HPM通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系退休教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）
助理編輯：黃俊瑋（台灣師大數學所研究生）
編輯小組：蘇意雯（台北市立教育大學）蘇俊鴻（北一女中）
黃清揚（福和國中）葉吉海（陽明高中）
陳彥宏（成功高中）陳啟文（中山女高）
王文珮（青溪國中）黃哲男（台南女中）
英家銘（台北醫學大學）謝佳叡（台灣師大數學系）
創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng

第十七卷 第一期 目錄（2014年1月）

算幾不等式的證明(II)與（III）

陳敏晧
國立蘭陽女中

算幾不等式的證明(II)

關鍵字**:** 算幾不等式的證明、代換法、微分法。

已知：$a_1, a_2, \ldots a_n$ 為正數或零。

求證：$\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$ ，「＝」成立時若且唯若，$a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ 。**(**其中 $\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$ 稱為算術平均數，$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$ 稱為幾何平均數**)**。

除了常見的倒回的證明外（先證 $n = 2 = 2^1$ 再推論 $n = 4 = 2^2$ ，然後反推 $n = 3$ ，接著證明 $n = 8 = 2^3$ ，然後反推 $n = 5,6,7$ 等），在此處筆者再介紹兩種直接證明方法。

第一種代換法：

$n = 2$ ，證明 $\dfrac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}$ **(**不再贅述**)**

$n = 3$ ，證明 $\dfrac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geq \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}$ ，可令 $a_3 = \dfrac{a_3 + \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}}{2}$ ，

利用兩數的算幾不等式性質，即

$$\frac{\dfrac{a_1 + a_2}{2} + \dfrac{a_3 + \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}}{2}}{2} \geq \sqrt{\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)\left(\frac{a_3 + \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}}{2}\right)} \geq \sqrt{\sqrt{a_1 a_2}\sqrt{a_3 \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}}} = \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}$$

左右兩式整理得$\frac{a_1+a_2+a_3}{2}+\frac{\sqrt[3]{a_1a_2a_3}}{2}\ge 2\sqrt[3]{a_1a_2a_3}$，移項得$\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\ge\sqrt[3]{a_1a_2a_3}$，得證，等號成立的地方就請讀者自行檢驗。

這個神乎其技的證明方式令人眼花瞭亂，姑且稱之為「代換法」，所以，我們再試一次，

$n=4$，證明$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\ge\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}$，利用兩數及三數的算幾不等式性質，

$$\frac{\frac{a_1+a_2+a_3}{3}+\frac{a_4+\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}+\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}}{3}}{2}\ge\sqrt{\left(\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\right)\left(\frac{a_4+\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}+\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}}{3}\right)}$$

$$\ge\sqrt{\sqrt[3]{a_1a_2a_3}\sqrt[3]{a_4\left(\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}\right)^2}}=\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}\ ,$$

左右兩式整理得$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+2\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}}{3}\ge 2\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}$，移項得

$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\ge\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}$，有了這兩次的經驗後，最後我們根據數學歸納法將$n=k$擴及到$n=k+1$，

$$\frac{\frac{a_1+\ldots+a_k}{k}+\frac{a_{k+1}+\sqrt[k+1]{a_1a_2\ldots a_{k+1}}+\ldots+\sqrt[k+1]{a_1a_2\ldots a_{k+1}}}{k}}{2}\ge\sqrt{\left(\frac{a_1+`\ldots+a_k}{k}\right)\left(\frac{a_{k+1}+\sqrt[k+1]{a_1a_2\ldots a_{k+1}}+\ldots+\sqrt[k+1]{a_1a_2\ldots a_{k+1}}}{k}\right)}$$

$$\ge\sqrt{\sqrt[k]{a_1a_2\ldots a_k}\sqrt[k]{a_{k+1}\left(\sqrt[k+1]{a_1a_2\ldots.a_{k+1}}\right)^{k-1}}}=\sqrt{a_1^{\frac{1}{k}(1+\frac{k-1}{k+1})}a_2^{\frac{1}{k}(1+\frac{k-1}{k+1})}\ldots a_k^{\frac{1}{k}(1+\frac{k-1}{k+1})}a_{k+1}^{\frac{1}{k}(1+\frac{k-1}{k+1})}}$$

$$=\sqrt[k+1]{a_1a_2\ldots a_ka_{k+1}}\ ,$$

左右兩式整理得$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{k+1}+(k-1)\sqrt[k+1]{a_1a_2\ldots a_{k+1}}}{k}\ge 2\sqrt[k+1]{a_1a_2\ldots a_{k+1}}$，移項得

