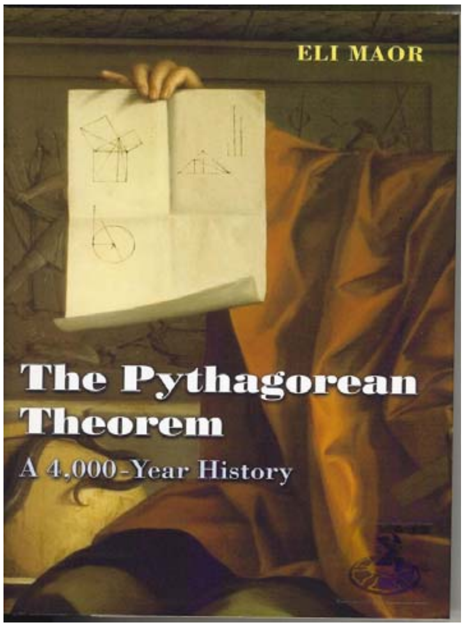
HPM通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系退休教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）
助理編輯：黃俊瑋（台灣師大數學所研究生）
編輯小組：蘇意雯（台北市立教育大學）蘇俊鴻（北一女中）
黃清揚（福和國中）葉吉海（陽明高中）
陳彥宏（成功高中）陳啟文（中山女高）
王文珮（青溪國中）黃哲男（台南女中）
英家銘（台北醫學大學）謝佳叡（台灣師大數學系）
創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng

第十六卷 第九期 目錄（2013年9月）

畢氏定理 4000 年

林炎全
台中教育大學數學教育系退休教授



書名：**The Pythagorean Theorem: A 4000-Year History**
作者：**Eli Maor**
出版社：**Princeton University Press**
出版年份：**2007**
出版資料：精裝，**217** 頁
國際書碼：**ISBN-13：978-0-691-12526-8**

一、本書簡介

The Pythagorean Theorem: A 4000-Year History 是毛爾 **(Eli Maor)** 所寫的幾部普及數學的作品之一。在他的引申之下，畢氏定理與數學各支系都有很深的淵源。在座標系裡，它提供了距離公式，這個公式是解析幾何的基石，錐線的方程式是由它導出來的。微積分計算曲線長的方法也源於它。它是整數論的共同源頭，甚至跨越數學，在物理領域，也扮演重要的角色。作者在序言中，提到本書將把畢氏定理發展的沿革，及其對我們的文化的衝擊展現出來。全書共選了十六個主題，有些主題附加副題 **(sidebar)**，探討相關的人事物。他採用閒話家常的格調舖陳內容，比較專業的就放在附錄，給有興趣進一步探索的讀者參考。從這些，我們可以感覺到本書是為數學普及而作的。

全書是以費瑪最後定理在 **1993** 年獲證開場。費瑪最後定理是畢氏定理的代數形式 $x^2+y^2=z^2$ 的整數解—即畢氏三數組 **(Pythagorean triple)** 所引起的話題，四千年前巴比倫人已經在這方面有所探討，並在一塊泥板上留下成果，其數目大至 **(4601, 4800,**

6649)。約四千年後，我們爲一個極其相似的問題的澄清而登上頭條，宰豬殺羊歡慶畢氏定理被證明的歷史場景再度上演，但這次規模大得多，不只是英吉利島國 **(**懷爾斯 **(Wiles)** 的屬國**)** 的盛事，也是全球的熱潮。**Eli Maor** 以此為本書的開場，想必另有一番的隱喻。畢氏定理雖然掛給畢達哥拉斯，但顯然並不是他最先發現的。如前所述，現存的巴比倫泥板就有畢氏三數組表。埃及人建築宏偉的金字塔，計算體積及測量土地面積以收稅，但沒有證據顯示他們已經知道畢氏定理。這些是作者認定的畢氏定理之史前史。

這個定理既然掛名給畢達哥拉斯，正史就從他開始。於是，第二個單元介紹他的一些成就，讀者在閱讀時請注意分別 **Pythagoras** 和 **Pythagoreans (**畢氏學派**)**，畢氏學派是一個祕密結社，對外不公開。後人把這個學派的成就，都歸在畢氏的名下。這些成就深深影響接續兩千年的數學及科學的發展，有些甚至影響到現代。第三個單元談的是歐幾里得與 **(**幾何**)**《原本》**(*Elements*)**。在徐光啟把 ***Elements*** 中譯本稱為《幾何原本》之後，它就成為華文界的通稱。但是，它的內容並不限於幾何，而是古典 **(**雅典**)** 期 **(**約 **600~300B.C.)** 數學經營成果的總結。**Eli Maor** 指出《原本》**(*Elements*)** 裏兩次提及畢氏定理，依次是第一冊命題 **47**，另一次是第六冊命題 **31**。前者的證明採面積的觀點，屬幾何的；後者則循比例關係，屬代數的，而且把正方形一般化為相似形即成立。這個單元附錄了一些題外花邊，論及與畢氏定理相關的藝術、詩作及文章，例如殺牛宰羊慶祝的詩作，它被選為測尋星際文明的訊息，它使英國政治哲學家霍布士 **(Thomas Hobbes)** 開始喜歡幾何等等。繼歐幾里得之後的重要人物是阿基米德，他的重要成就之一：用內接和外切正多邊形逼近圓周計算π的近似值，就是連續使用畢氏定理的成果。

