HPM通訊

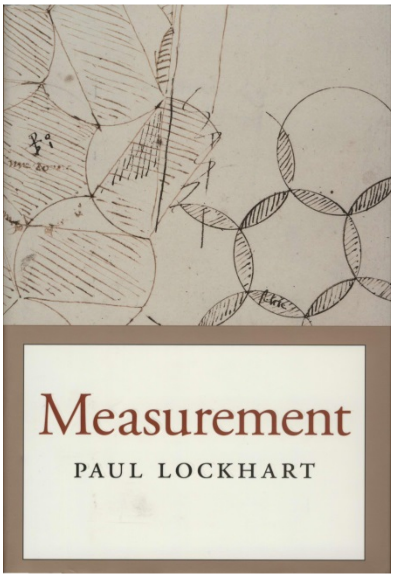
發行人：洪萬生（台灣師大數學系退休教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）
助理編輯：黃俊瑋（台灣師大數學所研究生）
編輯小組：蘇意雯（台北市立教育大學）蘇俊鴻（北一女中）
黃清揚（福和國中）葉吉海（陽明高中）
陳彥宏（成功高中）陳啟文（中山女高）
王文珮（青溪國中）黃哲男（台南女中）
英家銘（台北醫學大學）謝佳叡（台灣師大數學系）
創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng

第十七卷 第四期 目錄（2014年4月）

推陳出新看數學：
推薦 Paul Lockhart 的新書 *Measurement*

洪萬生
台灣師範大學數學系退休教授

書名：Measurement
作者：Paul Lockhart（保羅．拉克哈特）
出版社：Cambridge, Massachusetts: The Belknap Press of Harvard University Press
出版年：2012
出版資料：精裝本, 407 pp
國際書碼：ISBN 978-0-674-05755-5



數學普及作品不同於一般科普書籍，一直「推陳出新」，總是可以帶給我們意想不到的驚喜，保羅．拉克哈特的著作尤其如此。他在《一個數學家的嘆息》書中，立足於自己的「現身說法」，論述數學教育的大破與大立，令人嘆為觀止！現在，這本 ***Measurement*** 之書寫基調延續前書，但是，由於本書初衷不在批判，因此，作者得以在一些古典的數學題材（尤其是第一部份）上，述說不同版本的「故事」，進而從容地演示數學美之必要！

首先，值得我們一開始引述作者對於「度量」的看法，這或可很好地說明何以他將本書之書名命為 **measurement**：

> **What is measuring? What exactly are we doing when we measure something? I think it is this: we are making a comparison. We are comparing the thing we are measuring to the thing we are measuring it with. In other words, *measuring is relative*. Any measurement that we make, whether real or imaginary, will necessarily depend on our choice of measuring unit. (p. 32)**
> （何謂度量？當我們在度量某物時，我們真正在做的是什麼事呢？我認為它就是這樣：我們正在進行比較。我們將正在度量的事物較之於運用它來度量的事物。換言之，度量是相對的。我們所做的任意度量，無論真實或虛構，都將必然地依賴我們對度量單位的選擇。）

本書主要有兩個部份，第一部份主題是「大小與形狀」（**Size and Shape**），第二部份主題則是「時間與空間」（**Time and Space**）。 在第一部份中，作者主要討論希臘古典幾何與三角學內容，再加上機械曲線，以及與圓錐曲線結合的射影幾何學（**projective geometry**）。請參看作者在目錄中對於本部份內容所提供的提綱挈領說明：

第二部份主題是「時間與空間」，作者處理了聯繫初等數學與高等數學的解析幾何、數學物理初步、速度，微積分及其應用等主題。其內容目錄如下：

正如前述，本書延續了《一個數學家的嘆息》的基調，其中特別值得指出的風格，是作者將數學比喻成藝術，從而，他的普及訴求，主要是在數學知識的有趣面向：**"People don't do mathematics because it's useful. They do it because it's *interesting*." (p. 49)**。至於在敘事方面，作者在本書中，不斷地推陳出新，除了分享他的數學洞識之外，也一直給我們字字珠璣的驚喜。

譬如說吧，在推陳出新方面，由於作者熟悉數學史，因此，在深入理解相關的史實之後，他總是可以帶給我們有關數學方法的全新感受。以阿基米德推求球體積公式為例（**pp. 86-90**），作者的解說真是罕見的簡單與深刻，非常值得推薦給有意講解卡瓦列利原理（**Cavalieri principle**）的教師參考借鑑。還有，他對正五邊形對角線與邊長之關係式的解讀（**pp. 53-56**），亦堪稱一絕，這些都可以見證他對證明此一數學實作（**mathematical practice**）的期許。

事實上，作者針對「證明」所做的說明就啟發性十足，請參考如下引述：

A proof is simply a story.　The characters are the elements of the problem, and the plot up to you. The goal, as in any literary fiction, is to write a story that is compelling as a narrative.　In the case of mathematics, this means that the plot not only has to make logical sense but also be simple and elegant.　No one likes a meandering, complicated quagmire of a proof.　We want to follow along rationally to be sure, but we also want to be charmed and swept off our feet aesthetically.　A proof should be lovely as well as logical.

（證明不過是一個故事。其中角色是問題中的元素，至於情節則完全在於你怎麼說。證明的目標，正如同任何文學小說一樣，是書寫一個如同敘事一樣具有驅使性的故事。在數學的案例中，這表示情節不僅必須在邏輯上站得住腳，而且也必須是簡單及優雅。沒人喜歡一個證明像複雜迂迴的沼澤。做一個證明時，我想要順著理性前進而得以確定它的真實性，然而，我也嚮往它在美學上的吸引力與令人神魂顛倒。一個證明應該是既可愛又合乎邏輯。）

Which brings me to another piece of advice: improve your proofs. Just because you have an explanation doesn't mean it's the best explanation.　Can you eliminate any unnecessary clutter or complexity?　Can you find an entirely different approach that gives you deeper insight?　Prove, prove, and prove again.　Painters, sculptors, and poets do the same thing. (p. 12)

（這就導引我提出另一個建言：改善你的證明。這正因為你有一個說明並不表示它就是最佳的說明。你可以刪除任何不必要的散亂與複雜嗎？你可以找到一個完全不同的進路，以得到更深刻的洞識嗎？證明，證明，再證明。畫家、雕刻家，以及詩人都作同樣的事情。）

