HPM通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系退休教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）
助理編輯：黃俊瑋（台灣師大數學所研究生）
編輯小組：蘇意雯（台北市立教育大學）蘇俊鴻（北一女中）
黃清揚（福和國中）葉吉海（陽明高中）
陳彥宏（成功高中）陳啟文（中山女高）
王文珮（青溪國中）黃哲男（台南女中）
英家銘（台北醫學大學）謝佳叡（台灣師大數學系）
創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng

第十七卷 第十一期 目錄（2014年11月）

牛頓插值多項式(下)

蘇俊鴻
北一女中

一樣從這個問題開始：

給定平面上三點 $A(1,7)$，$B(2,6)$，$C(3,11)$，求圖形通過這三點的二次多項式。

我們知道基於**牛頓插值多項式**，可以假設所求函數 $f(x)$ 為

$$f(x)=f(1)+a(x-1)+b(x-1)(x-2)$$

通常開頭這個形式就是學生最難理解的門檻。本文試圖利用學生已經學過的因式定理，提供一個教學上可行的引導，尚請方家不吝指教。複習一下因式定理：

設 $f(x)$ 為多項式，$ax-b$ 為一次多項式。

若 $f\left(\frac{b}{a}\right)=0 \Leftrightarrow ax-b$ 是 $f(x)$ 的一次因式 **.**

簡言之，只要有一次因式，就表示多項式的值為 **0**。例如，多項式 $f(x)$ 有一次因式 $x+2$，代表 $f(-2)=0$。反之，若多項式 $f(x)$ 滿足 $f(1)=0$，代表 $f(x)$ 有 $x-1$ 的因式。進一步推廣，易知若 a_1， a_2， $\cdots$， a_n 是 n 個不同的實數，且多項式 $f(x)$ 滿足

$f(a_1)=f(a_2)=\cdots=f(a_n)=0$，則 $(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$ 是 $f(x)$ 的因式。

讓我們回到開始的問題上，顯然圖形過這三點的二次函數 $f(x)$ 滿足 $f(1)=7$，$f(2)=6$，$f(3)=11$。雖然，我們可以設 $f(x)=ax^2+bx+c$，將三個條件代入求得 a,b,c。但這不是我們的目標！不過，這卻讓我們知道：一般而言，已知三點，能求的是二次多項式，也就是說，知道 $n+1$ 個點，能求的最低次數之多項式為 n 次多項式。

我們換個角度來考慮上面的問題，若只考慮一個點呢？例如，點 $A(1,7)$。那麼，滿足的多項式函數 $f_1(x)$ 是什麼？首先，$f_1(x)$ 應該是零次多項式，也就是常數多項式。因此，不難猜出結果：$f_1(x)=7$。接下來，若再增加一個點呢？點 $B(2,6)$。為了和前面的函數區別，我們稱同時滿足點 $A(1,7)$ 和點 $B(2,6)$ 的多項式函數為 $f_2(x)$。那麼，$f_2(x)$ 應該是一次函數。並且，它滿足 $f_2(1)=7=f_1(1)$ 與 $f_2(2)=6$。如此一來，$f_2(x)$ 會是什麼樣子呢？首先，$f_2(1)=7=f_1(1)$，且 $f_1(x)=7$ 是零次多項式，我們可以合理猜測 $f_2(x)=f_1(x)+Q_1(x)$，其中 $Q_1(x)$ 必為一次多項式，且滿足 $Q_1(1)=0$，才能符合 $f_2(1)=f_1(1)+Q_1(1)=7+0=7$ 的條件。因此，由因式定理知，可令

$$Q_1(x)=a(x-1)\Rightarrow f_2(x)=f_1(x)+Q_1(x)=7+a(x-1)$$

將 $f_2(2)=6$ 代入，得 $7+a(2-1)=6\Rightarrow a=-1$。所以，滿足 $f_2(1)=7$ 與 $f_2(2)=6$ 的一次函數為 $f_2(x)=f_1(x)-(x-1)=7-(x-1)$。

繼續相同的程序，再增加點 $C(3,11)$。那麼，滿足這三個點的函數 $f_3(x)$ 如何決定呢？同樣地，我們可以知道 $f_3(x)$ 應當是二次多項式函數，並且它滿足 $f_3(1)=f_2(1)=7$，$f_3(2)=f_2(2)=6$，以及 $f_3(3)=11$。因此，$f_3(x)=f_2(x)+Q_2(x)$，其中 $Q_2(x)$ 必為二次多項式，且滿足 $Q_2(1)=Q_2(2)=0$。因此，可令 $Q_2(x)=b(x-1)(x-2)$，則

$$f_3(x)=f_2(x)+Q_2(x)=7-(x-1)+b(x-1)(x-2)$$

將 $f_3(3)=11$ 代入，得 $11=7-(3-1)+b(3-1)(3-2)\Rightarrow b=3$。所以滿足 $f_3(1)=7$，$f_3(2)=6$，和 $f_3(3)=11$ 的二次函數 $f_3(x)$ **(**也是文章開頭問題的答案**)**為

$$f(x)=f_3(x)=7-(x-1)+3(x-1)(x-2)$$

觀察上式，不難發現 $f(x)$ 由三個單項相加而成 $f(x)=f_1(x)+Q_1(x)+Q_2(x)$，其中 $f_1(1)=7$，$Q_1(1)=0$，$Q_2(1)=Q_2(2)=0$。回顧整個尋找 $f(x)$ 的過程：逐一加入條件納入考慮，先是 $f(1)=7$，接著 $\begin{cases} f(1)=7 \\ f(2)=6 \end{cases}$，再來 $\begin{cases} f(1)=7 \\ f(2)=6 \\ f(3)=11 \end{cases}$。增加條件的結果，多項式次數會提高，所以添加單項是必要的。但又要保持原條件成立，添加的每個單項必須