本書第五單元開始，首先鋪陳後希臘時期即 **500~1500A.D.**的場景，主要是校注希臘的成果。但 **Proclus** 的 ***Eudemian Summary*** 提出了具「中國味」的證法：**dissection (**出入相補，或剪貼法**)**，不過 **Proclus** 的方法還有代數運算的配套。接著，**Eli Maor** 順勢介紹畢氏定理在中國與印度的情形。他認為中國是一個封閉的國度，所以，這個定理是自產而不是外來的，中國人以眼見為憑，透過圖形的說服力，數值關係被一般化為代數形式，其中，希臘式的演繹推理從未出現蹤跡。而印度次大陸西北連接波斯與中亞平原，西向則是阿拉伯半島與地中海；也容易經由海路與其他文明交流。但即使如此，印度人對證明的態度，也沒有比較高明，可能東方民族務實的個性使然吧。這個時期，中東、阿拉伯半島及地中海區域一方面進行翻譯希臘作品，另一方面也進行自己的創作，特別是代數及技術系統，**al-Harrani (826-901)** 就提出一個與畢氏定理有關的幾何定理（不是餘弦定律），使畢氏定理成為其特例。這些成果後來傳到歐洲，成為黑暗時代 **(Dark Ages)** 的明燈。**1454** 年，古騰堡發明活字印刷，人類文明至此已走到近代的門口。

第六單元談的是數學進展的下一步 **--** 符號化，這件工作主要的推手是韋達 **Viète (1540~1603)**。透過符號的代數功能，他把三角函數從解三角形的工具，提昇為分析學的主體。藉著畢氏定理及半角公式，他導出一迄今還是被認為最美的數學公式之一：

$\frac{2}{\pi}=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdots$。接著，第七單元 **Eli Maor** 談的是微積分的基礎：無限與無限小。它們是希臘不願接納的棄兒，現在卻成為處理實際問題的利器。此時，畢氏定理不再是幾何裡面積關係的公式，而是計算長度的代數法寶。本單元後附錄一個歐拉（或尤拉）所導出的公式：$\frac{\pi^2}{6}=\sum\frac{1}{n^2}$，這個公式的特別，在於自然數的運算結果竟與 **π** 有關。

第八單元介紹 **Loomis** 所蒐集 **371** 個畢氏定理的證明法，是本書的重點之一。畢氏定理引來這麼多人投入證明，**Loomis** 說中世紀時，一個學生必須提供一個新的、原創的畢氏定理證明，才能獲數學授碩士學位 **(Master's degree)**，這促使學生和老師動腦筋研創新的證明。**Eli Maor** 臚列一些較特別的證明。這個單元後附錄的第一個花邊，是 **Eli Maor** 自認原創的摺紙證法，後來發現 **Loomis** 的書裡也納入。第二個花邊，則是愛因斯坦也曾提供一個證明・這個定理十年後在他的時空理論、狹義相對論、廣義相對論都扮演重要角色。對於像「三角形三高交於一點」這樣隱晦的事實，都能給予無慮的證明，讓愛因斯坦對幾何折服傾心。第三個花邊，是一個很特別的證明，它從正弦和餘弦函數的 **Maclaurin** 級數著手，這種證明，恐怕只有數學專業才能接受。

第九單元談論由畢氏定理衍生出來的一些話題。首先，新月形可以與一個直角三角形等積，所以，它可以方化，即可作出等積的正方形，但圓是不能方化的。從這個觀點看，滿月與新月是迴然不同的。另一個話題是：直角三角形三邊長是整數，則內切圓半徑是整數。此處 **Eli Maor** 遺漏一個狀況：兩股長都是奇數。說明這種狀況不會發生並不困難。接著，**Eli Maor** 給出一個等式 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{d^2}$，其中 **d** 是斜邊上的高，他暱稱之為小畢氏定理 **(Little Pythagorean theorem)**。然後是餘弦定律、平行四邊形定律、海龍公式、多維度的畢氏定理。這個單元後接兩個花邊，一個是 **Loomis** 暱稱為「一個畢氏門徒的好奇」之有趣圖構；另一個則是畢氏定理的誤用。