$a_1+a_2+\ldots+a_{k+1}\ge(k+1)\sqrt[k+1]{a_1a_2\ldots a_{k+1}}$，最後，$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{k+1}}{k+1}\ge\sqrt[k+1]{a_1a_2\ldots a_{k+1}}$，得證。這個證明巧妙地使用代換方法(**substitution method**)，十分令人激賞。

第二種微分法：

我們可以使用微分方法，首先考慮函數

$f(x)=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n+x}{n+1}-(a_1a_2\ldots a_nx)^{\frac{1}{n+1}},x>0$，其中$a_1,a_2,\ldots,a_n$為正數或零，算幾不等式的等價證明為$\forall x>0,f(x)\ge 0$，因此，先將函數$f(x)$微分，得

$f'(x)=\frac{1}{n+1}-(a_1a_2\ldots a_n)^{\frac{1}{n+1}}\frac{1}{n+1}x^{\frac{1}{n+1}-1}$，考慮$f'(t)=0$，得$1=(a_1a_2\ldots a_n)^{\frac{1}{n+1}}t^{\frac{-n}{n+1}}$，即

$t^{\frac{n}{n+1}}=\left(a_1a_2\ldots a_n\right)^{\frac{1}{n+1}}$，最後得 $t=\left(a_1a_2..a_n\right)^{\frac{1}{n}}$，此為 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 的幾何平均數。再將 $f'(x)$ 微分，得 $f''(x)=-\left(a_1a_2\ldots a_n\right)^{\frac{1}{n+1}}\dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{-n}{n+1}\right)x^{\frac{-n}{n+1}-1}=\left(a_1a_2\ldots a_n\right)^{\frac{1}{n+1}}\dfrac{n}{(n+1)^2}x^{\frac{-2n-1}{n+1}}>0,\forall x>0$，將 $x=t$ 代入，則 $f''(t)>0$，可見 $f(t)$ 為相對極小值，

$$f(t)=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n+\left(a_1a_2\ldots a_n\right)^{\frac{1}{n}}}{n+1}-\left[a_1a_2\ldots a_n(a_1a_2\ldots a_n)^{\frac{1}{n}}\right]^{\frac{1}{n+1}}$$

$$=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n+1}+\frac{(a_1a_2\ldots a_n)^{\frac{1}{n}}}{n+1}-\left[\left(a_1a_2\ldots a_n\right)^{1+\frac{1}{n}}\right]^{\frac{1}{n+1}}$$

$$=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n+1}+\frac{(a_1a_2\ldots a_n)^{\frac{1}{n}}}{n+1}-\left(a_1a_2\ldots a_n\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{n}{n+1}\left[\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}-\left(a_1a_2\ldots a_n\right)^{\frac{1}{n}}\right]\geq 0$$

這個式子成立是根據數學歸納法前 **n** 的條件，且等號成立於 $a_1=a_2=\ldots=a_n$，而 $t=\left(a_1a_2..a_n\right)^{\frac{1}{n}}=a_1=a_2=\ldots=a_n$，因此，除非 $a_1=a_2=\ldots=a_n=x$，否則 $f(x)>0$，即 $\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n+x}{n+1}>\left(a_1a_2\ldots a_nx\right)^{\frac{1}{n+1}}$，得證。

最後，練習一下國立台中一中 **99** 年數學資賦優異鑑定試題第九題：

已知 $-1\leq x\leq\dfrac{3}{2}$，則當 $x=k$ 時，$f(x)=(x+1)^3(3-2x)^2$ 有最大值 **m**，試求 (k,m) 數對？

參考解法：利用五數的算幾不等式，

$$\frac{\frac{4}{3}(x+1)+\frac{4}{3}(x+1)+\frac{4}{3}(x+1)+(3-2x)+(3-2x)}{5}\geq\sqrt[5]{\left[\frac{4}{3}(x+1)\right]^3(3-2x)^2}$$，整理得

$2^5\leq\dfrac{64}{27}(x+1)^3(3-2x)^2$，移項得 $f(x)=(x+1)^3(3-2x)^2\leq\dfrac{27}{2}$，所以，$m=\dfrac{27}{2}$，等號成立時，$\dfrac{4}{3}(x+1)=3-2x,\therefore x=k=\dfrac{1}{2}$，得 $(k,m)=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{27}{2}\right)$。

算幾不等式的證明(III)

關鍵字: 算幾不等式的證明、調整法、波里亞的指數法。

已知：$a_1, a_2, ...a_n$ 為正數或零。

求證：$\dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$，「$=$ 」成立時若且唯若，$a_1 = a_2 = ... = a_n$。(其中 $\dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$ 稱為算術平均數 **AM**，$\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$ 稱為幾何平均數 **GM**)。