不影響原有條件：$\begin{cases} f(1)=7 \leftrightarrow Q_1(1)=0 \\ f(2)=6 \end{cases}$；$\begin{cases} f(1)=7 \leftrightarrow Q_2(1)=0 \\ f(2)=6 \leftrightarrow Q_2(2)=0 \\ f(3)=11 \end{cases}$。由因式定理，

$Q_1(x)=a(x-1)$，$Q_2(x)=b(x-1)(x-2)$ 自然就出現，而牛頓插值多項式的形式也就底定。此外，由上述說明也不難發現，隨著我們考慮加入條件的次序不同，假設的多項式函數也會不同。例如，若是 $f(3)=11 \to f(2)=6 \to f(1)=7$，則 $f(x)$ 會假設為 $f(x)=f(3)+p(x-3)+q(x-3)(x-2)$。

更棒的是，順著這樣的思路，讀者應該也發現牛頓插值多項式的形式對於增加新的條件，處理上方便不少。例如，我們在原有的 $A(1,7)$，$B(2,6)$，$C(3,11)$ 三點，再加入新的觀測資料點 $D(-1,28)$，請求出圖形滿足這四點的最低次多項式函數 $g(x)$？如何在已知函數 $f(x)$ 的基礎上，求出 $g(x)$ 呢？首先，$g(x)$ 應該是個三次多項式。由於滿足 $g(1)=f(1)=7$，$g(2)=f(2)=6$，$g(3)=f(3)=11$。承上討論，我們可設 $g(x)=f(x)+c(x-1)(x-2)(x-3)$，將 $g(-1)=28$ 代入，可得 $c=-2$。因此，

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x)-2(x-1)(x-2)(x-3) \\ &= 7-(x-1)+3(x-1)(x-2)-2(x-1)(x-2)(x-3) \end{aligned}$$

了解牛頓插值多項式形式所蘊涵的意義後，進而就能求出其待定的係數。

我們的問題為

給定 $n+1$ 個資料點 $(x_0, f(x_0)),(x_1, f(x_1)),(x_2, f(x_2)),\cdots,(x_n, f(x_n))$，求滿足這 $n+1$ 個資料點的 n 次多項式 $f(x)$。

順著上述的思路，透過符號的輔助，我們就能掌握其中涉及的規律。首先，從滿足兩個點 $(x_0, f(x_0)),(x_1, f(x_1))$ 的一次多項式 $f_1(x)$ 討論起。假設

$$f_1(x)=f(x_0)+b_1(x-x_0)$$

那麼，$f_1(x_1)=f(x_1)=f(x_0)+b_0(x_1-x_0) \Rightarrow b_1=\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$。因此

$$f_1(x)=f(x_0)+\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x-x_0)$$

接著，考慮滿足三個點 $(x_0, f(x_0)),(x_1, f(x_1)),(x_2, f(x_2))$ 的二次多項式 $f_2(x)$。承上面的結果，可以假設

$$f_2(x) = f_1(x) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$$
$$= f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$$

那麼，

$$f(x_2) = x_0 + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0) + b_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

$$\Rightarrow b_2 = \frac{f(x_2) - f(x_0) - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$= \frac{[\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}] - [\dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}]}{x_2 - x_0}$$

因此，

$$f_2(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) + \frac{[\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}] - [\dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}]}{x_2 - x_0}(x - x_0)(x - x_1)$$

到這裏，是否覺得各項係數看來有「跡」可尋：都是兩項相減後再相除的比值！因此，數學家就引進「均差」的概念和符號加以定義：

一階均差：$f[x_i, x_j] = \dfrac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j}$，$i \neq j$。

二階均差：一階均差的均差，因此

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k} \text{，} i \neq j \neq k$$
$$= \frac{\dfrac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j} - \dfrac{f(x_j) - f(x_k)}{x_j - x_k}}{x_i - x_k}$$

類推下去，

n 階均差：$n-1$ 階均差的均差，因此

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \frac{f[x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}] - f[x_1, x_2, \cdots, x_n]}{x_0 - x_n}$$

所以，$b_1 = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f[x_1, x_0] = f[x_0, x_1]$，

$$b_2=\frac{\left[\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right]-\left[\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}\right]}{x_2-x_0}=f[x_2,x_1,x_0]=f[x_0,x_1,x_2]$$