第十單元介紹從對偶概念引出的座標系：線座標 **(line coordinates)**。數學的發展，在解析幾何、微積分及抽象代數成為主流，看來傳統歐氏幾何就要被廢耕時，卻又在其中長出奇珍異果—射影幾何。接著，第十一單元所論述的是概念與表徵，其中包括四元數、向量空間、**Hilbert** 空間等 **(**無限多維向量空間**)**。平面上的畢氏定理在這些空間延申其意義。第十二單元論述平拓空間 **(flat space)** 與曲扭時空 **(curved spacetime)**；在曲扭時空裡，畢氏定理調適為更一般的形式。**Riemann** 是這個概念的設計師，他為一般相對論建立重要的基礎。一般人提及相對論，只知道愛因斯坦，卻不知有黎曼 **(Riemann)**，實在欠他一個公道。這個單元後附一個花邊：地圖的誤導。用麥卡托投影繪製的平面地圖，高緯度地區面積的膨脹現象許多人不察，會以為格陵蘭比美國大。

第十三單元是相對論的序奏。**Eli Maor** 從渡河小艇談起，續以「以太」假設的興衰

及相對論的萌芽。第十四單元較深入探討相對論，曲扭時空不再侷限為幾何概念，而是可列式的代數內容。時空距離公式：

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2}$$

中 c 是光速，可見時間影響距離最大；這個公式也以看到畢氏定理的影子。這個單元後續一個花邊：與畢氏定理相關的四個謎題，它們有趣但不難。第十五單元提出一個前瞻的問題：我們所認知的定理放諸寰宇而皆準嗎？若有地球以外的文明，是否能藉數學與之溝通？後續第十六單元是對數學本質內涵的反思，作為本書的總結。數學做為理論架構，固然有其抽象玄思的本質；做為工具實體，則亦有流行實際的內涵。數學各支系裡，畢氏定理的形式都扮演重要份量的角色，是否顯示它在主宰實體世界？作者要讀者考量決定。**Eli Maor** 以一篇到畢達哥拉斯的故鄉 **Samos** 島的訪故之旅謝幕。他提及有一本導覽手冊把畢氏定理中的直角三角型誤植為等腰三角形，數學做為商品是如此不堪，令人感慨！

二、評論

有人，包括本書作者 **Eli Maor**，傾向於把數學與音樂、繪畫等藝術相提並論。歷史上音樂與數學、繪畫與數學曾有密切的關聯，所以，這是很自然理的事情。但與音樂、繪畫相較，數學顯然是不討喜的。音樂、繪畫能直接透過感官浸入而感受欣領。但是，數學則需透過思維析辨的工夫，才能認知內涵，再經過組織這些內涵，才能形成架構，最後，還得有器識這個架構的能力，才可能欣賞到數學之美。即使做為必修的重要課程，許多學生對數學仍採應付的態度，遑論一般人；以數學作為消遣讀物，可以說少之又少。所以，寫數學普及書籍是件不容易、不討好的工作。即使大環境是如此不利，仍有許多人不計成敗得失，抱著傳道的熱忱，投身於此。他/她們努力於軟化數學的形象，企圖讓它變得易於親近。從本書的內容，我們可以感受到這種熱忱和努力。

不用瞎掰而能言之有物，要把畢氏定理這樣狹窄的話題寫成一本書，作者若無廣博的知識是辦不到的。本書對於與畢氏定理有關的事，都有所論列；包括費瑪最後定理、曲線求長的積分公式、向量空間、**Hilbert** 空間、常見的座標系及其相對應的距離公式、黎曼空間、線座標、直拓空間和曲扭時空。他利用簡單易懂的模型解釋相對運動，進而引入相對論。雖然這些話題看起來鬆散，但經過 **Eli Maor** 精心巧妙的安排架構，呈現出一個有系統的結果。整本書也複述數學發展史的輪廓：人類的工具需求、好奇探索和智慧能力共同形成這個場景。它點出人類智慧能力是無限的，總能在山窮水盡疑無路時，帶領我們走出柳暗花明又一村。此外，本書提到一些濫用和誤用數學的事例，也彰顯社會一般數學水準，還有很大的提升空間。**Eli Maor** 一方面鼓勵我們要對智慧有信心，另一方面也督促我們改善現況，邁向更好的境界。

電腦普及產生後遺症之一，是耐性逐漸從人性疏離，需要深沉思考、縝密推理的活動，已經對許多人失去吸引力，而不幸的這正是數學的特色。做為數學普及書籍，能吸引一般讀者應是首要的考量，盡量稀釋數學色彩，避免冗長的推理或演算，是較佳的選

擇。但是，這樣把數學的本質丟到一邊，寫作數學書籍是很困難。**Eli Maor** 有一個高明的處理：把一些論理過程放置在附錄，給有興趣的讀者參考；各單元還有 **Notes and sources**，留給讀者進一步查閱的線索。但是，在本文裡還是保留有一些冗長的數式運算，例如頁 **78~90**，**129~133**。在序言裡，**Eli Maor** 設定本書的讀者為：對數學史有興趣，具有高中程度的代數和幾何，以及零散 **(occasional smattering)** 的微積分知識。但檢視內容，許多部份都超過這樣的背景要求，至少完整的初等微積分是不可少的。像極座標中曲線求長，**Maclaurin** 級數，甚至實變函數的範數 **(norm)** 都曾出場。第十單元的直線座標更屬數學專業。若要了解 **Notes and sources** 及附錄，則還要整數論，偏微分等等。這是一般人常會犯的毛病：把專業常識當作一般人的常識。這種毛病，在專家寫普及讀物時最容易出現。

