HPM通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系退休教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）
助理編輯：黃俊瑋（台灣師大數學所研究生）
編輯小組：蘇意雯（台北市立教育大學）蘇俊鴻（北一女中）
黃清揚（福和國中）葉吉海（陽明高中）
陳彥宏（成功高中）陳啟文（中山女高）
王文珮（青溪國中）黃哲男（台南女中）
英家銘（台北醫學大學）謝佳叡（台灣師大數學系）
創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng

第十七卷 第五期 目錄（2014年5月）

🗎 「轉移矩陣」二三事(1)：
高中課本中穩定狀態的求法
🗎 由圓的切點弦方程引發的思考：
再談計算圓錐曲線切線的方法（II）
🗎 推薦毛爾的《毛起來說無限》

# 「轉移矩陣」二三事(1)：
# 高中課本中穩定狀態[1]的求法

林倉億
國立台南一中

## 1. 前言

現行的高中課本中，轉移矩陣基本上只有二階、三階兩種情形，四階以上的轉移矩陣，無論是在課本中還是考試測驗中，幾乎都見不到，目的不外乎是避免過於複雜的討論與計算。筆者從實際的高中教學經驗得知，轉移矩陣及馬可夫鏈的教學有兩個大挑戰。第一個是依據題意寫出轉移矩陣，這對許多學生來說，是一道非常困難的關卡，但至少所需要的工具皆已俱備，只要從二階的情形慢慢引導，筆者大部分的學生都能夠理解。

至於第二個就麻煩多了，那就是馬可夫鏈的穩定狀態之說明。首先，在現行的課程架構下，學生在學習馬可夫鏈之前，並沒有極限的概念，所以，嚴謹的數學定義在這裡是派不上用場的！教師們只能在黑板上「腳踏實地」地多寫出幾項，再輔以「舌燦蓮花」，讓學生「用眼觀察、用心體會」。至於穩定狀態的解法就是利用$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$或

$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$，其中$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$是轉移矩陣，再加上$x+y=1$或

---

[1] 本文所稱的「穩定狀態」是：設 $A$ 是一個 $n$ 階轉移矩陣，對於任意一個 $n\times 1$ 階的狀態矩陣 $X_0$（各元均非負且總和為 1），若當 $k$ 趨近於無限大時，$A^k X_0$ 會趨近唯一的 $n\times 1$ 階矩陣 $X$，就稱 $X$ 為轉移矩陣 $A$ 的「穩定狀態」。

$x+y+z=1$這個條件，求出穩定狀態$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$。上述的解法在台灣的高中數學課本中已行之有年了，大家也都習以為常了。不過，上述的解法背後牽涉到兩個值得探究的問題：

**(1) 為什麼**$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$**與**$\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$**一定是無限多解？**

**(2) 在沒有穩定狀態的時候，利用上述的解法，依然可以求出**$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$**、**$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$**，這又是為什麼？**

關於問題(1)，早年筆者都是存著僥倖的心態：如果有學生問就回答；沒問，就船過水無痕。可是，生不從師願，每次都有學生問這個問題，所以，這幾年筆者就化被動為主動，直接在課堂上拋出這個問題，並徵求解答。或許有讀者會好奇，如果在列式時就少用一個未知數，那問題(1)不就不存在了嗎？以三階為例，若將$z$改寫成$1-x-y$，再利用$\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\1-x-y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\\1-x-y\end{bmatrix}$求出$x$、$y$之值，那此種解法面臨的問題將會是：

**從上述的等式中可列出三個二元一次方程式**$\begin{cases}ax+by+c(1-x-y)=x\\dx+ey+f(1-x-y)=y\\gx+hy+i(1-x-y)=1-x-y\end{cases}$**，為什麼它們恰有一組解？為什麼不會有無解或無限多解的情形？**

不同的穩定狀態求法衍生出不同的問題，但兩者是等價的。筆者個人認為問題(1)不僅比較好回答，而且可以應用學生剛學過的內容來回答，詳情容筆者在後文說明。

如果說問題(1)是「普通級」或「輔導級」的問題，那問題(2)絕對是「限制級」的！現行的課程並不包含判斷是否會產生穩定狀態，所以，課本例題、習題都是在有穩定狀態的前提下，才會要學生去求出穩定狀態。久而久之，就容易忽略此解法背後更深刻的數學意義。高中老師不妨比較一下各版本教科書關於穩定狀態的內容，然後很可能就會陷入「究竟要教給學生多少」的疑惑，因為，差異實在是不小！[2]