在此篇文章中，筆者再介紹兩種證明算幾不等式的方法，第一個稱為「調整法」，第二個是波里亞(**George Pólya,1887 – 1985**) 的指數證明方法。

第一個調整法：

引入證明前，我們先介紹一個必備的定理：

已知：a_1, a_n 為相異兩正數，其中 $a_1 > a_n$，且 **M** 為兩數的算術平均數。

求證：$M(a_1 + a_n - M) > a_1 a_n$。

證明：因為 $M(a_1 + a_n - M) - a_1 a_n = -(M^2 - a_1 M - a_n M + a_1 a_n)$

$= -(M - a_1)(M - a_n) = (a_1 - M)(M - a_n) > 0$，

所以，$M(a_1 + a_n - M) > a_1 a_n$，得證。

現在，我們考慮 $a_1, a_2, ...a_n$ 等 **n** 個非負實數，並且將它們由大到小排列，令它們的算術平均數為 **M**。如果大家都是 **M**，則 $AM \ge GM$ 顯然成立。否則，將最大的 a_1 與最小的 a_n 這兩數分別以 $M, (a_1 + a_n - M)$ 取代。取代後，算術平均數不變，但是，幾何平均數變大 (由二次函數的行為可知或根據上述的定理證明可知)。繼續重複此步驟，有限次之後必定每個數字都是 **M**。由於過程中 **GM** 一直增大，而最後的 $AM = GM$，所以，原來的 **AM** 必定大於或等於 **GM**，證明完畢。

以上證明稱為「調整法」的原因，是由於我們一個一個調整這些數，過程中的某個量保持單調性，這是不等式證明的常用手法。

第二個波里亞的指數法：

首先考慮函數 $f(x) = e^{x-1} - x$，其中 x 為任意實數，其導函數為 $f'(x) = e^{x-1} - 1$，二階導函數為 $f''(x) = e^{x-1}$，同時 $f(1) = 0, f'(1) = 0$，而 $f''(x) > 0, \forall x \in R$，因此，$f(x)$ 為嚴格遞增函數(凹口向上)，而且在 $x = 1$ 時，有唯一的最小值，所以，對於 x 為任意實數時，$e^{x-1} \ge x$ 恆成立，而且在 $x = 1$ 時，「=」成立。

接著考慮 $a_1, a_2, ...a_n$ 為正數或零，如果所有的數都是零，那麼 $AM = GM$，當然算幾不等式就成立了。接著，我們可以假設它們的算術平均數為 $M > 0$，藉由將上述不等式 $x \le e^{x-1}$ 乘上 **n** 次，我們可以得到：

$$\frac{a_1}{M}\times\frac{a_2}{M}\times\ldots\times\frac{a_n}{M}\le e^{\frac{a_1}{M}-1}e^{\frac{a_2}{M}-1}\ldots e^{\frac{a_n}{M}-1}=e^{(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{M}-n)}=e^{(\frac{nM}{M}-n)}=e^0=1$$，

等號成立於 $\frac{a_1}{M}=\frac{a_2}{M}=\ldots=\frac{a_n}{M}=1$，即 $a_1=a_2=\ldots=a_n=M$。繼續運算上列不等式得

$a_1a_2\ldots a_n\le M^n$，將 $M=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$ 代入，並開 **n** 次方得 $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\ge\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$，