Eli Maor 在序言提到畢氏定理之所以能得普遍的青睞，部份原因是由於它的證法多元。**Loomis** 在 **1927** 年出版的 ***The Pythagorean Proposition*** 裡就蒐集了 **371** 個，而此後還在繼續增加。證明方法多，顯示這個定理內涵的多元面向。但這些內涵若止於自我，則至多只能成為孤芳，讓狹窄的數學圈自賞。所以，強調證明方法很多，並不能增加畢氏定理對數學圈外的吸引力。本書的內容顯示：畢氏定理之所以能得普遍的青睞，更重要的原因是從它延拓出來無限寬廣的場景，許多重要理論的基本原理都有它的身影，許多重要公式都是它的化身，還有，在許多領域的經營，它是不能割捨的角色。這一個功能，就足夠給本書一個肯定的價值。

附記：本書第 **81** 頁有一個小筆誤：**Notes and Sources 3** 的 $\sqrt{\dfrac{\sin^2\theta}{2}}$ 應是 $\dfrac{\sqrt{\sin^2\theta}}{2}$。

優秀數學普及作品指標

評價方式：指標以五顆星☆☆☆☆☆為最高品質。

1. 知識的實質內容
- **(1)** 認識論面向：☆☆☆☆
- **(2)** 歷史或演化面向：☆☆☆
- **(3)** 哲學面向：☆☆☆
- **(4)** 教育改革面向：☆☆☆

2. 形式或表達：
- **(1)** 創新手法；☆☆☆
- **(2)** 數學知識的洞察力：☆☆☆☆
- **(3)** 忠實可靠的參考文獻：☆☆☆☆
- **(4)** 敘事的趣味性、可及性與一慣性：☆☆☆

3. 內容與形式如何平衡：
- **(1)** 青少年層次：☆☆☆☆
- **(2)** 一般社會大眾：☆☆☆

4. 摘錄本書精彩片段

沒有證據不能證明沒有 (the absence of evidence is not evidence of absence)(p. 14)。

每本數學史書籍，你都可以看到一張聖老的照片，嘴邊蓄著短鬚，兩眼閃著慧光。但這位英挺的賢老是誰？真相是：我們不知道。畢達哥拉斯是歷史上最神秘的人物之一。他的事蹟都是他身後超過百年的歷史家所寫的，我們所聽聞關於他的記載，恐怕也是傳說多於事實。所以，你所閱聽關於他，或這位英挺的賢老的傳說，最好加一把鹽。(p.16)

方程式所呈現的美，比其與實驗之契合度更重要。(p. 28)

1. 為節省影印成本，本通訊將減少紙版的的發行，請讀者盡量改訂 PDF 電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail 至 suhui_yu@yahoo.com.tw
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請 e-mail 至 suhui_yu@yahoo.com.tw
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：http://math.ntnu.edu.tw/ ~ horng/letter/hpmletter.htm
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本：陳昭蓉 (東京 Boston Consulting Group) 、李佳嬅（東京大學）
德國：張復凱（Mainz 大學）
基隆市：許文璋（南榮國中）
台北市：英家銘（台北醫學大學）楊淑芬（松山高中）杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中）蘇俊鴻（北一女中）陳啟文（中山女高）蘇惠玉（西松高中）蕭文俊（中崙高中）郭慶章（建國中學）李秀卿（景美女中）王錫熙（三民國中）謝佩珍、葉和文（百齡高中）彭良禎（師大附中）郭守德（大安高工）張瑄芳（永春高中）張美玲（景興國中）文宏元（金歐女中）林裕意（開平中學）林壽福、吳如皓 (興雅國中) 傅聖國（健康國小）李素幸（雙園國中）程麗娟（民生國中）林美杏（中正國中）朱賡忠（建成國中）
新北市：顏志成（新莊高中） 陳鳳珠（中正國中）黃清揚（福和國中）董芳成（海山高中）孫梅茵（海山高工）周宗奎（清水中學）莊嘉玲（林口高中）王鼎勳、吳建任（樹林中學）陳玉芬（明德高中）羅春暉 (二重國小) 賴素貞（瑞芳高工）楊淑玲（義學國中）林建宏 （丹鳳國中）莊耀仁（溪崑國中）、李建勳（海山國中）
宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中）吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）林宜靜（羅東高中）
桃園縣：許雪珍、葉吉海（陽明高中）王文珮（青溪國中） 陳威南（平鎮中學）洪宜亭、郭志輝（內壢高中） 鐘啟哲（武漢國中）徐梅芳（新坡國中） 程和欽 (大園國際高中)、鍾秀瓏（東安國中）陳春廷（楊光國民中小學）王瑜君（桃園國中）
新竹市：李俊坤（新竹高中）、洪正川、林典蔚（新竹高商）
新竹縣：陳夢綺、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）
苗栗縣：廖淑芳 (照南國中)
台中市：阮錫琦（西苑高中）、劉雅茵（台中二中）、林芳羽（大里高中）、洪秀敏（豐原高中）、李傑霖、賴信志、陳姿研（台中女中）、莊佳維（成功國中）
南投縣：洪誌陽（普台高中）
嘉義市：謝三寶（嘉義高工）郭夢瑤（嘉義高中）
台南市：林倉億（台南一中）黃哲男、洪士薰、廖婉雅（台南女中）劉天祥、邱靜如（台南二中）張靖宜（後甲國中）李奕瑩（建興國中）、李建宗（北門高工）林旻志（歸仁國中）
高雄市：廖惠儀（大仁國中）歐士福（前金國中）林義強（高雄女中）
屏東縣：陳冠良（枋寮高中）楊瓊茹（屏東高中）黃俊才（中正國中）
澎湖縣：何嘉祥 林玉芬（馬公高中）
金門：楊玉星（金城中學）馬祖：王連發（馬祖高中）