上述這種證明 **vs.** 敘事（**narrative**）的比喻，可以解釋何以他那麼高調的呼籲：證明，

證明，再證明！因為一個會說故事的人，通常會不斷地翻新他的故事「版本」，以便讓不同階層的閱聽人（**audiences**）永遠興味盎然。換句話說，不同的證明就是不同的故事版本，至於運用之妙，就完全在於數學洞察力了。

另一方面，我們也可以欣賞拉克哈特對數學公式的講解。以餘弦定律為例，作者為了讓 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ 適用於 ***C*** 為銳角、直角與鈍角等三種情況，指出擴充餘弦函數定義的必要性，這也就是他強調的「**讓模式決定意義的選擇**」（***we let the pattern determine our choice of meaning***）：

> **a nice way to think about our expanded definition of cosine is that we are redefining of cosine of an angle to be the shadow of a unit length stick, keeping track not only of the length of the shadow but also its *direction*. That is, shadows on the same side as the angle are counted positively, and shadows on the other side are measured as negative. With this choice of meaning for cosine, we get a single Pythagorean relation** $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ **valid for all angles.**
> （思考餘弦的擴充定義的一個好的方法，是重新定義一個角的餘弦為單位長的棍子之影子，我們釘住的不僅是影長，還包括方向。也就是說，影子與角同邊視為正，而在另一邊則視為負。有了餘弦的意義的這種選擇，我們得到對所有角都成立的單一畢氏關係式 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ 。）
>
> **On thing that this formula tell us is that angles and lengths don't directly relate to each other, the angle information must be delivered indirectly, via the cosine. It's as if angles need an attorney, in the form of their cosine, to represent them in their dealings with lengths. Angles and lengths live in different worlds and speak different languages. Sine and cosine serve as a dictionary, converting angle measurement into length measurements. (p. 127)**
> （這個公式告訴我們的一件事，是角（度）與長（度）並不直接關連，有關角的資訊必須藉由餘弦間接來傳遞。這就好比角需要一位律師，按它們的餘弦之形式，來代表它們與長周旋。角（度）與長（度）住在不同世界，而且講不同語言。正弦與餘弦如同字典，將角的度量轉譯成長的度量。）

從上述這兩段引文，我們可以注意到作者在其說明（**explanation**）中，也盡可能地引進敘事手法，善用比喻，幫助讀者更深刻地理解這些公式的意義。

至於喜歡解題的讀者，則不妨參考作者對海龍公式的推導之說明（**pp. 111-118**）。由於這個過程主要涉及代數演算，因此，作者不斷地強調美學元素在代數式子中，所發揮的主導角色，讓我們可以在枯燥乏味甚至「不知所云」的符號操弄中，保持清醒的心智與起碼的品味，如何漂亮解題？作者利用最淺近的例子，為我們做了最佳示範。附帶一提，張海潮最近書寫的普及文章（以他的《說數》為例）也頗有此風，值得我們一起鑑賞與推薦！

總之，本書正如《一個數學家的嘆息》一樣，都值得高度推薦！讀者（尤其是中小學教師）一定可以從本書領會許多教學啟發。其實，對於有心從事教育工作的大學數學系學生來說，本書尤其值得深入閱讀，以彌補數學課堂上可能學不到的數學素養。至於一般讀者呢，閱讀本書保證讓你的博雅指數破表，絕對值得一試。

參考文獻

洪萬生 **(2013).**〈大破大立 – 難得一見的數學教育好書〉，推薦序，保羅‧拉克哈特，《一個數學家的嘆息》，台北：經濟新潮，**2013**。

保羅‧拉克哈特 **(2013).**《一個數學家的嘆息》，台北：經濟新潮社。

1. **為節省影印成本，本通訊將減少紙版的的發行，請讀者盡量改訂 PDF 電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail 至 suhy1022@gmail.com**
2. **本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。**
3. **歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請 e-mail 至 suhy1022@gmail.com**
4. **本通訊內容可至網站下載。網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng/letter/hpmletter.htm**
5. **以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡**