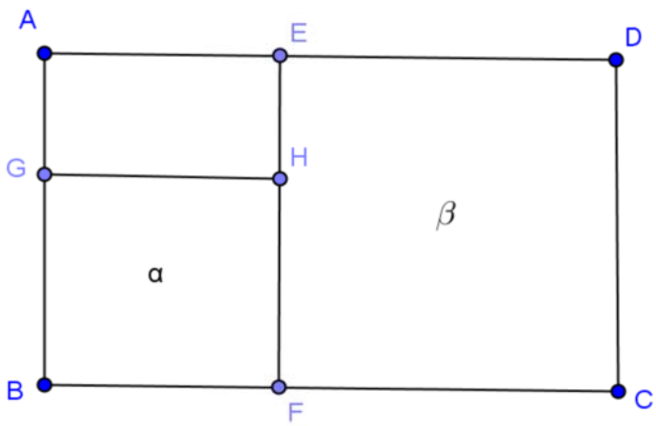
得證。

這個證明波里亞巧妙地使用函數 $f(x)=e^{x-1}-x$，藉由 $y=e^x$ 是凸函數的性質，連結上算幾不等式，可以省去許多冗長的證明，值得學習。

國立臺灣師範大學數學系許志農教授在《高中數學珍寶》曾以算幾不等式編寫過一道數學證明題：

已知：如下圖，正方形 α (邊長為 **a**)與正方形 β (邊長為 **b**)的面積和為 **1**。

求證：剛好包住正方形 α 與正方形 β 的矩形面積 $\le\frac{1+\sqrt{2}}{2}$。



證明：令矩形 $ABCD$ 的面積 $=\overline{AB}\times\overline{CD}=b(a+b)=K$，

因為正方形 α (邊長為 **a**)與正方形 β (邊長為 **b**)的面積和為 **1**，

所以，$a^2+b^2=1$，

利用算幾不等式：$\frac{(a+b)^2+(\sqrt{2}b)^2}{2}\ge\sqrt{(a+b)^2\cdot(\sqrt{2}b)^2}=\sqrt{2}b(a+b)$

（這個動作值得讀者深思），

整理得 $\frac{(a^2+b^2)+(2ab+2b^2)}{2}\ge\sqrt{2}b(a+b)$，

將 $b(a+b)=K$ 代入得 $\frac{1+2K}{2}\ge\sqrt{2}K$，

移項得 $K \le \dfrac{1}{2(\sqrt{2}-1)} = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$，得證。

附記：這個證明，除了使用算幾不等式外，也可以利用三角函數處理。

參考資料：

http://en.wikipedia.org/wiki/Inequality_of_arithmetic_and_geometric_means

許志農(2001)，《高中數學珍寶》(未出版)。

和算關流極形術探討

陳政宏
台灣師範大學數學系碩士班研究生

一、簡介

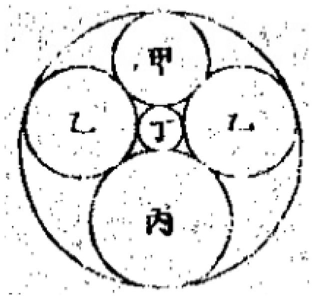
極形術是日本和算關流裡的一種幾何變換法，它的方法論特色是利用特例推通例，關流和算家多用以解決困難的幾何問題。那麼，這到底是一個什麼樣的方法呢？在本文中，筆者利用和算書千葉胤秀的《算法新書》中的一例，來說明此術。不過，首先，我們簡介千葉胤秀的生平事蹟。

二、算術師範千葉胤秀

《算法新書》的作者為和算家千葉胤秀 **(Chiba Tanehide, 1775~1849)**，他通稱雄七，號流峰，永安二年 **(1775)** 出生于奧州一關藩盤井郡流鄉 (今岩手縣花泉町清水村) 之農家，及長前往江戶，入其師長谷川寬之數學道場，系統地學習關流數學，獲「初見題免許」和「伏題免許」兩階段證書。後受聘於一關藩，任算術師範。文政十三年 **(1830)**，他出版著作《算法新書》，該書內容從算學基本常識到點竄術，乃至圓理與極形術，內容由淺入深系統論述，而且解說通俗易懂，故廣受歡迎。其門人很多，號稱三千，死後，其子孫繼續在一關教授算學，仙台周邊學算者農民居多，在胤秀影響下，一關一帶是和算最為隆盛的地區之一。[1]

三、極形術一例

我們現在以《算法新書》極形術第 **32** 問為例，說明極形術如何解題：



今有圓內如圖容五圓，外徑六寸，甲徑二寸，問丙徑幾何？
答曰：丙徑三寸
術曰：置外徑內減甲徑餘乘外徑以外甲徑和除之得丙徑合問[2]

其術曰若以現在的符號表示，即$丙=\dfrac{(外-甲)\times外}{外+甲}$，因此，

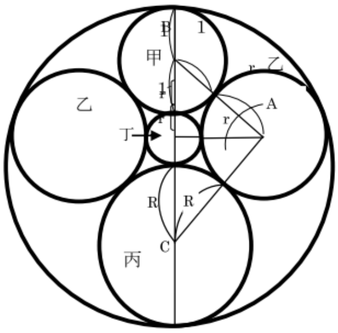
$丙徑=\dfrac{(6-2)\times 6}{6+2}=3$。我們將在下一節提供一個現代的解法，幫助讀者初步理解極形術。

---

[1] 轉引自徐澤林《和算選粹》頁 43。
[2] 引自東北大學電子資料庫。http://dbr.library.tohoku.ac.jp/infolib/meta_pub/G9200001CROSS

四、此題的現代解

2011 年，日本一關市博物館所舉辦的「和算的挑戰」徵答活動高中組，即採用了此題，並提供了一個解答例。[3]