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。懇請各位老師惠賜高見！

歐幾里得筆下的尺規作圖：以過 P 點作圓外、橢圓外的切線為例

陳玉芬
新北市明德高中

一、前言

有關如何從橢圓外一點作它的切線，並未被納入中學數學課程。不過，從圓錐曲線整體結構的觀點來看，此一問題與其相對於圓的情況，可以進行相當有趣的連結。因此，在本文中，我打算簡要探討此一主題。

首先，我將引述歐幾里得如何在他的《幾何原本》脈絡中，解決有關圓的情況。然後，再設法將此一作圖「類比」到橢圓的情況。希望我們所提供的論述，多少有助於圓錐曲線之切線的相關結構的更全面或系統的理解。

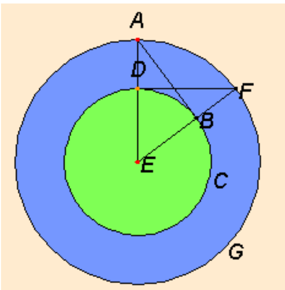
二、P 為圓 O 外一點，作 P 點到圓 O 的切線

針對圓的例子，我們先引述歐幾里得的尺規作圖，再對比今日教科書所提供的作圖方法。

・在《幾何原本》中，原作圖方式如下：

1. 取已知圓的圓心為 **E** 點。[1]	**III.1**
2. 連接 $\overline{AE}$	公設 **1**
3. 以 **E** 為圓心，$\overline{AE}$ 為半徑，作同心圓 **AFG**	公設 **3**
4. 過 **D** 點作 $\overline{DF} \perp \overline{AE}$	**I.11**
5. 連接 $\overline{EF}$ 、$\overline{AB}$	公設 **1**
6. $\overline{AB}$ 即為所求	

命題 **I. 11**：由已知直線上一點作一直線和已知直線成直角



證明：首先，利用第三卷命題 **1**，找到已知圓的圓心 **E**，接著，使用 $\Delta ABE \cong \Delta FDE$ ，則

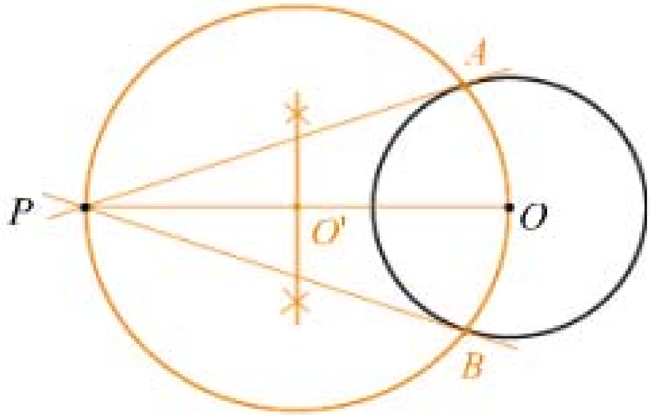
[1] 在現今教科書中，通常都會給圓心，但在原本中，圓心需先自行求出。

可得到$\overline{AB} \perp \overline{EF}$，因為$\overline{EB}$為半徑，根據 **III.16**[2]得$\overline{AB}$為圓 **E** 的切線

・以現今教科書上的作圖法為例

1.	連接$\overline{OP}$	公設 **1**
2.	作$\overline{OP}$中點O'，使得$\overline{O'P} = \overline{O'O}$	**I.10**
3.	以O'為圓心，$\overline{O'P}$為半徑，作圓O'且交圓 **O** 於 **A**、**B** 二點	公設 **3**
4.	連接$\overline{PA}$、$\overline{PB}$	公設 **1**
5.	$\overline{AB}$、$\overline{AC}$即為過 **A** 點到圓 **E** 上的二條切線	