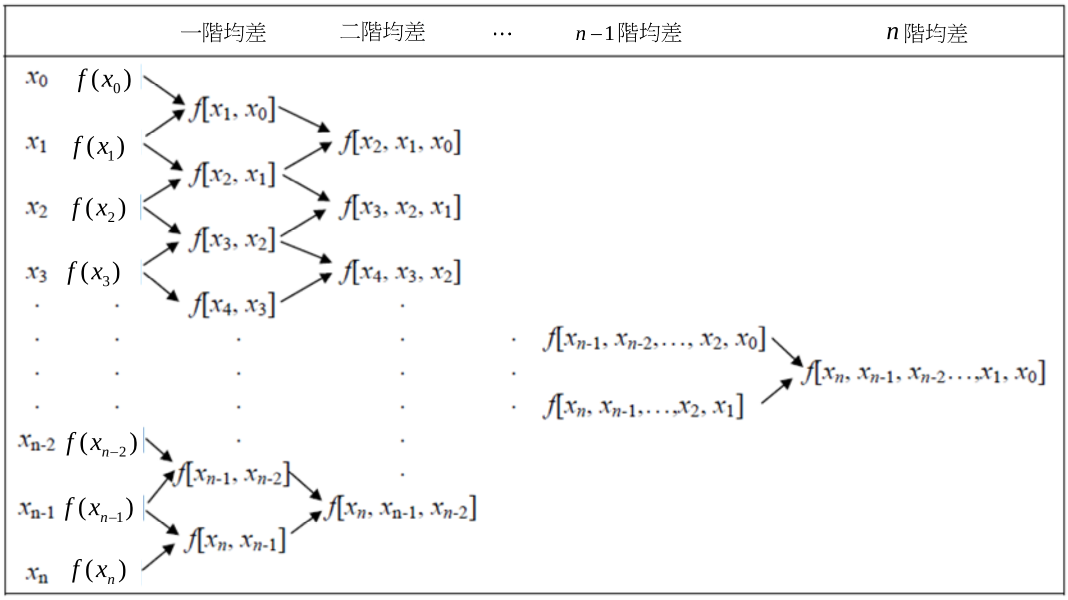
則 $f_2(x)$ 可以表示如下

$$f_2(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$$

進一步，也能寫出滿足 $n+1$ 個資料點的 n 次牛頓插值多項式

$$\begin{aligned}f(x)=f(x_0)&+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\cdots\\&+f[x_0,x_1,\cdots,x_{n-2},x_{n-1}](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-2})(x-x_{n-1})\\&+f[x_0,x_1,\cdots,x_{n-1},x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})(x-x_n)\end{aligned}$$

換句話說，只要求出各階均差，就能輕鬆地寫出任何階數符合要求的牛頓插值多項式。下圖清楚表明各階均差的關係，也可以當成計算輔助之用：



實際演練一下，更能掌握箇中規律，請看下面問題

求過 $(-1,-2)$，$(1,6)$，$(2,7)$ 及 $(4,93)$ 四點的三次多項式。

將上述資料表列計算如下圖：

$$
\begin{array}{ccccc}
x & f(x) & \text{一階均差} & \text{二階均差} & \text{三階均差} \\
-1 & \boxed{-2} & & & \\
 & & \dfrac{-2-6}{-1-1}=\boxed{4} & & \\
1 & 6 & & \dfrac{4-1}{-1-2}=\boxed{-1} & \\
 & & \dfrac{6-7}{1-2}=\boxed{1} & & \dfrac{-1-14}{-1-4}=\boxed{3} \\
2 & 7 & & \dfrac{1-43}{1-4}=\boxed{14} & \\
 & & \dfrac{7-93}{2-4}=\boxed{43} & & \\
4 & 93 & & &
\end{array}
$$

因此，所求三次多項式為

$$f(x)=-2+4(x+1)-(x+1)(x-1)+3(x-1)(x+1)(x-2)\text{。}$$

看完真正「完全版」的牛頓插值多項式，相信對於它的評價應該「改觀」不少吧！至少，當我們的資料點數增加時，牛頓插值多項式只要繼續添加更高次的單項，而拉格朗日插值多項式可是需要整個打掉重練才行呢！

南京 HPM 之行的我見、我聞

林美媛
台北市中正國小

103 年 **11** 月中，由於論文指導教授蘇意雯教授和口試委員劉柏宏教授的推薦，我有幸參加了一場由中國大陸江蘇省教育報刊總社所主辦「數學史視野：小學數學課程教學改革」的活動，活動的地點就在南京市。

活動由蘇派教育研究中心及江蘇現代教育培訓中心協辦，這兩個單位相當於我們的教師研習中心，活動的重心圍繞在數學教育的改革上，並且以「數學史融入小學數學教學」為核心視野，因此專家講座的部分也都鎖定在數學史的議題上，並安排了許多將數學史融入小學數學教育的一線教師做現場觀課以及針對課程設計上的微報告。這些示範課例的教師分別來自北京、江蘇、浙江的小學特級教師(大陸的小學教師之最高級)以及來自台灣的小學教師。當初接到邀請時活動內容寫著兩岸四派名師教學演示，一時摸不著頭緒，不知自己屬於哪一派，後來才了解所謂四派是京派、蘇派、浙派、和海派，而我被歸為海派，真是一個挺新鮮的名詞。