已知外圓徑$=6$，甲圓的半徑$=1$，假設乙圓的半徑$=r$、丙圓的半徑$=R$、丁圓的半徑$=r'$，這樣，我們有一個關係式 $2+2r'+2R=6$，所以

$$R+r'=2 \qquad \textbf{(1)}$$

再利用 **Stewart** 定理[4]，我們可以得到

$$(R+r)^2(r'+1)+2(r+1)^2=(r'+3)[(r+r')^2+2(r'+1)] \qquad \textbf{(2)}$$

把**(1)**代進**(2)**消去r'得到

$$(R+r)^2(3-R)+2(r+1)^2=(5-R)[(r+2-R)^2+2(3-R)] \qquad \textbf{(3)}$$

接著利用公式$\frac{1}{甲}+\frac{1}{丙}=\frac{1}{乙}+\frac{1}{乙}$，我們可以寫出$\frac{1}{2}+\frac{1}{2R}=\frac{2}{2r}$，所以

$$r=\frac{2R}{R+1} \qquad \textbf{(4)}$$

把**(4)**代入**(3)**，經過適當的化簡，可以得到

$$2R^4-7R^3-4R^2+11R+6=0$$

此四次方程式的解為$R=-1,\frac{3}{2},\frac{\sqrt{17}+3}{2},\frac{3-\sqrt{17}}{2}$，當中只有$\frac{3}{2}$是符合題意的，因此丙的直徑為3寸。

---

[3] 引自一關市博物館。http://www.museum.city.ichinoseki.iwate.jp/icm/

[4] Stewart 定理，是數學家 Matthew Stewart 於 1746 年提出。說明ΔABC中，$\overline{BC}=a$、$\overline{CA}=b$、$\overline{AB}=c$，D為$\overline{BC}$上一點，若$\overline{BD}=m$、$\overline{CD}=n$、$\overline{AD}=d$，則$mb^2+nc^2=a\left(d^2+mn\right)$。

五、文本極形術解法

先假設甲、乙、丙三圓一樣大的時候，如圖。這時 $2等^2=子^2$ 且 $外-等=子$，因此 $(外-等)^2=子^2=2等^2$，展開化簡得到 $-外^2+2\cdot外\cdot等+等^2=0$。

接下來，根據極形術的法則 $等=\frac{甲+丙}{2}$、$等^2=甲\cdot丙$，因此，我們可以代入得到

$$-外^2+2\cdot外\cdot\frac{甲+丙}{2}+甲\cdot丙=0$$

再經過化簡，即可得到術文給的公式：$丙=\frac{(外-甲)\times外}{外+甲}$。

依據現在的數學理論，等徑要同時滿足 $等=\frac{甲+丙}{2}$、$等^2=甲\cdot丙$，其充分必要條件為甲等於丙，但在這邊卻同時用上，可見，此術應該有許多錯誤的地方。

六、驗證

筆者嘗試驗證此公式的正確性，我們令外圓半徑為 R、甲圓半徑為 r、未知的乙圓半徑為 a、丁圓半徑為 b，所求的丙圓半徑為 x，因此，

$$2r+2b+2x=2R \qquad \textbf{(5)}$$

再根據 **Stewart** 定理及環圓關係可以列式

$$(b+r)(a+x)^2+(b+x)(a+r)^2=(2b+r+x)[(a+b)^2+(b+r)(b+x)] \qquad \textbf{(6)}$$

及

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{a} \qquad \textbf{(7)}$$

利用**(5)**及**(7)**可以得到 $b=R-r-x$、$a=\frac{2rx}{r+x}$，代入**(6)**中得到

$$(R-x)\left(\frac{3rx+x^2}{r+x}\right)^2+(R-r)\left(\frac{3rx+r^2}{r+x}\right)^2=(2R-r-x)\left[\left(\frac{Rr+Rx-r^2-x^2}{r+x}\right)^2+(R-x)(R-r)\right]$$

(8)