公設 **1**：由任意一點到任意一點可作直線
公設 **3**：以任意點為圓心及任意長為半徑，可以畫圓
命題 **10**：二等分已知線段



在此作圖方法中，所有的作圖程序皆為非常基礎的觀念（只運用到公設 **1**、**3** 及第一卷的命題 **10**）

但此法的證明主要是利用「直徑上所對應的圓周角為直角」的性質，而這性質歐幾里得卻是放在命題 **III. 31**，又此性質的證明，是要運用到命題 **I. 31**：**在任意三角形中，任一外角等於內對角和，且三角形的三個內角和等於二直角。**

所以，依歐幾里得的推理方式，且他的作圖法（如前頁）也是放在命題 **III. 17**，故理論上，他應該是也可以這樣作圖的，因為使用到的證明性質亦未有所衝突，只能說，也許在當時，這位大師尚未想到此種更簡易的方式吧！

二、P 為橢圓 O 外一點，作 P 點到橢圓 O 的切線

[2] III.16 內容：由圓的直徑的端點所作直線和直徑成直角，則直線切於圓。

在《幾何原本》中並未找到過 **P** 點作橢圓外的切線，因此，我們只能「模擬」在當下，歐幾里得是否也是如此操作：

1. 假設已找到已知橢圓（如下圖）	
2. 以 F_2 為圓心，$\overline{EF}$ **(**即長軸 **2a)**為半徑畫圓 F_2	公設 **3**
3. 以 **P** 為圓心，$\overline{PF_1}$ 為半徑畫圓 **P** 並交圓 F_2 於 **A,B** 二點	公設 **3**
4. 連接 $\overline{AF_1}$ 、$\overline{BF_1}$	公設 **1**
5. 作 $\overline{AF_1}$ 中點 **G**，使得 $\overline{GA}=\overline{GF_1}$；作 $\overline{BF_1}$ 中點 **H**，使得 $\overline{HB}=\overline{HF_1}$	**I.10**
6. 連接 $\overline{PG}$ 、$\overline{PH}$ 並延長交於橢圓上的 **C**、**D** 二點	公設 **1**
7. $\overline{PC}$ 、$\overline{PD}$ 即為橢圓上的二切線	

簡要證明：

1. 因為 $\overline{PF_1} = \overline{PA}$（作圖步驟 **3**），所以 $\Delta PF_1G \cong \Delta PAG$（**SSS** 全等性質　**I.8**）

2. 得 $\angle PGA = \angle PGF_1 \implies \angle AGC = \angle F_1GC$

3. $\Delta AGC \cong \Delta F_1GC$（**SAS** 全等性質　**I.4**）

4. 得 $\overline{CA} = \overline{CF_1}$

5. 假設 $\overline{AF_2}$ 交直線 **PC** 於 **C** 點，

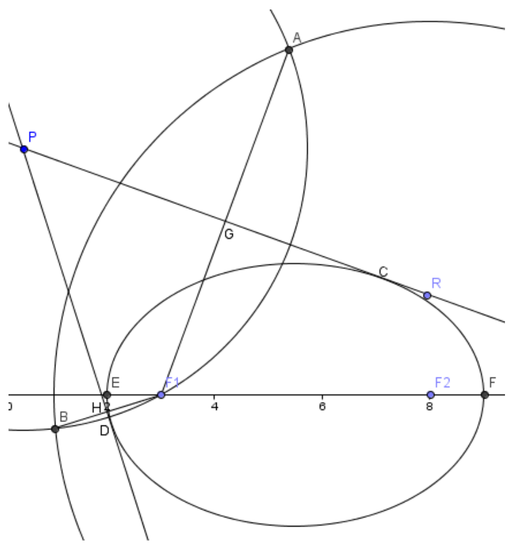
因為 $\overline{CF_1}+\overline{CF_2}=\overline{CA}+\overline{CF_2}=\overline{AF_2}=2a$（長軸長）

所以根據橢圓定義，**C** 點在橢圓上。

6. 又，假設直線 **PC** 與橢圓不只相交一點 **C,** 並設另一交點為 **R, R**$\neq C$

則 $2a=\overline{RF_1}+\overline{RF_2}=\overline{RA}+\overline{RF_2}>\overline{AF_2}$，矛盾。即直線 **PC** 與橢圓只有一個交點 **C**，

