導學生科展就能有這樣的成績，說真的很滿足，但也在在證明了，只要有心且孩子在這方面有天分，即便是非明星高中的學生，也可以表現得一樣好。



北二區科展照片

能進入全國賽，對學生與老師來說無非是一個莫大的鼓舞。但自得意滿的我，卻忽略了地區賽評審所給的建議，而拿著同一套作品參賽。在七月的全國賽中，學生跟我嚐到了最大的挫敗 － 一獎未得。這對於科展結果滿心期待的孩子，心情瞬間從天堂掉入地獄，而身為老師的我固然難過，但也只能安慰孩子**重點在於過程，而非結果**。

六、開啟數學新舞台－複數的引入

時間來到同年的九月，我詢問孫宏奇參加 **2012** 年國際科展的意願，起初孩子因為學測將屆而拒絕我，但經我再三的鼓勵後，孩子也決定重披科展的戰袍繼續奮鬥。因此，我們決定依照全國賽科展評審的建議，做後續作品的修正，以下為評審所給的建議：

> 數學科展重視數學思維及數學方法。以本作品而言，其基本的數學舞台是複數而不是實數。整個等比繞行現象就在展示「複數幾何級數之部份和所形成的折線」，而蚶線、圓之內擺線等都可視為由幾何級數之和所形成的複數曲線。以上各事都可以透過高一所學的複數來表達。

透過複數的引入我們發現，舞台一旦選對，數學的表徵會變得相當簡潔，舉例來說：原本收斂點 ***P*** 的坐標在直角坐標平面上的表徵為$\begin{cases} x=\sum\limits_{n=1}^{\infty} r^{n-1}\cos(n-1)\theta \\ y=\sum\limits_{n=1}^{\infty} r^{n-1}\sin(n-1)\theta \end{cases}$，但透過複數改寫後只剩下 $\dfrac{1}{1-z}$，也因此整篇文章改寫後，大約省略了 $\dfrac{1}{3}$ 篇幅的計算式，大大的簡化了計算同時展現了數學在複數平面這個舞台的美感。

七、國際科展、峰迴路轉

隔年(2012)參加國際科展，學生一路過關斬將進入前四強，最後更脫穎而出獲得 **2012** 年台灣國際科展的第一名，同時獲選同年度美國國際科技展覽會的國手。我的學生在比賽後曾俏皮地問教授為何選他？據教授的說法是因為孫宏奇對於數學有極高的熱愛，同時有顆鍥而不捨的心，外加作品在複數平面上的表現夠簡潔因而選他。

獲得國際科展一等獎(左為林典蔚老師，右為孫宏奇)

國際科展一等獎 他是竹商第一人

【記者李青霖／新竹報導】新竹高商3年級學生孫宏奇去年首次參加科展，拿下桃竹區數學科金牌，可惜在全國科展一獎未得；他沒洩氣，再報名參加今年台灣國際科展，拿下數學科一等獎，入選第63屆國際科技展覽會國手，將赴美參賽，讓他樂翻了。

孫宏奇的指導老師林典蔚說，阿奇行事雖粗枝大葉，但有開創性，會找出不一樣的路。

孫宏奇基測考得不理想，前兩志願都無法進，選擇新竹高商綜合高中科，他就愛數學、理化，其他文科不拿手；去年1月，學校帶綜合科學生到台北科教館參觀全國科展，回來後，他主動告訴林老師，能否帶他研究。

林典蔚是新手老師，「從沒帶過科展」，丟了「無窮等比級數」問題給阿奇，讓他思考，去年2月開始著手準備，先參加去年4月的桃竹苗區科展，拿下金牌，再參加今年台灣國際科展，拿下數學科一等獎，「這是竹商有史以來第一次奪金」，全校振奮。

不過，去年7月參加全國科展，評審覺得方向不妥，一獎未給，但建議他們從「複數」去思考，2人討論後，重起爐灶，完成「峰迴路轉-等比繞行的秘密」，擊敗各地高手，拿下今年台灣國際科展「大會獎：一等獎」。

其實，研究過程也有段插曲，今年1月學測，他哥哥載他到考場，發生車禍，他左頰擦傷，縫了6針，貼著美容膠帶，請警察帶他進考場。考完繼續研究，「還得準備5分鐘的英文報告」。

2012年台灣國際科學展覽會2月8日至10日在國立科學教育館舉行，孫宏奇過關斬將，拿下第一，同組不少建中、北一女、師大附中好手；竹商校長林銘毅對2名新兵立大功說，「是全校師生的典範」。

新竹市還有兩件作品在競賽中獲獎，同獲一等獎是光華國中學生詹庭嘉「給你點顏色瞧瞧—影像式溶液濃度比色計」作品，入選工程學科國手；光華國中何宜鴻、朱家辰「三角形同向切割線之性質推廣」作品，在數學科則拿下4等獎。