整個活動為時二天半，共有七場課例(觀課)、三場數學史專家學者的專題報告(二位大陸數學史教授、一位台灣數學史教授)、三場微報告(教學分享)、一場沙龍對話、一場主題對話(數學史融入小學數學教育的機遇與挑戰)。其中的七場觀課內容分別是：面積的意義、用數確定位置、年月日、小數的意義和性質、用字母表示數字、百分數的意義、運用數學史例在數的對稱與計算，所運用的數學史題材有：笛卡爾的蜘蛛網、古羅馬但丁凱撒奧古斯都制定曆法的故事、分數小數化的演變、代數符號的歷程、百分數的演化過程、洛書、幻方與高斯的故事等。三場專題報告主題分別為：江蘇省特級教師暨廣西師範學院兼職教授蔡宏聖老師的「歷史告訴我們…」、勤益科大劉柏宏教授的「數學解謎」、和華東師大汪曉勤教授的「數學史與小數數學教育」。由於時間搭配上的不巧，我僅參與了其中的一天半，但所看見大陸教師們的表現，無論在口語的表達上、教學過程各個環節的掌控上都呈現出爐火純青幾近完美的功力，大陸小學生的上課表現個個積極表現自己，展現出與台灣截然不同的口說能力，這些都讓置身現場的我讚嘆不已。

例如：俞正強老師利用粉筆和信封，讓已知與未知具象化，他讓代數史的發展順序重現在課堂上，使學生經歷了歷史上數學家所曾遭遇的困境，當學生們親身經歷字母之所以成為代表數字的歷程時，引導學生從實境中感受並從障礙裡突圍，最後澄清字母可以用以表示數的事實，也成功的傳授了代數的意涵。張齊華老師以那一口字正腔圓，從他對學生的學習態度之要求，與上課發表時的精準表達，展現了為人師表剛正不阿、起而力行、積極求新的教學態度。他強調學生的自主學習、讓學生主動發現生活中的百分數、將百分數的教材融入生活，讓數學文化在課室內自然地起了無形的作用。他的用字遣詞以及清晰捕捉學生口述中潛在的數學概念，展現了十足的專業反應與課堂魅力，讓學生無不專注、無不仔細思考，這些都讓來自台灣的我印象十分深刻。

當然，我這個外來的和尚，也不能太一般。我秉持台灣純樸自然的原汁原味，充分的運用了台灣課室中最擅長的資訊融入策略，以及蘇意雯教授所提倡的學習工作單，反覆思索教材與數學史元素。最後決定從學生最常犯錯之處著手，定案為「數的對稱與計算」，希望透過數學家的故事、有趣的數學史例等為素材，融入我的教學過程，力求深刻烙印在學生的腦海中，以提升學生的數概念，使學生的計算能力更加得心應手。誠如汪曉勤教授的分類，運用數學史的方法包括：附加式(使用數學家的圖片、軼聞、趣事)、複制式(歷史上的數學問題和解法)、和順應式(根據歷史材料，編制數學問題)。我所運用的數學史素材包括：洛書的故事、九宮圖與中國宋代數學家楊輝的縱橫圖、法國的金字塔法解九宮圖、射雕英雄傳中的九宮圖、德國數學家高斯小時候算 **1** 加到 **100** 的事例…，經過重新詮釋與編排貫穿我的教學。由於現場的電腦環境是 **XP** 無法播放我用 **PPT2010** 版本的影像插入部分，加上電腦連接的擴音器也發生故障，讓我的教學內容最精采的部分卻無用武之地，出現了一點小亂流。幸好這時學習工作單適時彌補了短暫的空檔。整體而言，由於對大陸小學生數學的程度無法完全掌握，我的教學流程或許不如前述二位大陸特級教師的精準到位，不過在內容與臨場應變上應該並不遜色。整個教學過程雖然有驚卻也無險地渡過，獲得了在場觀課老師們的肯定與認同，算是沒丟咱們台灣小學教師的臉。

儘管大陸的硬體環境還不如台灣,研習會場的設備、所借用的大禮堂環境等都不優，但是他們所展現出來的軟實力，卻是值得我們內省和看齊的。在參與了這場融合了台灣與大陸專家學者與國小教師實際教學的研習活動中，我深深感受到，兩岸研習模式與學生素質的許多不同之處。

一、研習內容的廣度和深度：在研習活動的安排上，大陸講求視野的擴大、時間及場次的緊湊。主題相同但囊括了不同地區的不同派別的老師們,對同一主題做教學示範，大有比武盛會的感受。其優點是,同一個主題,透過不同教學演示者的切入點不同、融入的課程內容不同，可以引發參與者更多的共鳴與發想。在短短的兩天半中，時間從八點半到十二點、下午一點半到五點半，總共有七場課例、三場專家報告外加教學分享和討論，內容真是豐富又緊湊。

二、化被動為主動的研習方式：此研習活動採收費方式，二天半的研習每人繳交 **300** 元人民幣(約台幣 **1500** 元)，並且在研習會場憑票入場，竟然吸引八百多位老師參加。雖然這些費用或許是由校方支付，但是採用收取門票的入場方式，讓參與者相對的更重視這場研習。而台灣慣用「簽到查勤」的方式，相形之下顯得被動了些。而且對研習中心來說，這種經費自籌的方式、自然而然得把研習辦得生動而值回票價，才能吸引校方派教師出來取經，主辦單位並同時在會後販售整個活動的錄影光碟(每片 **300** 人民幣)，顯現出大陸的資本主義色彩，除兼顧使用者付費的理念，同時真是生財有道啊！