故直線 **PC** 為橢圓之切線。



Dandelin Spheres 證明圓錐截痕的焦點性質

蘇惠玉
台北市立西松高中

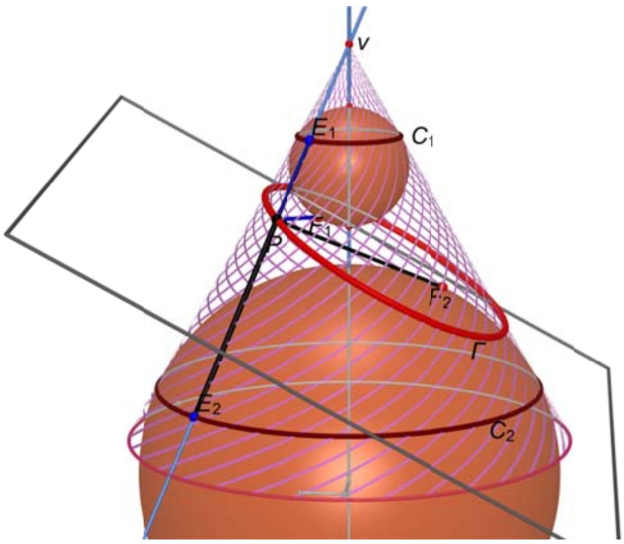
目前實施的 **99** 課綱高中數學中，弱化了圓錐曲線的單元，所謂的「圓錐截痕」不再是必須教授的單元。各版本課本或數學教師在教授時也僅是簡單的陳述平面與圓錐的截痕何時為圓、橢圓、拋物線或雙曲線，基本上與課本採用的焦點定義方式無法連結，學生只是被動地接受老師所說的與模型所看到的曲線名稱而已。不過，藉由 **Dandelin** 球面的想法，我們可將圓錐截痕與焦點的定義方式連結，以一種較為簡潔的形式，證明阿波羅尼斯在《錐線論》中所陳述與證明的性質。

所謂 **Dandelin** 球面為比利時的數學家與軍事工程師 **G. E. Dandelin(1794-1847)**在一篇論文中所提出的概念，再加上另一位比利時天文學與數學家 **A. Quetelet** 的貢獻。在論文中，**Dandelin** 利用與圓錐及平面相切的球，可以證明截痕的焦點性質。下面分別在橢圓、雙曲線與拋物線的截痕中，利用 **Dandelin** 球面來證明：

(1) 橢圓

平面 **E** 與圓錐截出一個橢圓 Γ，在圓錐的內部，**E** 的上、下方各塞一個球，使得這兩個球 S_1, S_2 分別與平面 **E** 及圓錐相切，假設 S_1 與平面 **E** 相切於 F_1， S_2 與平面 **E** 相切於 F_2，S_1 與圓錐相切得出一圓 C_1， S_2 與圓錐相切得出一圓 C_2。**P** 為 Γ 上任一點，連 $\overline{PF_1}$ 、$\overline{PF_2}$ 。

若過 **P** 的一條母線分別與圓 C_1 與 C_2 相切於 E_1 與 E_2 兩點，



因為 $\overline{PF_1}$ 與 $\overline{PE_1}$ 為球 S_1 的切線段長，所以 $\overline{PF_1}=\overline{PE_1}$；

而 $\overline{PF_2}$ 與 $\overline{PE_2}$ 為球 S_2 的切線段長，所以 $\overline{PF_2}=\overline{PE_2}$ 。

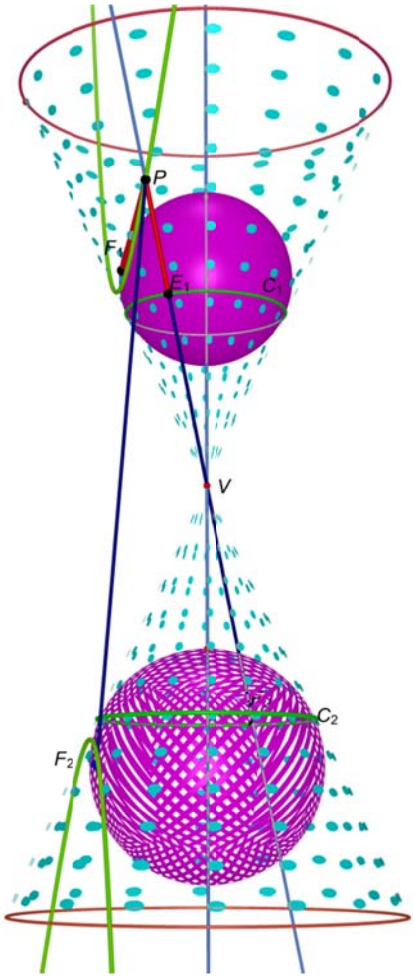
因此 $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=\overline{PE_1}+\overline{PE_2}=\overline{E_1E_2}$

而 E_1E_2 為兩球 S_1、S_2 間的公切線段長，為一定值，與 **P** 無關。也就是說，橢圓上任一點 **P**，到兩固定點 F_1, F_2 的距離和為一定值，並且此橢圓截痕的焦點為這兩個球面與平