竹市教育處指出，這次科展有17個國家、244位參賽者，作品135件，拿獎不容易。

孫宏奇獲台灣國際科展數學科「大會獎：一等獎」。
圖／新竹高商提供

自由時報對於孫宏奇的報導

八、指導後的心得

整個指導過程只有四個字可以形容 － 峰迴路轉，受益最大的應屬過程中的大量閱讀。在此過程中，我跟學生閱讀了至少 **30** 本(篇)以上的書或文章，從《毛起來說 ***e***》到《毛起來說三角》，甚至是複變數函數論，我也再次拿起來溫習一次。因此，得獎固然開心，但過程中邂逅高等數學，則是從事科展中最讓人振奮的事。舉例來說，透過直角坐標化簡收斂點 ***P*** 可寫如下：

收斂點的坐標 $x=\dfrac{1-r\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}$ 、 $y=\dfrac{r\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}$

將兩式平方和得 x^2+y^2

$$=\frac{(1-r\cos)^2+(r\sin\theta)^2}{\left(1-2r\cos\theta+r^2\right)^2}=\frac{1-2r\cos\theta+r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}{\left(1-2r\cos\theta+r^2\right)^2}$$

$$=\frac{1-2r\cos\theta+r^2}{\left(1-2r\cos\theta+r^2\right)^2}=\frac{1}{1-2r\cos\theta+r^2}\cdots\cdots①$$

$$x=\frac{1-r\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}\Rightarrow x\left(1-2r\cos\theta+r^2\right)=1-r\cos\theta\Rightarrow\cos\theta=\frac{r^2x+x-1}{r(2x-1)}\cdots\cdots②$$

將②代入①得 x^2+y^2

$$=\frac{1}{1-2r\left(\dfrac{r^2x+x-1}{r(2x-1)}\right)+r^2}=\frac{1}{\left(\dfrac{2x-1-2r^2x-2x+2+2r^2x-r^2}{2x-1}\right)}=\frac{1}{\left(\dfrac{1-r^2}{2x-1}\right)}$$

$$=\frac{2x-1}{1-r^2}=\frac{2x}{1-r^2}-\frac{1}{1-r^2}$$

$$\Rightarrow x^2-2x\left(\frac{1}{1-r^2}\right)+\left(\frac{1}{1-r^2}\right)^2+y^2=-\frac{1}{1-r^2}+\left(\frac{1}{1-r^2}\right)^2$$

$$\Rightarrow\left(x-\frac{1}{1-r^2}\right)^2+y^2=\left(\frac{r}{1-r^2}\right)^2$$

若改以複變數函數來看，則證明或可簡寫如下

假設 $S_1 = C(1，r)$

令 $f_1(S_1) = \left\{\omega = \frac{1}{z},\ z\in S\right\}$，則 S_1 的方程式為 $|z-1|^2 = r^2$

$$\Rightarrow (z-1)(\overline{z-1}) = r^2 \Rightarrow z\bar{z}-z-\bar{z}+1=r^2 \Rightarrow \frac{1}{\omega\bar{\omega}}-\frac{1}{\omega}-\frac{1}{\bar{\omega}}+1=r^2$$

若 $r\neq 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^2-1}-\frac{1}{r^2-1}\omega-\frac{1}{r^2-1}\varpi=\omega\varpi \Rightarrow \omega\varpi-\frac{1}{1-r^2}\omega-\frac{1}{1-r^2}\varpi=\frac{-1}{1-r^2}$$

$$\Rightarrow (\omega-\frac{1}{1-r^2})(\overline{\omega-\frac{1}{1-r^2}})=(\frac{r}{1-r^2})^2 \Rightarrow \left|\omega-\frac{1}{1-r^2}\right|=\frac{r}{1-r^2}$$

$\therefore f_1(S_1)$ 為一個圓心為 $\frac{1}{1-r^2}$，半徑為 $\frac{r}{1-r^2}$ 的圓。

簡單來說，從複變數函數的角度來看，若 $z=re^{i\theta}(0<r<1)$，則 z 為半徑 **r** 的圓上一點，

接者我們使 z 通過複函數 $f(z)=\frac{1}{1-z}$ 後，由於 $\frac{1}{1-z}$ 為 **Möbius** 保角變換，故圓通過此變換也就理所當然是一個圓。

解題的捷徑或許就在身邊，但沒有歷經繞一大圈的麻煩處理過程，或許也就無法感受捷徑所帶來的簡潔與美感。在此，謹以此篇拙文鼓勵所有有志於從事科展的教師，也期待這樣的歷程，能為高中職生跳脫既有的升學框架，讓數學能得以活用。