[2] 關於各個教科書中「馬可夫鏈穩定狀態」內容的比較，筆者將另文討論。

無論是問題(1)還是問題(2)，都可歸結於矩陣的特徵值、特徵向量。或許有些讀者已經淡忘特徵值、特徵向量了，筆者先利用下一節做簡單的介紹（熟悉此主題的讀者可略過此節），然後在第三節中再用特徵值、特徵向量來說明問題(1)與問題(2)。最後一節，則是筆者教學上的回答方式，可以取巧地迴避特徵值、特徵向量這兩個名詞的出現。

## 2. 矩陣的特徵值與特徵向量[3]

讓我們先從簡單的二階方陣看起。給定方陣 $A=\begin{bmatrix}1&4\\3&2\end{bmatrix}$，哪些 $2\times1$ 階矩陣 $X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ 會滿足 $A\cdot X=\lambda\cdot X$，其中 $\lambda$ 是實數，而非矩陣？方程式 $A\cdot X=\lambda\cdot X$ 的意義就是 $X$ 在乘以 $A$ 之後，會變成原來的 $\lambda$ 倍。找法很簡單，算就對了，只不過借助一個小技巧，就是 $\lambda\cdot X=\lambda\cdot I\cdot X$，其中 $I$ 是單位方陣：

$$\begin{bmatrix}1&4\\3&2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\lambda\cdot\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&4\\3&2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}1-\lambda&4\\3&2-\lambda\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

若 $\begin{bmatrix}1-\lambda&4\\3&2-\lambda\end{bmatrix}$ 是可逆方陣，那 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-\lambda&4\\3&2-\lambda\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$。因此，如果我們希望找到的 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$，那 $\begin{bmatrix}1-\lambda&4\\3&2-\lambda\end{bmatrix}$ 一定要不可逆才行，即其行列式值

$\det\left(\begin{bmatrix}1-\lambda&4\\3&2-\lambda\end{bmatrix}\right)=0$，由此可得：

$(1-\lambda)(2-\lambda)-3\cdot4=0\Rightarrow\lambda^2-3\lambda-10=0\Rightarrow\lambda=5$ 或 $-2$。

$\lambda=5$ 時，$\begin{bmatrix}-4&4\\3&-3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow x_1-x_2=0$，取 $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ 作代表，即 $\begin{bmatrix}1&4\\3&2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=5\cdot\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

$\lambda=-2$ 時，$\begin{bmatrix}3&4\\3&4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow 3x_1+4x_2=0$，取 $\begin{bmatrix}-4\\3\end{bmatrix}$ 作代表，即

[3] 本節內容摘自筆者〈從特徵值、特徵向量到凱萊—漢米爾頓定理、矩陣的對角化〉一文。

$$\begin{bmatrix}1 & 4\\ 3 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-4\\ 3\end{bmatrix}=-2\cdot\begin{bmatrix}-4\\ 3\end{bmatrix}$$

也就是說，只要 $X$ 是 $\begin{bmatrix}t\\ t\end{bmatrix}$ 或 $\begin{bmatrix}-4t\\ 3t\end{bmatrix}$，那就會滿足 $A\cdot X=\lambda\cdot X$，其中 $\lambda$ 分別是 **5** 和 $-2$。因此，我們就稱 **5** 和 $-2$ 是方陣 $A=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ 的「特徵值」**(eigenvalues)**，$\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}-4\\ 3\end{bmatrix}$ 分別是特徵值 **5** 和 $-2$ 所對應的「特徵向量」**(eigenvectors)**（以此兩個作為代表，事實上只要是 $\begin{bmatrix}t\\ t\end{bmatrix}$ 或 $\begin{bmatrix}-4t\\ 3t\end{bmatrix}$ 均可），至於產生特徵值的方程式 $\det\left(\begin{bmatrix}1-\lambda & 4\\ 3 & 2-\lambda\end{bmatrix}\right)=0$，就稱為「特徵方程式」**(characteristic equation)**。以下，我們給出一般化的定義：