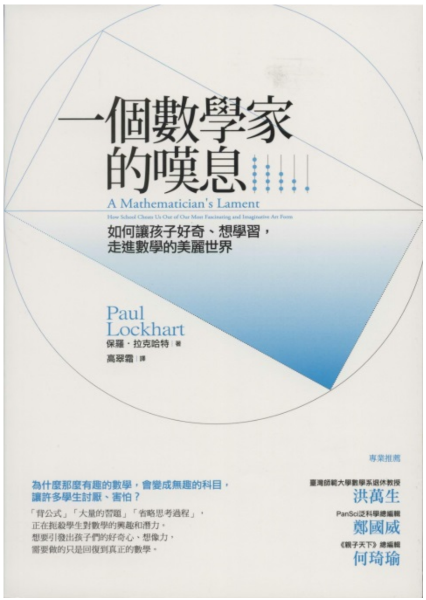
《HPM 通訊》駐校連絡員

日本：陳昭蓉 (東京 Boston Consulting Group) 、李佳嬅（東京大學）
德國：張復凱（Mainz 大學）
基隆市：許文璋（南榮國中）
台北市：英家銘（台北醫學大學）楊淑芬（松山高中）杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中）蘇俊鴻（北一女中）陳啟文（中山女高）蘇惠玉（西松高中）蕭文俊（中崙高中）郭慶章（建國中學）李秀卿（景美女中）王錫熙（三民國中）謝佩珍、葉和文（百齡高中）彭良禎（師大附中）郭守德（大安高工）張瑄芳（永春高中）張美玲（景興國中）文宏元（金歐女中）林裕意（開平中學）林壽福、吳如皓 (興雅國中) 傅聖國（健康國小）李素幸（雙園國中）程麗娟（民生國中）林美杏（中正國中）朱賡忠（建成國中）
新北市：顏志成（新莊高中） 陳鳳珠（中正國中）黃清揚（福和國中）董芳成（海山高中）孫梅茵（海山高工）周宗奎（清水中學）莊嘉玲（林口高中）王鼎勳、吳建任（樹林中學）陳玉芬（明德高中）羅春暉 (二重國小) 賴素貞（瑞芳高工）楊淑玲（義學國中）林建宏 （丹鳳國中）莊耀仁（溪崑國中）、
宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中）吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）林宜靜（羅東高中）
桃園縣：許雪珍、葉吉海（陽明高中）王文珮（青溪國中） 陳威南（平鎮中學）洪宜亭、郭志輝（內壢高中） 鐘啟哲（武漢國中）徐梅芳（新坡國中） 程和欽 (大園國際高中)、鍾秀瓏（東安國中）陳春廷（楊光國民中小學）王瑜君（桃園國中）
新竹市：李俊坤（新竹高中）、洪正川、林典蔚（新竹高商）
新竹縣：陳夢綺、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）
苗栗縣：廖淑芳 (照南國中)
台中市：阮錫琦（西苑高中）、劉雅茵（台中二中）、林芳羽（大里高中）、洪秀敏（豐原高中）、李傑霖、賴信志、陳姿研（台中女中）、莊佳維（成功國中）、李建勳（萬和國中）
南投縣：洪誌陽（普台高中）
嘉義市：謝三寶（嘉義高工）郭夢瑤（嘉義高中）
台南市：林倉億（台南一中）黃哲男、洪士薰、廖婉雅（台南女中）劉天祥、邱靜如（台南二中）張靖宜（後甲國中）李奕瑩（建興國中）、李建宗（北門高工）林旻志（歸仁國中）
高雄市：廖惠儀（大仁國中）歐士福（前金國中）林義強（高雄女中）
屏東縣：陳冠良（枋寮高中）楊瓊茹（屏東高中）黃俊才（中正國中）
澎湖縣：何嘉祥 林玉芬（馬公高中）
金門：楊玉星（金城中學）馬祖：王連發（馬祖高中）

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。懇請各位老師惠賜高見！

大破大立：難得一見的數學教育好書

洪萬生
台灣師範大學數學系退休教授



書名：《一個數學家的嘆息》（*A Mathematician's Lament*）
作者：保羅・拉克哈特（Paul Lockhart）
出版社：經濟新潮社，台北市
出版年：2013 年
出版資料：平裝本，149 頁
國際書碼：ISBN 978-986-6031-35-9

本書應該是我所見過的數學教育宣言中最基進的（**radical**）一篇了。作者保羅・拉克哈特（**Paul Lockhart**）是一位成功的專業數學家，公元 **2000** 年，他毅然轉入紐約市一所中小學任教（年級遍及 **K-12**），身體力行他認為有意義的數學教學活動。本書即是他的現身說法，因此，他對於美國目前中小學數學教育的現實之沈重但真誠的嘆息，似乎沒有幾個有識之士敢視而不見。

事實上，本書（分上、下兩篇）所呈現的願景，乃是中小學數學教育的一種烏托邦。通常我們面對烏托邦，似乎總是看看就好，大可不必認真。然而，我仔細閱讀（英文原文⊕中譯文）之後，對於總編輯林博華的邀序，多少有些猶豫與掙扎。對照我自己的數學經驗，我將如何推薦本書呢？我自己曾在台灣師大數學系任教將近四十年，主要授課如數學史都涉及未來與現職中學教師之專業發展，而且也曾指導過幾十位在職教師班的碩士生，所以，我對於（台灣）數學教育現實的興革，當然也有相當清晰的理想與願景。不過，經歷過那麼多的數學教育改革爭議之後，我覺得務實地訓練與提升教師的數學素養，恐怕是最值得把握的一條可行進路。

話說回來，作者的願景所引伸出來的策略，也並非完全不可行！譬如說吧，在本書結束時，作者語重心長地鼓勵老師「**需要在數學實在中悠遊。你的教學應該是從你自己在叢林中的體驗很自然地湧出，而不是出自那些在緊閉窗戶車廂中的假遊客觀點。**」因此，「**丟掉那些愚蠢的課程大綱和教科書吧！**」因為「**如果你沒有興趣探索你自己個人的想像宇宙，沒有興趣去發現和嘗試了解你的發現，那麼你幹嘛稱自己為數學教師？**」

對許多數學教師來說，要是丟掉課程大綱與教科書，大概會有一起丟掉洗澡水與嬰

兒的制式（**conventional**）焦慮感，儘管有一些教師平常教學時，根本不太理會課程大綱與教科書內容，而只是使用自己或同仁共同編輯的講義。然而，不管你是否贊同拉克哈特的主張，也不管他的主張是否能夠付諸實現，本書是老師、家長與學生都不容錯過的金玉良言，值得我們咀嚼再三。底下，我要稍加說明我大力推薦本書的三個理由。

本書上篇主題是「悲歌」，依序有〈數學與文化〉、〈學校裡的數學〉、〈數學課程〉、〈中學幾何：邪惡的工具〉以及〈標準數學課程〉等四節。下篇主題是「鼓舞」，但不分節論述。上篇文字曾由齊斯•德福林（**Keith Devlin**）安排，在 **MAA** 線上（**MAA Online**）每月專欄「德福林觀點」全文披露（**2008** 年 **3** 月），獲得大大超乎預期的迴響。在上篇一開始，作者拉克哈特利用虛構的音樂與繪畫之學習夢境，說明相關語言或工具的吹毛求疵，讓這些藝術課程之學習，變得既愚蠢又無趣，最終摧毀了孩子們創作模式那種天生的好奇心。或許上述夢魘並非真實，但是，「類比」到數學教育現場，卻是千真萬確。而拉克哈特的立論，是一般人容易忽略的數學知識活動特性：數學是一門藝術！至於它和音樂和繪畫的差別，只在於我們的文化並不認同它是一門藝術。拉克哈特進一步指出：

> **事實上，沒有什麼像數學那樣夢幻及詩意，那樣基進、具破壞力和帶有奇幻色彩。我們覺得天文學或物理學很震撼人心，在這一點上，數學完全一樣（在天文學發現黑洞之前，數學家老早就有黑洞的構想了），而且數學比詩、美術、或音樂容許更多的表現自由，後者高度依賴這個世界的物理性質。數學是最純粹的藝術，同時也最容易受到誤解。**