三、對 **HPM** 的重視程度：大陸的數學教育學者專家們以及一線的小學教師，對 **HPM** 數學史融入國小數學的重視程度遠遠超過台灣的數學教育界。大陸這幾年在 **HPM** 方面的積極努力，除了這次的活動之外，明年**(2015)**上半年在重慶西南大學將召開「第六屆數學史與數學教育國際研討會」；下半年在上海華東師範大學也將舉行「上海數學史與數學教育研討會」等。相形之下台灣在擁有國際級的學者洪萬生教授所率領的 **HPM** 團隊，以及許多運用數學史融入教學的專家、學者們，已具有不少數學史融入數學教學的相關實務。但是，政府及相關的教育學術單位，卻未能有對等的重視，反而大陸是積極邀約並努力地吸取台灣的經驗。目前國內在洪萬生教授退休之後，**HPM** 理念的宣揚傳承似乎出現了斷層。如果在彼岸相對重視，而國內相形忽視的對比下，長此以往，**HPM** 的發展恐將此消彼長。

四、大陸小學生們的上課情況：大陸學生的上課反應出奇的積極與主動，當老師發問時，主動搶答的情形遠把台灣的孩子給比了下去，每個人都想說出自己的想法和意見，而不是聽到別人的發言就不敢說出自己的想法，不是只想舉手說出有把握的答案，而是心裡有不同的意見或見解也能侃侃而談。一旁的同學們聽到極為不同的說法或想法也不會取笑或貶抑，在這樣自由辯證之下的教學氛圍中，孩子們的口語表達能力自然得到了訓練和肯定，也就更加成熟而發展了。

五、重視課例的示範：活動的內容專家學者的演說與實際的課例示範活動交錯安排，其中課例甚至多過專家演說，並且在活動之後安排了教學者的現場分享，將運用的方式與心得做一個實務上的傳承，這在台灣國小研習會場上甚是少見。有了好的教學演示之後更要做經驗上的傳承，教學過程並不是依樣畫胡蘆般能唾手可得的，教學者分享出課程設計過程中是如何發想、思索和運用，不是給魚而是給釣竿的方式，透過分享加以延遞，讓參與研習的老師們真正成長並學會運用。

此趟行程的最後一天是參觀南京市，在參觀南京總統府時，安排的導覽員，是位淮安姑娘，說她是正妹一點也不為過，五官立體身形修長不在話下，其導覽時的口語表達能力讓同行者驚為天人。她表現出專業、得體、聲音清晰而且悅耳動聽，無論在音量的控制、傳達的流暢度、內容的豐富、和精準上，都令人留下非常深刻而美好的印象。此行最大的體悟是，台灣在口語能力的表達上顯然是有著長足進步的空間，無論是導覽員身上或是學生在教室中的發言情況，都是如此。

由於台灣在 **HPM** 這領域起步得早，此行最主要的任務雖在於推廣數學史融入數學教學，但卻也看見了大陸對 **HPM** 的積極作為。雖然台灣擁有比大陸更加優渥的軟實力和硬體環境，但是卻不見台灣教育界對 **HPM** 教學的重視，實在令人覺得相當的可惜。如果我們能夠珍惜自身的優勢並加以發揚光大的話，就像同行的劉教授所言：「數學教育，沒有數學史不會怎麼樣、有了數學史就會不一樣！」

筆者於現場分享 **HPM** 教學理念

《畢氏定理四千年》譯序

洪萬生
台灣師範大學數學系退休教授

相對於羅密士（**Elisha Scott Loomis**）的《畢氏命題》（***The Pythagorean Proposition***，初版於 **1927** 年）的 **371** 個證明，八十年後問世的這本《畢氏定理四千年》（**2007** 年）究竟有什麼賣點呢？當作者毛爾自以為發現一個巧妙的新證法，最終還是難逃羅密士所佈下的 **371** 天羅地網，尤其不無「狗尾續貂」之嫌。因此，從激發讀者的好奇心來考量，這種「炒冷飯」的無聊之舉，看來根本不值得我們推薦，更何況在網路上，我們還可以輕易地搜尋並儲存《畢氏命題》的免費電子版。

不過，這本《畢氏定理四千年》還是值得大力推薦。我的理由主要有兩分面。首先，毛爾這位數學家兼科普作家對於數學知識活動的體會，相當通情達理，因此，讓他來「重述」這個主題的故事，調性婉約體貼，足以打動人心。其次，毛爾在本書中，將這個主題的敘事放在數學史的脈絡中，讀者因而得以認識畢氏定理與數學發展的密切關係，從而在數學知識活動上，凸顯「舊詞新說」與數學真理歷久彌新的特殊意義。

現在，讓我們回到上引毛爾那個非常巧妙的證法。在本書「補充欄 **4**」中，作者以「折疊的袋子」證法名之。其中，我們看到毛爾的現身說法，透露他「再發現」此一證法的無上「法喜」，儘管它仍逃不過羅密士鉅細靡遺的蒐集彙編。根據《畢氏命題》的記錄（編號 **230**），那是早在 **1934** 年，就已經由一位十九歲的年輕人所發現。事實上，這個證法充滿了數學洞識，它不僅連結了「面積證法」與「比例證法」，是「圖說一體，不證自明」（**proof without words**）的最佳例證之一，另一方面，此一方法正如毛爾所指出：「只要證明畢氏定理在這個特別的多邊形（按：本例為三角形）上能夠成立就可以了。」