$A$ 為 $n$ 階方陣，$\det(A-\lambda I)=0$ 就稱為 $A$ 的「特徵方程式」，其解 $\lambda_i\ (i=1\sim n)$ 就稱為 $A$ 的「特徵值」，滿足 $A\cdot X=\lambda_i\cdot X$ 的 $X$，就稱為特徵值 $\lambda_i$ 所對應的「特徵向量」。

## 3. 轉移矩陣必有特徵值 1

我們想知道任意 $n$ 階轉移矩陣 $A$ 一定有特徵值 **1**，其實不需要正面去求其特徵方程式，可以從其轉置矩陣 $A^t$（每一列之和均為 **1**）下手。令 $J$ 為每個元均為 **1** 的 $n\times 1$ 階矩陣（即行矩陣），則 $A^t\cdot J=J=1\cdot J$，即 $A^t$ 有特徵值 **1**。而 $A^t$ 與 $A$ 有相同的特徵方程式 $\det(A^t-\lambda I)=\det(A-\lambda I)=0$，故 **1** 亦為 $A$ 的特徵值。例如：

二階轉移矩陣 $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$，$A^t\cdot J=\begin{bmatrix}a & c\\ b & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+c\\ b+d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=J=1\cdot J$，且

$\det(A^t-\lambda I)=\begin{vmatrix}a & c-\lambda\\ b-\lambda & d\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & b-\lambda\\ c-\lambda & d\end{vmatrix}=\det(A-\lambda I)$，故 **1** 是 $A^t$ 與 $A$ 的特徵值。

既然 **1** 是任意一個轉移矩陣的特徵值，那麼就可以找到對應的特徵向量 $X$ 滿足 $A\cdot X=1\cdot X$，而由第 **2** 節的介紹可知 $X$ 並非唯一，而是代表一組平行的向量，[4]也就是說，有無限多個平行向量都滿足 $A\cdot X=1\cdot X$。

讓我們回到本文第 **1** 節的問題**(1)**：「**為什麼** $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ **與** $\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$ **一定是無限多解？**」答案顯而易見！該求法其實等同於求轉移矩陣特徵值 **1** 所對應的特

[4] 當 1 是特徵方程式的重根時，則可找到不只一組的平行向量。

徵向量，當然會有無限多個平行向量滿足！課本中穩定狀態的求法，只是求這無限多個平行向量中，分量均非負且總和是 **1** 的那一個！[5]再者，求特徵向量的過程，根本無關於馬可夫鏈是否會有穩定狀態，也就是說，不管轉移矩陣所形成的馬可夫鏈是否有穩定狀態，我們都可以用課本中的解法求出$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$或$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$，而這也就說明了本文第 **1** 節的問題**(2)**。

## 4. 如何在高中課堂中回答問題(1)與說明問題(2)

從矩陣的特徵值、特徵向量來回答問題**(1)**與問題**(2)**，雖然簡單，但卻不好在高中課堂上呈現。然而，既然高中教材中只有二階及三階轉移矩陣，那我們可以用簡單的計算方式來介紹「轉移矩陣必有特徵值 **1**」這個性質，當然，不提及「特徵值」這名詞。

**性質一：** $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$**是轉移矩陣，**$I$**是二階單位方陣，則**$\det(A-I)=0$。

證明：$\det(A-I)=\begin{vmatrix} a-1 & b \\ c & d-1 \end{vmatrix}=(a-1)(d-1)-bc=(-c)(-b)-bc=0$。

**性質二：** $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$**是轉移矩陣，**$I$**是三階單位方陣，則**$\det(A-I)=0$。

證明：$\det(A-I)=\begin{vmatrix} a-1 & b & c \\ d & e-1 & f \\ g & h & i-1 \end{vmatrix}\begin{matrix} \times 1 \\ \times 1 \\ \leftarrow \end{matrix}=\begin{vmatrix} a-1 & b & c \\ d & e-1 & f \\ a+d+g-1 & b+e+h-1 & c+f+i-1 \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} a-1 & b & c \\ d & e-1 & f \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0$$