這種主張呼應了英國數學家哈帝（**G. H. Hardy**）之觀點：數學家是理念模式（**patterns of ideas**）的創造者。在他的《一個數學家的辯白》（***A Mathematician's Apology***）中，哈帝藉此宣揚他的柏拉圖主義（**Platonism**）。不過，拉克哈特卻將柏拉圖的理念（**ideas**）拉回到人類玩遊戲的層次：「**我純粹就是在玩。這就是數學 – 想知道、遊戲、用自己的想像力來娛樂自己。**」事實上，在遊戲情境中，吾人會基於天生的好奇，而開始探索。而這無非是人類學習活動的最重要本質所在。反過來，如果數學學習只是要求學生死背公式，然後在「習題」中反覆「套用」，那麼，「**興奮之情、樂趣、甚至創造的過程會有的痛苦與挫折，全都消磨殆盡了。再也沒有困難了。問題在提出來時也同時被解答了 – 學生沒事可做。**」對於這種強調精準卻無靈魂地操弄符號的文化及其價值觀，拉克哈特利用簡單例證戳破它的虛幻，這是我大力推薦本書的第一個理由。

在〈學校裡的數學〉這一節中，拉克哈特指出教改迷思，在於它企圖「要讓數學變有趣」，以及「與孩子們的生活產生關連」。針對這兩點，他的批判非常犀利：「**你不需要讓數學有趣 – 它本來就遠超過你了解的有趣！而它的驕傲就在與我們的生活完全無關。這就是為什麼它是如此有趣！**」顯然為了達到「有趣」與「關連」的目的，教科書的編寫難免「牽強而做作」。譬如，為了幫助學生記憶圓面積和圓周公式，拉克哈特建議：與其發明一套圓周先生（**Mr. C**）和面積太太（**Mrs. A**）的故事，不如敘說阿基米德甚至劉徽有關圓周率的探索史實，說不定更能觸動學生的好奇心靈。這種強調發生認識論（**genetic epistemology**）的歷史關懷，也與他批判數學課程的缺乏歷史感互相呼應。

拉克哈特對於數學課程的僵化之批判，還擴及它所連結的「階梯迷思」，他認為這種一個主題接一個主題的進階安排，除了淘汰「失敗的」學生之外，根本沒有（其他）目標可言。因此，學校裡的數學教育所依循的，「**是一套沒有歷史觀點、沒有主題連貫性的數學課程，支離破碎地收集了分類的主題和技巧，依解題程序的難易度湊合在一起**」。相反地，「**數學結構，不論是否具有實用性，都是在問題背景之內發明及發展出來的，然後從那個背景衍生出它們的意義**」。

或謂中學幾何可以滿足此一智性需求，不過，拉克哈特卻將它稱為「邪惡的工具」。作者在〈中學幾何：邪惡的工具〉這節中，指出數學證明的意義在於「**說明，而且應該說明得清楚、巧妙且直截了當**」，同時，只有當你想像的物件之行為違反了直覺，或者有矛盾出現時，嚴謹的證明才有其必要，而這當然也符合歷史真實。基於此，他嚴厲批判「兩行證明」（**two-column proof**）既沈悶又「**沒有靈魂**」，學生只是被訓練去模仿，而不是去想出論證！

在作者深刻批判學校數學、課程綱要以及幾何證明之後，他還揭露了一個目前通行的「標準數學課程」之真相，這個戳破學校數學（**school mathematics**）神話的深刻反思，是我大力推薦本書的第二個理由。

在上篇解構性的「大破」之後，拉克哈特在本書下篇中，為我們貢獻了令人鼓舞的「大立」，這是我大力推薦本書的第三個理由。在本篇中，拉克哈特想像了一個數學實在（**mathematical reality**），其中「**充滿了我們為了娛樂自己而建構出來的（或是偶然發現）的有趣又可愛的架構。我們觀察它們、留意它們的模式、嘗試做出簡捷又令人信服的敘述，來解釋它們的行為**」。至於如何做數學？拉克哈特利用實例演示，啟發我們「**與模式遊戲、注意觀察事物、做出猜測、尋找正反例、被激發去發明和探索、製做出論證並分析論證，然後提出新的問題**」。此外，他還特別提醒：小孩子都知道學習和遊戲是同一回事。可惜，成年人已然忘卻。因此，他最後給讀者的實用忠告是：玩遊戲就對了！做數學不需要證照。數學實在是你的，往後的人生你都可以悠遊其中。

總之，本書作者分享了他自己基於好奇，探索數學知識活動被忽略面向的深刻體會，其中他認為數學如同音樂、繪畫及詩歌一樣，也是一門藝術。同時，學習與遊戲是同一回事。因此，在遊戲的情境中，基於人類天生的好奇心而探索模式，才是學習數學的正道。這也部份解釋了何以他那麼重視數學史的殷鑑，因為數學都是從歷史脈絡（**context**）產生，並因而獲得意義。

對於教師或甚至家長來說，如果你覺得本書的主張太過基進，不妨參考作者的玩數學比喻，那麼，你對數學學習一定會有全新的體會。根據寵物書籍的說明，離開幼兒階段還喜歡遊戲的物種，只有成年人和成犬。人類幼童利用遊戲來學習包括數學在內的各種事物。如今，我們身為成年人，甚至有幸帶領小孩子學習，為什麼不可繼續玩下去呢？

附記：本文是我為本書撰寫的推薦序。

由圓的切點弦方程引發的思考：再談計算圓錐曲線切線的方法（I）

靳衛軍
山西省長治市華北機電學校圖書館

只有理解人類如何獲得某些事實或概念的知識，我們才能對人類的孩子如何獲得這樣的知識作出更好的判斷。

— 喬治·波利亞

如何求圓的切點弦方程式，是中學數學中常見的問題，也是高考（大專聯考）、數學競賽中的熱門問題。有一些文章從不同角度均做過論述，尤其中國大陸各大數學刊物上，有關切點弦方程及切點弦性質在解題中應用的研究就相當多。高考（大專聯考）、數學競賽試題激發了教師對切點弦性質的研究與發現，反過來，這些性質在解題中的應用，也使得解題方法多姿多彩。圓錐曲線切點弦方程是其解題的基礎，如何求切點弦方程、如何講解這一內容，就成為了數學教學中的首要問題。

事實上，求圓錐曲線切點弦方程的關鍵，是求圓錐曲線的切線方程。《數學傳播》有一篇〈如何計算圓錐曲線的切線〉（**33** 卷 **2** 期）提到：「如何求圓錐曲線的切線方程式，一直是個難題，尤其是對一般高中生的程度來說」。本文對高中生計算圓錐曲線切線解題過程中存在的問題，做了進一步思考。這些內容是中學數學基本常見的題材，本文試圖用全新的視角，探討與說明這一系列問題。下面，我們通過對具體問題的反思，逐漸展開說明。