面的切點。

(2) 雙曲線

平面 **E** 與圓錐截出雙曲線Γ，在圓錐的上下部份各塞一個球，使得這兩個球 S_1, S_2 分別與平面 **E** 及圓錐相切，假設 S_1 與平面 **E** 相切於 F_1， S_2 與平面 **E** 相切於 F_2，S_1 與圓錐相切得出一圓 C_1， S_2 與圓錐相切得出一圓 C_2。**P** 為Γ上任一點，連 $\overline{PF_1}$ 、$\overline{PF_2}$ 。



若過 **P** 的一條母線分別與圓 C_1 與 C_2 相切於 E_1 與 E_2 兩點，

因為 $\overline{PF_1}$ 與 $\overline{PE_1}$ 為球 S_1 的切線段長，

所以 $\overline{PF_1} = \overline{PE_1}$ ；

而 $\overline{PF_2}$ 與 $\overline{PE_2}$ 為球 S_2 的切線段長，

所以 $\overline{PF_2} = \overline{PE_2}$ 。

因此 $|\ \overline{PF_1} - \overline{PF_2}\ |$

$= |\ \overline{PE_1} - \overline{PE_2}\ | = \overline{E_1E_2}$

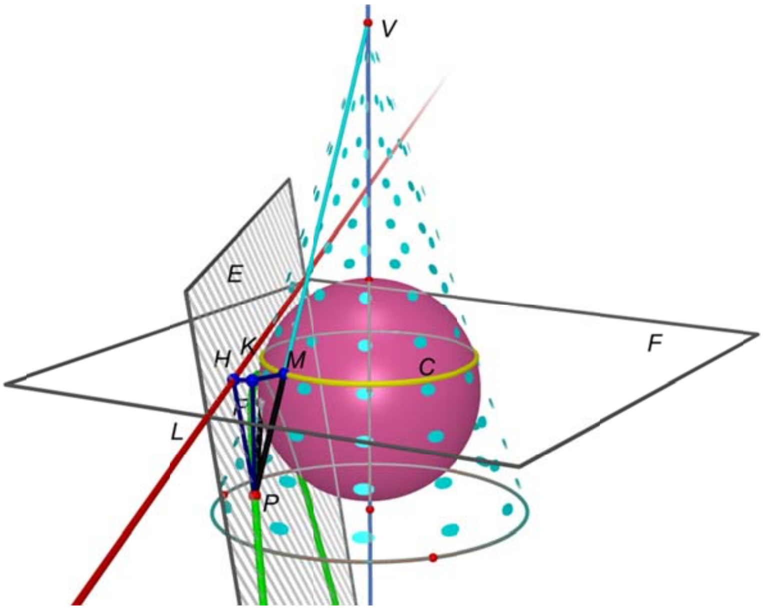
而 E_1E_2 為兩球 S_1、S_2 間的公切線段長，為一定值，與 **P** 無關。也就是說，雙曲線上任一點 **P**，到兩固定點 F_1, F_2 的距離差為一定值，並且此雙曲線截痕的焦點為這兩個球面與平面的切點。

(3) 拋物線

平面 **E** 與圓錐截出一拋物線Γ（平面 **E** 與拋物線的一條母線平行），我們可以在圓錐內塞一個球，使得這個球 **S** 分別與平面 **E** 及圓錐相切，假設 **S** 與平面 **E** 相切於 **F**，**S** 與圓錐相切得出一圓 **C**，圓 **C** 所在的平面為 **E’**，**E** 與 **E’**的交線為 **L**。設 **P** 為Γ上任一點，連 $\overline{PF}$ 。

過 **P** 作 **L** 的垂線，垂足為 **H**，又 **P** 點在平面 **E’**的垂足為 **K**，過 **P** 的一條母線與圓 **C** 交於 **M** 點，

因為$\overline{PF}$與$\overline{PM}$為球 **S** 的切線段長，所以



$\overline{PF} = \overline{PM}$；

若此圓錐的軸與母線的夾角為α，

在△**PKH** 與△**PKM** 中，

∠**PKH**＝∠**PKM**＝$\mathbf{90^0}$，

∠**KPH**＝∠**KPM**＝α，

$\overline{PK} = \overline{PK}$

所以△**PKH**≅△**PKM**，可得

$\overline{PH} = \overline{PM}$

故$\overline{PF} = \overline{PH}$。

也就是說，**E** 與 **E'**的交線 **L** 為此拋物線截痕的準線，球面 **S** 與平面的切點 **F** 為此拋物線的焦點，那麼$\overline{PH}$為拋物線上一點 **P** 到準線 **L** 的距離，等於 **P** 點到焦點 **F** 的距離。

參考文獻：

磯田正美、**M. G. Bartolini Bussi** 等編著（**2010**），《曲線の事典—性質、歷史、作圖法》，東京：共立出版株式會社。

Lui, K.W. (2003), ***Study of Conic Sections and Prime Numbers in China: Cultural Influence on The Development, Application and Transmission of Mathematical Ideas*****, The University of Hong Kong.**

網站：**http://mathforum.org/mathimages/index.php/Dandelin_Spheres_Theory**