有了性質一與性質二後，我們就可以回答問題**(1)**了。以下以三階轉移矩陣為例作說明：

---

[5] 並不是每一個特徵值都可以找到分量均非負的特徵向量。例如在本文第 2 節的 $A=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$，其特徵值$-2$就沒有分量均非負的特徵向量。事實上，在轉移矩陣中，只有特徵值為 1 時，才有非負的特徵向量，這一點在馬可夫鏈是否有穩定狀態的判別上，扮演著至為關鍵的角色！筆者在此略去說明，請讀者自行查閱相關資料。

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a-1 & b & c \\ d & e-1 & f \\ g & h & i-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$，這相當於齊次方程組

$$\begin{cases} (a-1)x+by+cz=0 \\ dx+(e-1)y+fz=0 \\ gx+hy+(i-1)z=0 \end{cases}$$，由性質二可知係數所成之行列式$\begin{vmatrix} a-1 & b & c \\ d & e-1 & f \\ g & h & i-1 \end{vmatrix}=0$，

故 $x$、$y$、$z$ 有無限多組解。

上述的說明過程還用到了學生剛學過的三元一次聯立方程組的解的判別，因此，不僅向學生解釋了為什麼，還讓學生看到了數學知識間的內在連結，一舉兩得！[6]

至於問題(2)，本質上就是馬可夫鏈穩定狀態的判別，這並非高中課程內容，要完整的回答它，必須用到更多的線性代數知識，更不適宜在一般高中課堂中呈現了。因此，筆者採取的方式就是舉例說明，例如：

$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，我們可以利用$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$及 $x+y=1$ 求出$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$。然而，對 $A$ 來說，如果初始狀態$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$不是$\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$，那 $A$ 所成的馬可夫鏈就是

$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}\to\cdots\cdots$，永遠在$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$與$\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$之間跳動，並不會穩定！

這個例子提出之後，許多學生第一時間就會問：「那我們怎麼知道求出來的是不是穩定狀態？」好奇心是學習的最佳動機，只可惜我們無法在高中課堂上滿足學生的好奇心。筆者只能安撫學生，待他們到了大學學了更多矩陣的知識後，就能找出馬可夫鏈是否有穩定狀態的判別方法。並不忘再次保證，出題老師不會「白目」到要學生求不會穩定的穩定狀態。這雖是緩兵之計，卻也是不得不的做法！

## 5. 後記

在現行的高中數學課本中，有的版本會介紹馬可夫鏈是否有穩定狀態的判別方法，並冠以「馬可夫定理」的名稱，以下是翰林版的「馬可夫定理」：

**設 $A$ 是一個 $n$ 階轉移矩陣，且 $A$ 或 $A$ 的某一次方之所有元都是正實數，則對於任**

---

[6] 其實性質二的證明也提供了另一種代數操作的說明（證明）方式，就是齊次方程組的第三個方程式可以寫成前兩個的線性組合，也就是說，在解方程式時，它是多餘的，由此可知這個齊次方程組必定是無限多組解。這樣子的代數操作，還可延伸至幾何解釋，也就是平面族（系）：有共同交線的平面。雖然平面族（系）已不在高中課程之中，但教師若能由此延伸，讓學生看到數學在不同表徵（代數方程式與幾何圖形）間的轉換與連結，亦是美事一樁！

**意一個$n\times1$階的機率向量$X_0$，當$k$逐漸增大時，$X_k=A^kX_0$會逐漸趨近唯一的$n\times1$階矩陣$X$，而這個矩陣$X$滿足：(1) $AX=X$，(2) $X$中各元的和為 1（即$X$也是機率向量），特別地，我們將$X$稱為穩定狀態時的矩陣。**[7]

筆者通常不會主動提及這個定理，主要理由是，就算呈現這個定理，仍無法向學生解釋為何這個定理會成立。除非學生很想知道到底有什麼方法可以判別，筆者才會提及這個定理。根據筆者的經驗，學生聽了這個定理之後，疑惑更大了！因為，一般在做矩陣的乘法時，我們是喜歡有 **0** 的，而且是 **0** 越多越容易計算，[8]但這個定理告訴我們不能有 **0**！因此，在直觀上很難想像這個定理何以成立！再者，這個定理的逆定理並不成立，$A=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}$就是一個簡單的反例，其任意次方$A^k$都是$\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}$，**0** 永遠都在，但它所形成的馬可夫鏈有穩定狀態$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$。最後，「馬可夫定理」並非是這個定理的通用名稱，似乎只有在台灣少數版本的課本中才這樣稱呼。習慣在課堂上使用這名稱的老師，最好能跟學生提醒一下。