1.如何求圓的切點弦方程

題目一：已知過圓 $x^2+y^2=r^2$ 外一點 $M(x_0,y_0)$ 作圓的兩條切線，其中切點分別為 M_1、M_2，求經過兩切點 M_1、M_2 的直線方程。

這道題目本身的解答思路是自然、簡單的，只要求出兩切點 M_1、M_2 的座標即可得其直線方程為：

$$y-y_1=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_1) \text{ 或者 } \frac{y-y_1}{y_1-y_2}=\frac{x-x_1}{x_1-x_2} \qquad \textbf{(*)}$$

1.1 功底扎實、令人生畏的解法

(1) 首先求出過圓外一點 $M(x_0,y_0)$ 的兩條切線方程

設過圓外一點 $M(x_0,y_0)$ 的切線方程為：$y-y_0=k(x-x_0)$，再利用相切條件：圓心到切線的距離等於半徑或者由切線方程與圓的方程聯立方程組根據判別式等於零，求得 k 從而得到兩條切線方程。

(2) 其次，由兩條切線與圓的方程聯立方程組求出兩切點 M_1、M_2 的座標。

(3). 最後，由兩切點 M_1、M_2 的座標得到過兩切點 M_1、M_2 的直線方程。

雖然這一解題思路自然、簡單，但是，真正地按照這一思路計算下去，卻顯得有些繁瑣、枯燥，缺乏功底扎實的計算能力，恐怕是很難完成。

靠蠻力計算，可以得到經過兩切點M_1、M_2的直線方程為：$x_0x+y_0y=r^2$。我不知道是否有人嚴肅認真、堅忍不拔地對待過這一小問題。這一解法確實有點令人望而生畏。精巧的證明令人羡慕，靠蠻力得到的結果似乎缺乏創造性或許有些讓人看不起。但是，大部分工作都是平凡、瑣碎的，沒有這些積累，恐怕很難產生創造性的飛躍。

1.2 列方程組觀點下的解法

我們知道，只要求出M_1、M_2兩點的座標即可得到直線M_1M_2的方程。但是，上面求兩切點M_1、M_2座標的方法太繁瑣。如果能直接通過列方程組求出兩切點的座標就簡單了！能不能列方程組、如何列方程組？設兩切點的座標$M_1(x_1,y_1)$、$M_2(x_2,y_2)$，我們知道經過圓上M_1、M_2點的切線方程為：l_1：$x_1x+y_1y=r^2$ 、l_2：$x_2x+y_2y=r^2$ 。又因為l_1、l_2過$M(x_0,y_0)$點，所以，由已知條件得方程組**(Ⅰ)**：

$$\textbf{(Ⅰ)}\begin{cases} x_1x_0+y_1y_0=r^2 & (1) \\ x_2x_0+y_2y_0=r^2 & (2) \end{cases}$$

經過觀察雖然通過這個方程組無法解出$M_1(x_1,y_1)$、$M_2(x_2,y_2)$，但是由$(1)-(2)$，得$x_0(x_1-x_2)+y_0(y_1-y_2)=0$ 。

$\because x_1\neq x_2$，$\therefore \dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\dfrac{x_0}{y_0}$。如果把其代入**(*)**，由此所求直線方程為

$y-y_1=-\dfrac{x_0}{y_0}(x-x_1)$ **(3)**。但是，我們還是不知道所求直線方程。似乎還在迷霧中。雖然不盡人意，但是這樣要比以前的形式略微有點進步。潛意識中我們把直線方程**(3)**化為了一般式：$x_0x+y_0y-x_0x_1-y_0y_1=0$。到此突然柳暗花明又一村！由已知**(1)**我們得到了所求直線方程$x_0x+y_0y=r^2$ **(4)**。

1.3 回顧與反思

如果拋開字母形式上的差異，我們發現$x_1x_0+y_1y_0=r^2$ **(1)**：$x_2x_0+y_2y_0=r^2$ **(2)**：$x_0x+y_0y=r^2$ **(3)** 三式本質相同，即均可表達為$x_0x+y_0y=r^2$的形式**(3)**。這一現象純屬巧合、還是有其原因？經過反思發現：因為l_1：$x_1x+y_1y=r^2$ 、l_2：$x_2x+y_2y=r^2$都過$M(x_0,y_0)$點，所以，切線MM_1、MM_2均過點$M(x_0,y_0)$，因此，$x_1x_0+y_1y_0=r^2$、$x_2x_0+y_2y_0=r^2$，所以，$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$為方程$x_0x+y_0y=r^2$的兩組解。由「兩點定線」的原理，所以直線M_1M_2的方程為$x_0x+y_0y=r^2$。問題竟然如此簡單！確實出乎意料。

1.4 筆者的反思與教學經歷

到此，筆者突然想起《普通高中新課程問題導學案》（數學必修 **2**，人教 **A** 版）P_{122}中的一道習題。

題目二：已知兩直線$l_1: A_1x+B_2y+10=0$和$l_2: A_2x+B_2y+10=0$，若l_1與l_2的交點為$P(2,1)$，求過兩點$M(A_1,B_1)$，$N(A_2,B_2)$的直線方程。

筆者在拙文〈由剖析一道習題解題思路引發的思考〉中，曾經對此題目的解題思路做了詳盡的剖析。

當時筆者反思本題時，發現如果拋開字母形式上的差異，**(1)**、**(2)**、**(3)**式的本質相同，亦即均可表達為**(3)**。經過反思問題出人意料的簡單，這一戲劇性的變化留下了深刻的印象，只是缺乏一般性、並沒有太在意。筆者從未曾想到在求圓的切點弦方程時，再次遇到了這一奇特現象。走完解題目一的過程，才發現解題目二的方法與求圓的切點弦方程毫無二致。最終，筆者發現了求圓錐曲線切點弦方程的簡潔方法。再反思一下原來求圓錐曲線切點弦方程的簡潔方法，實質上就是把問題轉化為題目二。兩道貌似無關的題目竟然本質上是一樣的，確實給筆者留下了深刻的印象。