面積證法與比例證法是《幾何原本》中，歐幾里得為畢氏定理所提供的兩種證法。所謂的面積證法，是指《幾何原本》第 **I** 冊第 **47** 命題的證法，它主要依賴三角形（面積）全等（**SAS**）的概念，來證明：在一個直角三角形中，直角的對邊上的正方形（面積），等於包含直角的兩邊上的正方形（面積）之和。另一方面，比例證法是指《幾何原本》第 **VI** 冊第 **31** 命題：直角對邊上的圖形（**figure**），等於包含直角的兩邊上之相似及相似地被描述的圖形（**similar and similarly described figures**）。根據毛爾的說明，「這幾乎是命題 **I.47** 的逐字重複，除了『正方形』被『（相似）圖形』所取代。」此處，「被描述的圖形」可以是任意彼此相似的圖形，它們甚至不必是多邊形。因此，命題 **VI. 31** 顯然是命題 **I. 47** 的延拓，歐幾里得之所以將前者安排在第 **VI** 冊，是因為《幾何原本》直到該冊才討論相似形。而這當然，更是由於比例式理論（**theory of proportion**）安排在第 **V** 冊的緣故。事實上，《幾何原本》前四冊主題是平面幾何學，也是我們目前國中幾何教材的最原始出處。

除了這兩種方法之外，畢氏定理的主要證法還有所謂的「弦圖證法」。這個方法源自中國與印度。無論是哪一個版本，應該都是利用圖形的切、割、移、補 – 在中國第三世紀被魏晉數學家劉徽稱之為「出入相補」，出自他對漢代數學經典《九章算術》的「勾股術」之註解。不過，現代人（尤其是數學教科書的編輯）都喜歡將它「翻譯」成代數式子的操弄（二項式展開），從而減損了它固有樸拙的「美術勞作」風格，實在有一點可惜，因為如果國中學生無法嫻熟操作二項展開式，那麼，此一證法的理解就備受考驗。無論如何，「出入相補」這個方法訴諸直觀的「動手做」，在不必講求邏輯嚴密論證的文化脈絡（譬如中國與印度）中，顯然相當受到歡迎。事實上，在初等教育階段，它也是非常值得引進課堂的一個經典案例，可以操練所謂的「探究」（**investigation**）教學是怎麼回事。另一方面，如果我們願意「勻出」一點寶貴時間，試著比較這三個證法在方法論（**methodology**）層面的異同，乃至於認識論（**epistemology**）層面的意義，那麼，關注數學知識活動的多元價值，或許可以多少成為國民素養的一部份了。

上述這個比較的案例，不必侷限在初等教育層次，高中或大學教師其實也可據以探討數學發現與證明的意義。還有，對一般讀者來說，利用這個案例重溫學習數學的經驗（不管「甜美」或「苦澀」，或甚至「不知從何說起」），在一個科技主導世界、而數學又大大主導科技的世代中，或許可以變得比較舒適自在。這種從數學史取材融入數學教學，而企圖讓數學知識活動變得更有意義的進路，是 **HPM** 的主要關懷之一。

所謂 **HPM**，是指數學史融入數學教學的一種教育研究與實踐。它原來代表國際數學教育委員會（**ICMI**）的一個最早成立的研究群：**International Study Group on the Relations between History and Pedagogy of Mathematics**，後來也指涉此一研究群針對數學教育的共同關懷。毛爾的數學普及書寫雖然並未刻意呼應這種關懷，然而，就如同許多其他科普著作一樣，《畢氏定理四千年》在歷史文化脈絡中，說明相關的數學知識活動之意義，因此，本書當然也可以算是 **HPM** 方面的參考著作。

如此歸類當然需要一個先決條件，那就是：本書是採取數學史進路，論述以畢氏定理為專題的一部（科普）著作。事實上，作者在本書中，的確大致按照數學的發展歷程，來敘述與畢氏定理有關的數學與數學家的故事。譬如說吧，從畢氏到歐幾里得與阿基米德，是有關希臘數學史的部分。在公元後 **500-1500** 年間，作者則是以中世紀歐洲，以及印度與阿拉伯數學史為主題。至於進入微積分主導的近代數學時期，作者先引進創立代數符號法則的韋達，因為他將「三角學從原本侷限在解三角形的一門學問，轉變成為與分析學有關的學門」。至於作者何以獨厚韋達？那是由於畢氏定理在三角學中扮演了核心角色。在微積分的相關敘事中，作者主要指出微分版的畢氏定理如何應用以求曲線之弧長，「畢達哥拉斯一定很難想像，他的定理被用於求幾乎所有曲線之長度」，其中必須藉助於無限的概念，而這卻曾經深深困擾著古希臘人。