誌謝：

感謝國立台南二中邱靜如老師及台北市立成功高中陳彥宏老師給予本文初稿的諸多建議與指正。當然，筆者要承擔一切文責！

## 參考資料

**林倉億 (2013). 〈馬可夫生平與馬可夫鏈〉,《HPM 通訊》16(1)，頁 1-8。**
**游森棚主編 (2013). 《普通高級中學數學 4》，台南：翰林。**

---

[7] 引自游森棚主編 (2013)，頁 194。

[8] 有些矩陣的元都不是 0，但乘法卻也很容易計算，例如$A=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$或$\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{-\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$，其任意次方都很容易求出。但這些元都不是 0 的矩陣對學生來說，比較像是矩陣乘法中的特殊例子。

# 由圓的切點弦方程引發的思考：再談計算圓錐曲線切線的方法（II）

靳衛軍
山西省長治市華北機電學校圖書館

(續前一期)

**2.5** 兩種不同方法的比較

我們知道「根據判別式等於零求切線的斜率$k$」比較繁瑣，那麼，求出切點座標的方法是否同樣繁瑣？我們通過一個比較普遍的例子可以說明問題。

**題目四：求過點$M(1,1)$且與二次曲線$x^2-2xy+y^2+2x+2y=0$相切的切線方程。**

解法一：設$M_1(x_1,y_1)$為二次曲線$x^2-2xy+y^2+2x+2y=0$上的一點。過$M_1$的切線方程為$l$：$(x_1-y_1+1)x+(-x_1+y_1+1)y+(x_1+y_1)=0$①，又因為點$M(1,1)$在$l$上，所以有$x_1+y_1+2=0$。又因為點$M_1(x_1,y_1)$在二次曲線上，所以得方程組：

$$\begin{cases} x_1^2-2x_1y_1+y_1^2+2x_1+2y_1=0 \\ x_1+y_1+2=0 \end{cases}$$

解之得兩組解：

$\begin{cases} x_1=0, \\ y_1=-2, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_2=-2, \\ y_2=0. \end{cases}$ 分別代入①所對應的切線方程、即代入

$(x_1-y_1+1)x+(-x_1+y_1+1)y+(x_1+y_1)=0$，可得所求的兩條線方程為$3x-y-2=0$，或$x-3y+2=0$。

解法二：設二次曲線外一點$M(1,1)$的切線方程為$l$：$y-1=k(x-1)$，即$y=kx-k+1$。因為$l$：$y=kx-k+1$與二次曲線$x^2-2xy+y^2+2x+2y=0$相切，聯立方程組根據判別式等於零可以求得$k$。

不難看到把$y=kx-k+1$與$y=-x-2$代入$x^2-2xy+y^2+2x+2y=0$中，解法二（判別式法）的計算量遠比解法一（求出切點座標）的大。我們就不詳細演算了。

**題目五：在橢圓$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$上求一點，使這點到直線$l$：$x-2y-12=0$的距離最短，並求出這個距離。**

簡單分析：所求點必然是與已知直線$x-2y-12=0$平行、且與橢圓相切的兩切點之一。設與已知直線平行且與橢圓相切的直線為：$x-2y-b=0$，由判別式法求出兩切點座標，即可解出題目。方法自然簡單只是計算量略微大些。利用直接求切點座標的方法略微簡單點。

設所求切點座標為$M(x_0,y_0)$，因為過圓錐曲線上一點$M(x_0,y_0)$切線的斜率為：$k=-\dfrac{3x_0}{4y_0}=\dfrac{1}{2}$，所以過切點$M(x_0,y_0)$的切線方程為：$y-y_0=\dfrac{1}{2}(x-x_0)$。又因為$M(x_0,y_0)$在橢圓$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$上，所以聯立方程組可以求得兩切點座標$(2,-3)$、$(-2,3)$。經過計算知橢圓上點$(2,-3)$到直線$l$的距離最短，所以最短距離為$\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$。

我們對高中知識解決曲線切線方程的方法做了進一步思考，用高中知識可以解決〈如何計算圓錐曲線的切線？〉中的例題（例**8**除外）。雖然我們的探討為解決圓錐曲線切線方程中的具體問題，提供了一套行之有效的方法，但是，沒有得到該文中簡單、深刻、優美的「切線準則」。