筆者不知道是否有人不經過反思，直接由**(I)**就洞察到這一妙解。雖然在反思題目二時，看到可以直接由**(I)**就能得到這一妙解、感到不可思議，但是，這次卻是只有重複了題目二的過程，才看到可以直接由**(I)**就能得到這一妙解。不可否認天才總是存在的。或許對於天才來說這一解法是非常自然、合理的，任何理由的解釋都顯得有些笨拙及多餘。或許有人認為所謂的天才，是省略了前面的思考過程而已。也許用普通人的思維方式，是永遠無法猜測與理解的。

題目二在求圓的切點弦方程，都可以根據「兩點定線」的原理，由**(I)**直接得出結果。兩次使用這一偶然的妙解與特殊的技巧，確實會給人留下比較深刻的印象。在以後的解題中是否還會遇到？這一問題與我們本文的主題之一 — 如何培養舉一反三的能力 — 密切相關。如果機緣合適的話，還會遇到這一技巧。使用這一技巧本身並不是最重要的，最重要的，是通過解題訓練可以培養人的思維習慣、反思能力，以及洞察力。深刻地把握這一技巧，在某種程度上反映了一個人的數學素養。

1.5 一個有趣現象引發的探究

我們知道，如果$M(x_0,y_0)$為圓$x^2+y^2=r^2$上一點，過圓上$M(x_0,y_0)$點的切線方程為：$x_0x+y_0y=r^2$。由題目一我們知道了：如果$M(x_0,y_0)$為圓$x^2+y^2=r^2$外一點，則$x_0x+y_0y=r^2$為圓的切點弦方程。這一有趣的現象或許會引起人們的好奇心，自然會提出問題：如果$M(x_0,y_0)$為圓$x^2+y^2=r^2$內一點，那麼，$x_0x+y_0y=r^2$為圓的什麼方程？或者說方程$x_0x+y_0y=r^2$是否具備幾何意義？具備什麼樣的幾何意義？數學內容豐富多彩、蘊含著深刻的思想方法，為因材施教提供了廣闊的空間。不過，有興趣的讀者可以自行探討，在此就不做詳細分析了。

1.6 求圓的切點弦方程的另一方法

由已知我們知道M_0、M_1、O、M_2四點共圓，由此四點確定的圓方程為：$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\frac{x_0^2+y_0^2}{4}$。因為經過兩切點$M_1$、$M_2$的直線是兩圓的公共弦，由兩圓相減便可以得到圓的切點弦方程：$x_0x+y_0y=r^2$。

由此，我們比較簡單地得到了圓的切點弦方程，但是，這種方法無法推廣到求圓錐曲線切點弦方程。

1.7 求圓的切點弦方程的教學方法與高考（大專聯考）

求圓的切點弦方程是解析幾何中的傳統題目，只要求出兩切點的座標即可得其直線方程，其方法自然且簡單，有一些學生感到計算複雜難以下手。因為在高考與競賽中，學生利用圓錐曲線切點弦方程可以便捷地解題，圓錐曲線切點弦方程成為了教學熱點。如何快速掌握求圓錐曲線切點弦方程的方法、如何突破這一難點？如何講解？數學刊物上關於這一題材的文章相當常見，大體有三類。

《數學通報》一篇題為「切點弦方程及其它」（**1990** 年 **11** 期）的文章，介紹了通過輔助命題求圓錐曲線切點弦方程的方法及應用，而沒有談如何想到這一方法。雖然僅僅為解決這類題目額外補充知識會增加教學負擔，課堂教學很少採用這一方法，但是，文章中的方法卻展現了數學方法多姿多彩的一面。《數學傳播》季刊刊登了一篇題為「如何計算圓錐曲線的切線」（**33** 卷 **2** 期）的文章，求圓錐曲線切點弦方程成為文章中新方法的副產品。

《數學教學》一篇題為「教學圓的切線方程的美育價值」（**1996** 年第 **6** 期）建議：讓學生首先仔細觀察 **(1)**、**(2)** 兩式，然後引導他們回憶「點在直線線上的條件」和「兩點定線」的原理，很快得出答案。這一講解方法是數學教學刊物上較為流行的方法，或許也應該代表了課堂教學中流行的教法。刊物上的相關文章更多的，是著重於介紹線切點弦方程在解題中的應用，只是在文章前面，按照流行的觀點簡單介紹一下求圓錐曲線切點弦方程的方法。中國大陸的數學教育類刊物眾多，觀點大同小異、水準參差不齊的文章恐怕是目不暇接。有興趣的話通過網路查到許多這方面題材的文章。

當然，亦有文章認為「顯然，這種設而不求的方法實在難以想到，其結果更是讓人覺得意外，怎麼與問題 **1**（筆者注：問題 **1** 為經過圓 $x^2+y^2=r^2$ 上一點 $M(x_0,y_0)$ 的切線方程為 $x_0x+y_0y=r^2$）的結論雷同？既然如此，同學們能否另闢蹊徑求切點弦方程？」《數學教學》一篇題為「圓的切線和切點弦方程」（**2009** 年 **8** 期）的文章談到「關於『圓的切線和切點弦方程』的教學，我已經嘗試過多次，但是每次教學後自己總感覺不夠滿意。最近，我通過『向量的數量積』解決這個問題，進行了一次教學探究，從數形關係的本質入手，終於感覺『爽』了一把」。文章提出了自己的教學見解。

雖然這種設而不求的方法實在難以想到，這種教法具有簡單、明瞭之特點避免了繁瑣的計算。有的學生可以很快領悟這一方法，有的通過多次反復強化訓練也能夠掌握，所以，在教學中比較流行。這種方法確實行之有效，能讓學生在高考中比較輕鬆容易地取得分數。《中學數學》一篇題為「圓錐曲線切點弦所在直線方程」（**2012** 年 **2** 期）的文章，以 **2008** 年全國高考理科數學（江西卷、山東卷）試題為例，在解完山東卷試題評注到「由霧裏看花到水落石出，由遙不可及到快速接近目標。一些結論能幫助我們用『縮略式』思維方式思考問題，快速接近問題、解決問題，然後再回過頭來補證這一結論。將一道難題變成跳一跳能夠夠得著的中檔題，何樂而不為？」。**2013** 年高考試題再一次證明了這種方法的成效。