此式展開極為不易，因此，筆者嘗試將《算法新書》給的術文公式 $x=\dfrac{R(R-r)}{R+r}$ 代入**(8)**，驗證是否為其解。其中左式的部分，

$$R-x=R-\frac{R^2-Rr}{R+r}=\frac{2Rr}{R+r}$$

$$\left(\frac{3rx+x^2}{r+x}\right)^2=\left(\frac{3r\cdot\dfrac{R^2-Rr}{R+r}+\left(\dfrac{R^2-Rr}{R+r}\right)^2}{r+\dfrac{R^2-Rr}{R+r}}\right)^2=\left(\frac{R^4+R^3r+R^2r^2-3Rr^3}{(R+r)\left(R^2+r^2\right)}\right)^2$$

$$=\frac{R^8+2R^7r+3R^6r^2-4R^5r^3-5R^4r^4-6R^3r^5+9R^2r^6}{(R+r)^2\left(R^2+r^2\right)^2}$$

$$\left(\frac{3rx+r^2}{r+x}\right)^2=\left(\frac{3r\cdot\dfrac{R^2-Rr}{R+r}+r^2}{r+\dfrac{R^2-Rr}{R+r}}\right)^2=\left(\frac{3R^2r-2Rr+r^3}{R^2+r^2}\right)^2$$

$$=\frac{9R^4r^2-12R^3r^3+10R^2r^4-4Rr^5+r^6}{\left(R^2+r^2\right)^2}$$

因此，**(8)**中左式的部分為

$$\frac{2R^9r+13R^8r^2+12R^7r^3-22R^6r^4-12R^5r^5-4R^4r^6+12R^3r^7-2R^2r^8+2Rr^9-r^{10}}{(R+r)^3\left(R^2+r^2\right)^2}\text{。}$$

另一方面，右式的部分，

$$2R-r-x=2R-r-\frac{R^2-Rr}{R+r}=\frac{R^2+2Rr-r^2}{R+r}$$

$$\left(\frac{Rr+Rx-r^2-x^2}{r+x}\right)^2=\left(\frac{Rr+R\cdot\dfrac{R^2-Rr}{R+r}-r^2-\left(\dfrac{R^2-Rr}{R+r}\right)^2}{r+\dfrac{R^2-Rr}{R+r}}\right)^2=\frac{\left(3R^3r-R^2r^2-Rr^3-r^4\right)^2}{(R+r)^2\left(R^2+r^2\right)^2}$$

$$=\frac{9R^6r^2-6R^5r^2-5R^4r^4-4R^3r^5+3R^2r^6+2Rr^7+r^8}{(R+r)^2\left(R^2+r^2\right)^2}$$

$$R-x=R-\frac{R^2-Rr}{R+r}=\frac{2Rr}{R+r}$$

因此，**(8)**中右式的部分為

$$\frac{2R^9r+13R^8r^2+12R^7r^3-22R^6r^4-12R^5r^5-4R^4r^6+12R^3r^7-2R^2r^8+2Rr^9-r^{10}}{(R+r)^3(R^2+r^2)^2}$$ 。

而左式與右式相等，進而說明《算法新書》內給的公式應該是正確的。

七、結論

關流的極形術是一種幾何變換法。如圖中，針對兩個變量 a,b 與第三個量 x，假定 a,b 滿足 $f(x,a+b,ab)=0$， 當 a 與 b 在變動時，利用 $a=b$ 時的極限圖形來考察問題。此術在江戶時期已經被其他流派所批評，而以現代數學的觀點下去看，依然可以看到它不合理的地方，但反映出幕末和算在解決複雜圖形問題時艱苦的嘗試。無論如何，利用特例推通例的想法，也值得我們一再回味，雖然通例不見得會擁有特例的性質，但不失為一個好的思考路徑。

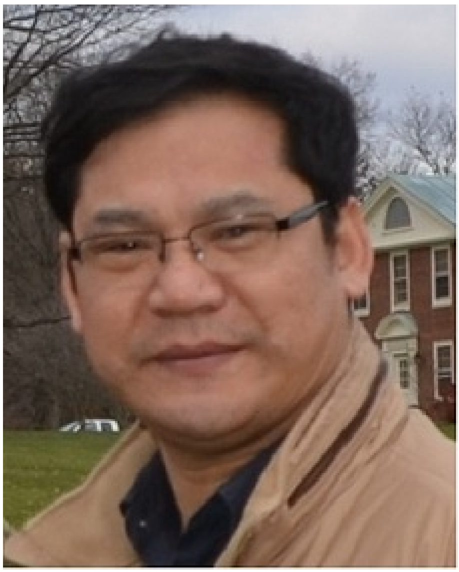
參考文獻

千葉胤秀，《算法新書》，**1830**，日本東北大學圖書館電子資料庫。
徐澤林，《和算選粹》，**2008**，北京：科學出版社。
一關市博物館 **http://www.museum.city.ichinoseki.iwate.jp/icm/**