在此值得提及一點的是，學生熟知、常用的是判別式法。求切點座標的方法鮮為人知但是其具有計算簡單、應用更為範圍廣泛的特點，值得在教學中提倡。

**2.6** 求過圓錐曲線外一點的切線公式及應用

求過點$M(x_0,y_0)$並與二次曲線$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$（******）相切的切線方程。

從我們的方法原理上看能夠推導過二次曲線外一點$M(x_0,y_0)$切線方程的公式。方法為：設$M_1(x_1,y_1)$為二次曲線上的一點。則過點$M_1$的切線方程為$l$：
$(ax_1+by_1+d)x+(bx_1+cy_1+e)y+(dx_1+ey_1+f)=0$（*******），又因為點$M(x_0,y_0)$在$l$上，所以有$(ax_1+by_1+d)x_0+(bx_1+cy_1+e)y_0+(dx_1+ey_1+f)=0$。

又因為點$M_1(x_1,y_1)$在二次曲線上，所以得方程組：

$$\textbf{(II)}\quad \begin{cases} ax_1^2+2bx_1y_1+cy_1^2+2dx_1+2ey_1+f=0, \\ (ax_0+by_0+d)x_1+(bx_0+cy_0+e)y_1+(dx_0+ey_0+f)=0. \end{cases}$$

只需要求出切點$M_1(x_1,y_1)$的座標，把$M_1(x_1,y_1)$的值代入（*******）即可求得所求的切線方程。當方程組（Ⅱ）有兩組解、一組解或無解就決定了切線是兩條，一條或沒有切線。如何求切點的座標成為了問題的核心，雖然思想方法比較簡單但是我們遇到計算比較繁瑣甚至會感到陷入變數符號太多太長、複雜難以處理的窘境。是否可以得到求過圓錐曲線外一點的切線方程的公式？

楊學枝在他的〈圓錐曲線的切線公式〉（《數學通報》**2009** 年第 **7** 期）中，指出「要求過圓錐曲線外一點的圓錐曲線的切線方程，筆者未見到現成公式，此時求圓錐曲線的切線方程往往較麻煩。為應用方便，本文給出求過圓錐曲線外一點的圓錐曲線的切線方程的公式，所給公式形式優美，容易記憶，應用方便。事先說明，文中的圓錐曲線不含其退化情況」。

該文的開頭和我們的探討比較相似，但是，並沒有求切點的座標卻給出了切線方程公式。如果有興趣的話可以參閱一下原文。順便提及，本文與〈如何計算圓錐曲線的切線？〉

所呈現的切線公式不盡相同，所以，在解題應用上亦各具特色。下面我們引述〈圓錐曲線的切線公式〉中的例**3**、**4**。

例**3.** 設圓錐曲線為$C:\varphi(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$,求曲線$C$的兩條互相垂直的切線的交點的軌跡方程。

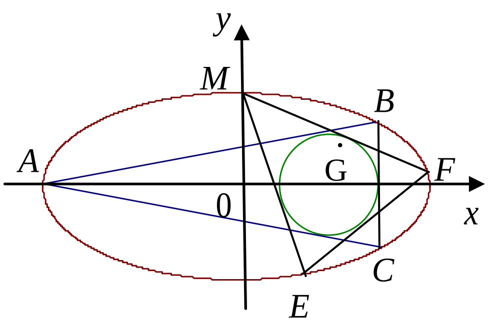
例**4.** 設圓錐曲線為$C:\varphi(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$其中$ac-b^2\neq 0$(即為有心圓錐曲線)，直線$l_1 // l_2$，斜率為$k$，且為曲線$C$的兩條切線，求到$l_1$與$l_2$距離相等的點的軌跡方程。

**2.7** 平凡、樸實的解法（**2009**年高考江西數學文科第**22**題第二問的簡單解法）

如圖，已知圓$G:(x-2)^2+y^2=r^2$是橢圓$\frac{x^2}{16}+y^2=1$的內接$\Delta ABC$的內切圓，其中$A$為橢圓的左頂點。