我們在〈由反三角函數教學引發的哲學思考〉（《臺灣數學教師**(**電子**)**期刊》第 **34** 期）一文中，剖析了教學生反思的教學和單純講解解題技巧的教學有著本質的不同。雖然從理論上講通過反思才能對問題有本質的理解，學生學會自主反思是學習的一個重要

環節，但是，這一過程卻是艱辛的。

1.8 對解題教學培養舉一反三能力的一點感悟

筆者詳細地剖析了題目二的解題思維過程，學生認為問題很簡單、平凡得不值一提甚或不過如此。除了就事論事解決了小問題收穫不大。教學效果似乎並不理想。教師的努力結果似乎是尷尬的。不知學生認為怎麼才叫做會學會了思考，沒有人能提供一把可以打開一切門戶、解決所有問題的魔鑰匙。但是真正的思考過程是平凡、樸實的。不可否認，經過剖析解題思路大多數學生理解上並不存在困難，甚至會感到簡單的不值一提。對此現象筆者想要詢問、探討的是學生真正地理解了嗎？對此或許學生並不認同甚至會激起強烈的反對 — 怎麼不理解？由於用列方程組的思想方法比較常見、簡單，在缺乏對比的情況下人們認為這一方法是理所當然的，詢問是否真正地理解了似乎有些顯得無知、無聊。

題目二的解法看似平凡，這一方法學生都懂了但是真正的理解了嗎？或者說是否學會了「依葫蘆畫瓢」、有所創新？解題實踐中情況究竟如何？求圓的切點弦方程的解題教學情況並非如此簡單、樂觀。重新反思、一旦說明這一方法又會感到簡單的不值一提。可是為什麼想不到呢？教師苦心孤詣地詳細地剖析題目二解題思維過程的努力結果似乎是尷尬的。

退一步講，在沒有剖析題目二的前提下，用列方程組的觀點求圓的切點弦方程這一思想方法並不陌生亦不難，靈活應用列方程組的觀點不應該有太大的難度。為什麼想不到呢？如何培養舉一反三的能力？當然，解題方法是多種多樣的我們並不是糾纏於個別題目別致、奇巧的解法也不是簡單地就事論事看看答案正確與否……我們探討的問題是：能聽懂但是想不到的現象在教學中是存在的，其原因是什麼？如何解決教學中的這一困境？

教學中的例子從一個側面說明培養舉一反三的能力是一件艱苦、困難的事情，無法取得應試教育立竿見影的效果甚或成效微乎其微。或許有人認為教學生學會自主反思是如此費力而效果並不理想還是應試教育的方法好。毋庸諱言，在中國大陸高考就是指揮棒，高考分數是衡量教學的核心、重要標準。除了應試的需求，通過解題教學過程中究竟培養了什麼能力、教學效果如何？如何才能達到目標？如何檢驗？對此系列問題的認識決定了教學的努力方向，是否值得反思探討？

兩種不同的方法都可以說清楚這一妙解並讓學生掌握，在高考取得分數。從應試教育的角度，來探討兩種不同教學差異的價值，僅僅是哪一個更適合於課堂教學，哪一種方法更有利於快速、大面積地取得分數。本文提出的方法思路自然，從理論上講學生應該能夠舉一反三，儘管實踐情況不盡人意，但是，用波利亞解題表指導、啟悟學生可以順乎自然地給出合情合理的解法。一種容易理解的方法更利於大多數學生掌握。當然對於天才敏銳深刻的洞察力來說顯得笨拙且多餘，不過，這種學生並不多見。而這種設而不求的方法突然天降、難以想像，多數學生需要通過多次反復強化訓練才能夠掌握。博聞強記確實可以幫助在考試中取得分數。但是，數學中的題目眾多，靠博聞強記取勝終究不是辦法。只有培養舉一反三的能力，才是根本出路。

如何培養舉一反三的能力？對此，或許是見仁見智。通過不斷深入剖析、反思解題思維過程，艱苦的努力雖然並不能使得每個學生具備舉一反三的能力而成為解題高手，但在過程中，學生至少可以感到數學是鮮活的、同時，在過程中，他們也能夠學會一點

鑒賞能力。

2.再談如何計算圓錐曲線的切線

2.1 緣起

從本文的觀點看，求圓的切點弦方程及 **2008**、**2013** 年高考題的解答的關鍵是求圓錐曲線的切線方程。

羅驥韡在他的〈如何計算圓錐曲線的切線？〉（《數學傳播》**33** 卷 **2** 期）中，指出：「計算圓錐曲線的切線方程式，一直是個難題，尤其是對一般高中生的程度來說，更何況針對不同的圓錐曲線**(**橢圓、拋物線、雙曲線等**)** 而言，又有不同的切線公式，感覺上既不統一又難以記憶，所以我在這裏要介紹一種演算法，一種統一的演算法，讓你不管面對何種圓錐曲線**,** 都可以直接應用的公式」。其中介紹的方法對於許多學生來說，未必是可以輕易想出的，但是，就像欣賞音樂一樣，跟著音樂的律動和旋律，同樣可以體會音樂之美。通過欣賞數學家是如何面對窘境**,** 繞過複雜計算的深淵，繼續邁向推理解題的大道，人們會由衷地發出讚歎之聲，體驗到繁重的計算勞動減輕了或解除了，而創造性的勞動更多了，也能夠讓學生有更寬廣的思路。

欣賞之餘產生了好奇。尋求容易掌握、計算量小的方法是數學不斷努力追求的目標之一。下面，我們將進一步思考高中知識解決曲線切線方程的方法。

2.2 判別式法求切線方程的局限性

求圓錐曲線的切線的問題分為兩類。過圓錐曲線上一點$M_1(x_1,y_1)$求其切線方程、過圓錐曲線外一點$M(x_0,y_0)$求其切線方程。傳統、經典、流行的方法為：設過$M(x_0,y_0)$與圓錐曲線相切的直線方程為：$y-y_0=k(x-x_0)$，由直線方程與與圓錐曲線的方程聯立方程組，根據判別式等於零，求得k從而得到切線方程。

上述羅驥韡一文，是以一個普遍的理論問題即如何得到判別直線與與圓錐曲線是否相切的法則，一覽無遺地暴露出了判別式法的致命弱點、缺陷**[**
「的確**,** 我們是遇上了瓶頸**,** 我們遇到變數符號太多太長、複雜難以處理的窘境」。