Information 紀念徐義保教授（1965-2013）數學史工作坊

數學史作為一個學門有其自身的專業意義。有關它的應用面向之一，數學史與數學教育之連結，早已成為數學（教育）界的高度共識，國際 **HPM** 研究群的活躍就是一個最好的見證。還有，在目前方興未艾的數學文化研究與教學活動中，數學史也是不可或缺的一環。再有，許多數學普及的書寫也都訴求數學史的關懷。因此，如果數學教師在發展十二年國教的特色課程時，有意引進數學普及閱讀，那麼，數學史及其相關知識活動的經驗分享，就變得十分重要的研習項目了。

有鑑於此，我們特別舉辦此一工作坊，希望邀請數學史家、投入數學文化教學與研究的數學家、**HPM** 專家，以及實作與推廣 **HPM** 的中學數學教師，一起前來分享他們的研究心得。由於徐義保教授生前與我們台灣的 **HPM** 團隊關係十分密切，又曾投入美國東部地區 **HPM** 的教學與研究活動，因此，我們順便利用此一機會，來紀念他的英年早逝。



徐義保張貼於 **MBCC** 數學系網頁的照片

時間：**2014/1/21**
地點：台灣師範大學數學系 **M106**
主辦：左台益（台灣師大數學系教授）、蘇意雯（台北市立教育大學數學系教授）
邀請講員：洪萬生、林延輯、鄭振初、蘇意雯、蘇惠玉、蘇俊鴻、英家銘、黃俊瑋、林倉億、張復凱、陳玉芬、陳敏晧、許進發
出席者：李國偉、琅　元、林炎全、劉柏宏、蘇意雯、博佳佳、陳玉芬、王文珮、鍾秀瓏、林芳羽、陳政宏、張功翰、呂坤明、林玉芬、楊瓊茹、廖惠儀、陳彥宏、葉吉海、郭慶章、阮錫琪、王裕仁等等

・洪萬生、蘇意雯
講題：數學小說閱讀如何改變數學認知？
摘要：

講者將以任教 2013 年兩學期台大數學通識〈數學與文化：以數學小說閱讀為進路〉的學習評量為基礎，說明學生（主要是文學院和法學院）如何改變他們對數學（內容、結構與意義）的看法。

・鄭振初（香港教育學院數學系）
講題：中國勾股題的概述
摘要：

勾股題有很長的源流。算數書中便有系統的勾股題。直至清代，勾股題仍是不少學者的研究問題。本文試把中國多年來的勾股題整理。除了討論各年代出現的勾股題不同的題型外，並概述其解題過程。解勾股題的方法可以是代數形式的，也可以是圖形的。本文希望能對勾股題作一概括的描述。

・許進發（清華大學歷史研究所博士）
講題：日治時代台灣閱讀數學世界：以和算為中心
摘要：

數學研究和教學類型
（一）純數學：松村宗治
（二）和算：加藤平左衛門
（三）鄉土數學：須藤利一
（四）教學：鏡淵稔、林景元、游源清

和算文庫
（一）東北大學附屬圖書館的和算關係文庫
（二）日本學士院所藏和算資料
（三）早稻田大學附屬圖書館的小倉金之助文庫
（四）山形大學附屬圖書館的佐久間文庫〔會田安明流〕
（五）小寺裕的和算之館

和算研究的入門書和工具書

・林倉億（國立台南一中數學教師，清華大學歷史所博士班）
講題：105 年高中新課綱 －HPM 的新藍海
摘要：

預計於 105 年施行的高中新課綱，據了解將減少四分之一的必修學分，而這些學分數將轉為選修課程的學分。因此，各校各科均面臨未來必須開設多種不同選修課的挑戰，而這也正是數學史相關課程可以「攻城掠地」的最好時機。在此次的工作坊中，筆者將分享這學期於選修課中使用的教材「質數 — 千年傳統，全新感受」，除聽取與會者的建議外，更希望拋磚引玉，吸引更多高中數學老師發展數學史課程的教材，進而推廣到各校，讓更多學校的數學老師可以依據或參考這些教材來開設數學史相關的選修課程。

・林延輯 (台灣師範大學數學系)
講題：國科會高瞻計畫科學百科寫作數學科現況介紹
摘要：

國科會高瞻計畫平台下設有科學百科，邀請教授、老師及專家們就專門領域內容，以淺顯簡要的文字向大眾介紹各學科。數學科以高中課綱為範圍，以數學專業與數學史的角度來描繪數學的各種風貌。我們將以現有的文章為例來說明，並提供、討論未來的寫作方向。