（**1**）求圓$G$的半徑$r$。
（**2**）過點$M(0,1)$作圓$G$的兩條切線交橢圓於$E$，$F$兩點，

證明：直線$EF$與圓$G$相切。




第一問的解答略，我們先看一下下面的解法：

**(2)** 設過點M(0,1)與圓$(x-2)^2+y^2=\frac{4}{9}$相切的直線方程為$l$：$y-1=kx$ **(1)**

則$\frac{2}{3}=\frac{|2k+1|}{\sqrt{1+k^2}}$,即$32k^2+36k+5=0$ **(2)**

解得$k_1=\frac{-9+\sqrt{41}}{16},k_2=\frac{-9-\sqrt{41}}{16}$

將**(1)**代入$\frac{x^2}{16}+y^2=1$得$(16k^2+1)x^2+32kx=0$,則異于零的解為$x=-\frac{32k}{16k^2+1}$

設$F(x_1,k_1x_1+1)$,$E(x_2,k_2x_2+1)$，則$x_1=-\frac{32k_1}{16k_1^{\ 2}+1},x_2=-\frac{32k_2}{16k_2^{\ 2}+1}$

於是直線$FE$的方程為:$y+\frac{32k_1^{\ 2}}{16k_1^{\ 2}+1}-1=\frac{3}{4}(x+\frac{32k_1}{16k_1^{\ 2}+1})$ 即$y=\frac{3}{4}x-\frac{7}{3}$，則圓心$(2,0)$到直線$FE$的距離 $d=\frac{2}{3}$， 故結論成立。

上面的解法雖然精心地迴避了求點 $F(x_1,k_1x_1+1)$、$E(x_2,k_2x_2+1)$ 座標不必要的計算，運算量還是相當大。能否有簡便的方法？第二問的解答關鍵是求直線 $FE$ 的方程。因為 $ME$、$MF$ 為圓 $G$ 的兩條切線，這與求圓的切點弦方程極其類似。我們是否還可以幸運、簡單地解決問題？

設 $E(4\sin\alpha,\cos\alpha)$，$F(4\sin\beta,\cos\beta)$。又 $M(0,1)$，則直線 **ME** 的方程為 $x(1-\cos\alpha)+4y\sin\alpha-4\sin\alpha=0$，同理可得直線 **MF** 的方程為：$x(1-\cos\beta)+4y\sin\beta-4\sin\beta=0$。到此，我們沒有求圓的切點弦方程那麼幸運，可以根據「兩點定線」原理，直接得出直線 **ME** 的方程。看來必須求 $E(4\sin\alpha,\cos\alpha)$，$F(4\sin\beta,\cos\beta)$ 的座標了。

因 **ME** 與圓 **G** 相切，所以有 $\dfrac{|2(1-\cos\alpha)-4\sin\alpha|}{\sqrt{(1-\cos\alpha)^2+16\sin^2\alpha}}=\dfrac{2}{3}$。

化簡整理得：

$9(1-\cos\alpha)^2-36(1-\cos\alpha)\sin\alpha+36\sin^2\alpha=(1-\cos\alpha)^2+16\sin^2\alpha$

即 $2(1-\cos\alpha)^2-9(1-\cos\alpha)\sin\alpha+5\sin^2\alpha=0$

$(1-\cos\alpha)(9\sin\alpha+3\cos\alpha-7)=0$

$\because 1-\cos\alpha\neq0$，從而得：$9\sin\alpha+3\cos\alpha-7=0$ ①。到此題目的解決方法

上述解法是簡單的，直接解方程①求出 $E$ 點座標即可。只是感覺計算上有點麻煩。有沒有更好的方法？

但直覺告訴我們：同理，由直線 **MF** 與圓 **G** 相切可得：$9\sin\beta+3\cos\beta-7=0$ ②。我們不必急於匆忙解三角方程、還是先看看這一直覺能告訴我們什麼再說。

在此，我們卻再次發現可以根據“兩點定線”的原理直接得出 $(\sin\alpha,\cos\alpha),(\sin\beta,\cos\beta)$ 兩點在直線 $9x+3y-7=0$ 上。這離我們的目標 — 求直線 $FE$ 的方程 — 已經非常近了。

又因為 $\dfrac{9}{4}\cdot4\sin\alpha+3\cos\alpha-7=0$ ③ $\dfrac{9}{4}\cdot4\sin\beta+3\cos\beta-7=0$ ④