在簡短敘述的微積分發明故事之後，作者開始採取「專題」的方式，來說明畢氏定理在各相關領域的現身之意義：畢氏定理與射影幾何學中的線座標、畢氏定理與內積空間乃至於希爾伯特空間、畢氏定理與黎曼幾何、畢氏定理與相對論，等等。在這些敘事

中，有一些很少被一般的科普作品所引述，譬如愛因斯坦的十二歲回憶：「**在我拿到這本神聖的幾何學小冊之前，伯父就告訴過我畢氏定理。經過一番努力後，我在相似三角形的基礎上成功地『證明』了這個定理。對我來說，像直角三角形邊長的比例關係，由其中一個銳角完全決定是『顯然』的，在類似的情況下，只有我認為不那麼『顯然』的才需要證明。**」顯然，愛因斯坦「再發現」了比例證法，這清楚說明畢氏定理以及包括它的《幾何原本》，一直在數學學習上扮演了重要的啟蒙角色。

因此，本書不僅適合中小學師生閱讀，對於一般讀者來說，它也是可用以充實國民素養的數學普及讀物。事實上，筆者所以主譯本書並高度推薦，不僅是毛爾的普及數學著作在台灣頗受歡迎，更值得注意的，是他的一貫寫作風格，都是企圖在文化史的脈絡中，讓數學知識活動變得更加立體起來，換句話說，他對歷史上的數學現象之「快照」，因為有了文化脈絡的襯托，譬如本書「補充欄 **2**：藝術、詩歌及散文中的畢氏定理」，而發揮了 **3-D** 再現的效果。另一方面，作者也「不惜」將自己推入歷史敘事現場，讓本書洋溢著毛爾獨特的「個人風格」，譬如他不僅自評他自己「再發明」的證法，還在本書最後一章〈終曲〉中，簡述他們夫婦在 **2005** 年 **2** 月地中海暴風季節，前往畢達哥拉斯家鄉沙摩斯島旅遊的經歷。最後，當他的回程飛機繞過島上最高峰克基斯山時，他想起漁夫沿著陡峭的山壁航行時，都仰賴了畢達哥拉斯的靈魂所點燃的一道光，在「暴風裡，它就如同燈塔般地指引了安全的方向。」這是本書的結語，也是最佳的自我推薦！

2014/11/25 附記：

本書英文版是毛爾（**Eli Moar**）所著的 ***The Pythagorean Theorem: A 4000-Year History***，中譯本由黃俊瑋、蘇俊鴻、林炎全與我合作，三民書局即將出版。又，林炎全老師曾經寫過本書的書評，請參看數學博物館・科普特區・深度書評。

《數學女孩：伽羅瓦理論》導讀

洪萬生
台灣師範大學數學系退休教授

書名：數學女孩：伽羅瓦理論
作者：結城浩
譯者：陳冠貴
審定者：洪萬生
出版社：世茂出版社，新北市
出版日期：**2014**
出版資料：平裝本，**444** 頁
ISBN: 978-986-5779-45-0

本書延續「數學女孩系列」前四本的一貫風格，亦即，為了普及遠遠超乎高中數學層次的這些知識，作者顯然事先擬定好了數學「旅行地圖」，由最基本的中學數學題材開始討論，一步一步地由書中的數學女孩與男孩帶領，探索數學的奇妙世界。同時，作者利用十分討喜的數學趣味話題(在本書是一開始的畫鬼腳遊戲)引發讀者的閱讀興趣，而且敘事不厭其繁，唯恐討論不夠深入。此外，在人物個性的塑造與故事情節的安排上，這些小說都相當成功地結合數學知識活動中的提問與解題。這種高中或國中學生主角的「現身說法」，無疑地發揮了極大的親和力，甚至讓數學沒那麼機伶的一般學生，也容易產生共鳴。此外，它們所提供的解題或證明活動，也總是充分地配合人物個性與數學經驗，而呈現多元面向的進路或方法，讓讀者可以從容分享。

另一方面，這些小說也經常基於「知識結構的高觀點」或「數學史的洞察」，來提示或規劃前述的「旅行地圖」，藉以強調相關的數學結構意義，使讀者不至於迷失在瑣碎的解題迷魂陣或錯綜複雜的符號操作之中，而無從察覺自己參與論證時，究竟「身在何處」。還有，作者也仿效類似網路「超連結」資訊的手法，鼓勵讀者進行形式推論，即使不知道個別命題或定理之內容為何，也不必在意而繼續走下去。而這，當然也是再一次地，意在凸顯數學知識的結構面向之意義。

專就本書來說，它除了擁有「數學女孩系列」前四本的共同特色之外，還深入相關的數學史脈絡，譬如拉格朗日（**Lagrange**）的預解式（**resolvent**），以及伽羅瓦第一論文的介紹與討論，為我們具體還原了伽羅瓦短促一生、但璀璨不朽的數學豐功偉業。事實上，除了專門討論伽羅瓦理論的數學史專著之外，一般的數學通史類著述，包括頗受歡迎的 **Victor Katz** 之 ***A History of Mathematics: An Introduction***，也難以全面關照拉格朗日預解式之意義，及其與伽羅瓦理論之連結。