・黃俊瑋（國立台灣師範大學數學系博士生）
講題：和算知識論文化中的問題與答案
摘要：

「設題」、「求術」、「探數」是和算知識活動的主要核心，本研究中，從關孝和《題術辨議之法》與《病題明致之法》兩本文本談起，探討什麼合乎和算家社群標準的「問題」與「答案－數值與演算法」，以及和算家精緻化舊有問題答案－尋求更好的術、追求更精密的數－的過程中，所偏好的知識價值。並以十八世紀末關流和最上流之間的一場數學論戰為例，說明和算家如何基於這些標準與價值，評判他人的數學研究成果，進而引發從事數學研究的動機。

・張復凱（金門高中 & 德國美因茲大學）
講題：希爾伯特的一堂數學課
摘要：

希爾伯特（**David Hilbert, 1862-1943**）在數學研究上的成就非凡，常被視為 **19** 世紀末至 **20** 世紀間最偉大的數學家。然而，即便成功地培養出許多傑出的數學家後進，相較於哥廷根（**Göttingen**）的前輩克萊因（**Felix Klein, 1849-1925**），希爾伯特對於教授數學的想法，明顯受到忽視。本研究將針對數學家外爾（**Hermann Weyl, 1885-1955**）與諾貝爾物理獎得主玻恩（**Max Born, 1882-1970**）回憶中，希爾伯特最精采的一節課 — 「數的概念與化圓為方」（***Zahlbegriff und Quadratur des Kreises***），通過上課筆記之分析，探究其間所採取數學史的手法與其他教學策略，盼能給予 **HPM** 及高等數學教育一些省思。

蘇俊鴻（台灣師範大學數學系博士，北一女教師）
講題：乾嘉學派算學學統的建立
摘要：

清中葉的漢宋之爭，本質上是儒學性質的再定位，漢學學者不僅對宋明道學性質下的儒學作出批判，更透過探溯學術流變、辨析學問觀念，修改教育內容，重塑學人形象，大規模編書、出版，祀典更革等等多樣性的學術文化活動，進行「打破道統，重建學統」的學術工程，積極開發儒學的知識內容。更重要的是，此一學術活動是將考據學的論述結構施用在經、史、子、集，及其他技藝性的知識上。在本文中，筆者打算說明乾嘉學派的阮元學圈如何有計劃地在算學上推動這些學術活動，建構起算學自秦漢以來的學術傳統與知識性質(此即「學統」的意涵)，確立算學「專門之學」的地位。因此，算學「專

門之學」乃能在乾嘉以降蔚為風氣，形成學界共識。

蘇惠玉（台北市西松高中教師，《HPM》通訊主編）
講題：**Briggs** 的《對數算術》（***Arithmetica Logarithmica***）與對數表的製作
摘要：
在高中數學課程中，對數觀念的學習與應用為相當重要的一個單元，不過，在學習的過程中，課程雖然著重在觀念的理解，與對數表的應用，卻沒有明白地告訴學生 log2，log3 等等的對數值到底是怎麼算出來的，因此，學生對此單元的學習容易因為一知半解的情況而成效不彰。本文介紹布里格斯在建造以 10 為底的對數表時所使用的幾種方法，以期能將這些方法應用在數學課堂的學習上，讓學生可了解或親自動手算算這些常用對數的值。

2013 年 7 月徐義保、洪萬生、鄒大海與郭書春在麥徹斯特聚餐

紀念徐義保教授（1965-2013）數學史工作坊議程表

時間	演講者	講題
10:00	開幕	
10:10-10:40	鄭振初（香港教育學院）	中國勾股題的概述
10:40-11:20	蘇惠玉（台北市西松高中教師，《HPM》通訊主編）	Briggs的《對數算術》（Arithmetica Logarithmica）與對數表的製作
11:20-12:00	許進發（清華大學歷史研究所博士）	日治時代台灣閱讀數學世界：以和算為中心
12:00-13:30	午餐時間（12.30-13.20：高瞻計畫成員會議）	
13:3-14:10	林延輯 (台師大數學系助理教授)	國科會高瞻計畫科學百科寫作數學科現況介紹
14:10-14:50	黃俊瑋（國立台灣師範大學數學系博士生）	和算知識論文化中的問題與答案
14:50-15:30	蘇俊鴻（台灣師大數學系博士，北一女教師）	乾嘉學派算學學統的建立
15:30-15:50	下午茶時間	
15:50-16:30	張復凱（金門高中 & 德國美因茲大學）	希爾伯特的一堂數學課
16:30-17:10	林倉億（國立台南一中數學教師，清華大學歷史所博士班）	105年高中新課綱 ─ HPM的新藍海
17:10-17:40	洪萬生（台灣師大數學系退休教授）、 蘇意雯（台北城市大學數學系）	數學小說閱讀如何改變數學認知？