2.3 反思一：求過圓錐曲線上一點的切線方程的方法

雖然判別式法存在致命的弱點、缺陷，現在的高中生已經掌握了初步的微積分知識，我們用這一新的工具，可以便捷地得到過圓錐曲線上一點$M_1(x_1,y_1)$的切線方程。中國大陸數學參考資料介紹了切線方程公式的規律，許多數學教科書或參考書上都可找到。為了本文完整，不妨重新做一推導。

二次曲線的一般形式為$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$，為了表達切線方程的便利我們記為$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$（******）。求過二次曲線（******）上一點$M_1(x_1,y_1)$的切線方程的實質是求切線方程的斜率k。

(**)式兩本對x求導，得：

$$2ax+2by+2bxy'+2cyy'+cd+2eyy'=0\text{ ，}(bx+cy+e)y'=-ax-by-d$$

$\therefore \quad y' = \dfrac{-(ax+by+d)}{bx+cy+e}$

則二次曲線（* *）在點 $M_1(x_1, y_1)$ 處切線的斜率為： $y' = -\dfrac{(ax_1+by_1+d)}{(bx_1+cy_1+e)}$

則過點 $M_1(x_1, y_1)$ 的切線方程為： $y - y_1 = -\dfrac{(ax_1+by_1+d)}{(bx_1+cy_1+e)}(x - x_1)$

化簡整理得： $ax_1x + b(x_1y + y_1x) + cy_1y + d(x_1 + x) + e(y_1 + y) + f = 0$

即： $(ax_1 + by_1 + d)x + (bx_1 + cy_1 + e)y + (dx_1 + ey_1 + f) = 0$

這一公式的規律比較簡單，容易掌握。求過圓錐曲線上一點 $M_1(x_1, y_1)$ 的切線方程公式的規律為：用 x_1x 代替原方程中的 x^2；用 y_1y 代替原方程中的 y^2；用 $\dfrac{x_1+x}{2}$ 代替原方程中的 x；用 $\dfrac{y_1+y}{2}$ 代替原方程中的 y；如果有 xy 項, 則用 $\dfrac{x_1x+y_1y}{2}$ 來代替；原方程中的常數不變。操作上簡單、方便。無論是直接應用這一公式的結果還是應用推導公式的思想方法解題都不困難，大家可以用具體例子印證一下。

彭捷在他的〈怎樣應用切點弦方程解題〉（《中學數學》**1999**年**12**月）中，談到應用切點弦方程解題時，介紹了過二次曲線外一點 $M(x_0, y_0)$ 切點弦方程的特點。其規律與上述的類似。但作者沒有談公式的方法及來源。忽略過程及方法的來源，但重視結果的應用，是該篇文章的特點。

2.4 反思二：求過二次曲線外一點 $M(x_0, y_0)$ 的切線方程

單純利用微積分知識，無法求過二次曲線外一點 $M(x_0, y_0)$ 的切線方程，而判別式存在致命的弱點、缺陷，那麼，能否有比較簡單、容易掌握的方法？我們先看看是否有其他方法求過二次曲線外一點 $M(x_0, y_0)$ 的切線方程。

求過二次曲線外一點 $M(x_0, y_0)$ 的切線方程有兩種途徑：根據判別式等於零求切線的斜率 k 或者求出切點的座標。學生熟知、常用的是判別式法。我們知道根據判別式等於零求切線的斜率 k 比較繁瑣。那麼，能否求出切點的座標？求出切點座標的方法是否同樣繁瑣？我們不妨先通過具體的例子，看一下如何求出切點的座標，然後，再對兩種方法做一比較。

題目三：求過點 $M(16,8)$ 且與雙曲線 $\dfrac{x^2}{64} - \dfrac{y^2}{16} = 1$ 相切的切線方程。

簡析：因為 $M(16,8)$ 在雙曲線之外，所以過 $M(16,8)$ 的切點弦方程為： $\dfrac{16x}{64} - \dfrac{8y}{16} = 1$ 。

由切點弦方程與雙曲線的方程聯立方程組即可求得切點的座標。

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{64} - \dfrac{y^2}{16} = 1 \\ \dfrac{16x}{64} - \dfrac{8y}{16} = 1 \end{cases} \qquad \text{解之得} \begin{cases} x = 10 \\ y = 3 \end{cases}$$

所以得切線方程為：$\frac{10x}{64}-\frac{3y}{16}=1$ 即$5x-6y-32=0$

反思：根據切點弦方程與雙曲線的方程聯立方程組求出切點的座標應該是兩個，但是只求出了一個切點的座標。奇怪嗎？難道我們的方法、結果是錯誤的？經過經驗，$5x-6y-32=0$確實為切線方程。

如果只求出一個切點的座標，那麼說明錯誤的根源在於我們的題設是錯誤的。即過$M(16,8)$的切點弦方程是不存在的。我們可以證明，過點$M(16,8)$與雙曲線相切的切線只有一條。

錯誤的方法卻得出正確的結果，奇怪嗎？對於理論依據不足的解法是直接予以否定，還是小心翼翼地進一步計算？如果進一步計算結果正確，如何對待貌似有理或者似是而非、歪打正著、理論依據不足的解法？

在此，我們可以看到盲目套用這一方法，容易忽視切點弦方程存在性的問題。如何快速檢驗切點弦方程存在性，是這種設而不求的方法的缺陷。

上述解題方法的理論基礎雖然並不太嚴謹，但是，有其合理成分 — 如果切點弦方程存在仍然正確的話。只要做適當修正，方法不僅是嚴謹，而且也比較容易掌握。

設$M_1(x_1,y_1)$為雙曲線$\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{16}=1$上的一點。則過$M_1$的切線方程為$l$：$\frac{x_1x}{64}-\frac{y_1y}{16}=1$。又因為切線$l$經過$M(16,8)$，所以$\frac{16x_1}{64}-\frac{8y_1}{16}=1$ 。又因為點$M_1(x_1,y_1)$在雙曲線上，所以得

方程組：$\begin{cases}\frac{{x_1}^2}{64}-\frac{{y_1}^2}{16}=1\\ \frac{16x_1}{64}-\frac{8y_1}{16}=1\end{cases}$ 解之得$\begin{cases}x_1=10\\ y_1=3\end{cases}$

所以得切線方程為$5x-6y-32=0$

本小節兩種方法的計算結果一致，是偶然還是歪打正著？

（未完待續）