在結城浩已經出版的數學女孩系列中，本書是最新的一本，同時，在數學知識內容方面，它也最為紮實與完整。換句話說，如果任何讀者想要具體理解伽羅瓦理論的主要內容與意義，甚至國中數學所熟悉的二次方程的判別式，以及根與係數關係（連同其對稱多項式概念）有哪些特殊「意義」等等，那麼，除了大學數學系的代數學教科書之外，恐怕沒有任何數學普及著作比本書表達得更容易讓一般讀者入手了。

譬如說吧，馬里歐・李維歐（**Mario Livio**）的《無解方程式》（***The Equation That Couldn't Be solved***）與伊恩・史都華（**Ian Stewart**）的《對稱的歷史》（***Why Beauty is Truth: A History of Symmetry***）都涉及伽羅瓦理論，然而，這兩本普及著作的（英文）編輯似乎都自我設限，無法讓這兩位蠻有聲望的科普作家「暢所欲言」，而提供足夠的數學知識質感，因此，讀者要是想從這兩本著作掌握五次方程根式求解（**solved by radicals**）之實質知識，不啻是緣木求魚，真是辜負了他們的科普盛名，令人遺憾。

上述這些書寫與出版現象，根本不會在結城浩的案例上發生。事實上，數學女孩系列中的兩本 －《數學少女》與《數學女孩：費馬最後定理》－ 已有英文版發行，評價與銷售情況都相當令人驚豔。本書於 **2012** 年 **5** 月 **31** 日初版發行，不到兩個月時間，隨即在 **2012** 年 **7** 月 **14** 日發行第二刷。這固然可能是作者的「人氣」有以致之，然而，數學女孩的一貫風格乃至本書非常獨到的數學敘事，應該也是受廣大讀者喜愛的主要因素吧。

最後，我非常期待讀者翻閱本書之前，先好好想想二次方程式的判別式，以及根與係數關係的意義何在？如果你十分在乎這個提問，那麼，看完本書之後你一定有豁然開朗的感覺。當然，如果你比較喜歡數學遊戲，那就開始畫鬼腳吧！

1. **為節省影印成本，本通訊將減少紙版的的發行，請讀者盡量改訂 PDF 電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail 至 suhy1022@gmail.com**
2. **本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。**
3. **歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請 e-mail 至 suhy1022@gmail.com**
4. **本通訊內容可至網站下載。網址：http://math.ntnu.edu.tw/ ~ horng/letter/hpmletter.htm**
5. **以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡**

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本：陳昭蓉 (東京 Boston Consulting Group)
基隆市：許文璋（南榮國中）
台北市：英家銘（台北醫學大學）楊淑芬（松山高中）杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中）蘇俊鴻（北一女中）陳啟文（中山女高）蘇惠玉（西松高中）蕭文俊（中崙高中）郭慶章（建國中學）李秀卿（景美女中）王錫熙（三民國中）謝佩珍、葉和文（百齡高中）彭良禎（師大附中）郭守德（大安高工）張瑄芳（永春高中）張美玲（景興國中）文宏元（金歐女中）林裕意（開平中學）林壽福、吳如皓 (興雅國中) 傅聖國（健康國小）李素幸（雙園國中）程麗娟（民生國中）林美杏（中正國中）朱賡忠（建成國中）
新北市：顏志成（新莊高中） 陳鳳珠（中正國中）黃清揚（福和國中）董芳成（海山高中）孫梅茵（海山高工）周宗奎（清水中學）莊嘉玲（林口高中）王鼎勳、吳建任（樹林中學）陳玉芬（明德高中）羅春暉 (二重國小) 賴素貞（瑞芳高工）楊淑玲（義學國中）林建宏 （丹鳳國中）莊耀仁（溪崑國中）、
宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中）吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）林宜靜（羅東高中）
桃園縣：許雪珍、葉吉海（陽明高中）王文珮（青溪國中） 陳威南（平鎮中學）洪宜亭、郭志輝（內壢高中） 鐘啟哲（武漢國中）徐梅芳（新坡國中） 程和欽 (大園國際高中)、鍾秀瓏（東安國中）陳春廷（楊光國民中小學）王瑜君（桃園國中）
新竹市：李俊坤（新竹高中）、洪正川、林典蔚（新竹高商）
新竹縣：陳夢綺、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）
苗栗縣：廖淑芳 (照南國中)
台中市：阮錫琦（西苑高中）、劉雅茵（台中二中）、林芳羽（大里高中）、洪秀敏（豐原高中）、李傑霖、賴信志、陳姿研（台中女中）、莊佳維（成功國中）、李建勳（萬和國中）
南投縣：洪誌陽（普台高中）
嘉義市：謝三寶（嘉義高工）郭夢瑤（嘉義高中）
台南市：林倉億（台南一中）黃哲男、洪士薰、廖婉雅（台南女中）劉天祥、邱靜如（台南二中）張靖宜（後甲國中）李奕瑩（建興國中）、李建宗（北門高工）林旻志（歸仁國中）
高雄市：廖惠儀（大仁國中）歐士福（前金國中）林義強（高雄女中）
屏東縣：陳冠良（枋寮高中）楊瓊茹（屏東高中）黃俊才（中正國中）
澎湖縣：何嘉祥 林玉芬（馬公高中）
金門：楊玉星（金城中學）張復凱（金門高中） 馬祖：王連發（馬祖高中）

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。懇請各位老師惠賜高見！