所以由③、④知，**E**、**F** 兩點在直線 $\dfrac{9}{4}x+y-7=0$ 上。即直線 **EF** 的方程為 $9x-12y-28=0$，圓心 $G(2,0)$ 到直線 **EF** 上的距離為 $d=\dfrac{|9\times2-28|}{\sqrt{9^2+(-12)^2}}=\dfrac{2}{3}$，故直線 **EF** 與圓 **G** 相切。

返過頭來重新回顧一下整個反思歷程是耐人尋味的。筆者曾經對題目二、求圓的切點弦方程的解題思路做了詳盡的剖析，或許有些人不以為然甚或會認為小題大做了。確實，從數學研究的角度看這些初等的小問題微不足道，幾乎不值一提。或許只有從數學教育的角度看，才能凸顯出問題的意義與價值。從我們通篇文章的觀點看**2009**年高考試題的這一解法平凡與樸實，簡單到可以毫不費力地就能看懂，看完後甚至有些令人感到失落。一些學生為什麼想不到呢？筆者想探討的問題之一，是通過對題目的反思學生能夠有什麼收穫？或者說如何才能具備舉一反三的能力？

**2.8.** 求二次曲線外一點$M(x_0,y_0)$切線方程思想方法的進一步應用

雖然利用求切點座標的方法求過二次曲線外一點$M(x_0,y_0)$的切線方程的方法僅僅是一種演算法無法得到簡單、深刻、優美的「切線準則」，這一簡單的方法在討論過三次函數圖像外一定點$M(x_0,y_0)$切線條數的問題時卻能顯出其威力。如設過$M(x_0,y_0)$與函數圖形相切的直線方程為： $y-y_0=k(x-x_0)$ ，由直線方程與函數聯立方程組，根據相切條件討論，計算比較繁瑣，甚至會感到陷入變數符號太多太長、複雜難以處理的窘境。用求切點座標的方法探討問題，可以擺脫這種窘境。在討論切點個數時問題歸結為一元三次方程解的情況。雖然中學生沒有學習三次方程求根公式，但是，借助於導數工具可以得到三次方程解的判別條件與法則。有了思想方法，從技術上來說得到判別條件只是一個耐心與細緻的工作，雖然有文章做過探討，但是，完美地做好還是有一定的難度，讀者可在刊物上尋找相關資料，自行閱讀、剖析，並做進一步推演。三次函數切線的問題比圓錐曲線的切線複雜，如何尋求容易掌握、計算量小，以及統一的方法，值得進一步探討。

## 3.教學啟示

我們從求圓的切點弦方程開始，由淺入深、由此及彼地對一些問題做了反思。從數學理論上看，本文的內容僅僅是高中生常見的一般解題過程中存在的問題，不登大雅之堂。從數學教育的觀點看，面對這些問題教師應該如何引導學生積極思考、如何反思貫穿於整個教育的全部過程。小問題的學習、反思過程是生動鮮活的。教育是極其平凡而又漫長艱辛的過程，不會有立竿見影的神奇效果，在傳授知識的過程中，需要長期堅持不懈、從點點滴滴中，培養學生對待真理的態度、理性探索精神，才能結出豐碩的果實。在某種程度上，對待真理的態度比發現更為重要。

科學絕不是，也永遠不會是一本寫完了的書。每一項重大的成就，都會帶來新的問題。任何一個發展隨著時間的推移，都會出現新的問題。通過對小問題艱苦的探索過程，或許可以讓學生會能夠體悟到點滴進步來之不易，而懂得珍惜。在學習、探索過程中，他們不僅掌握了知識、學會欣賞與鑒別，而且知道珍惜美好事物而懂得感恩。這正是教育的目標。

## 參考資料


江富貴 **(1990).**〈切點弦方程及其它〉，《數學通報》**1990**年**11**期：**40-42**

李元龍、王和文 **(1996).**〈教學圓的切線方程的美育價值〉，《數學教學》**1996**年第**6**期：**11-14**。

岳昌慶 **(1999).**〈圓錐曲線切點弦所在直線方程〉，《中學數學》**1999** 年 **12** 月：**5**。

荊作棟、雷俊林主編 **(2013).**《普通高中新課程問題導學案》（數學必修**2**·人教**A**版）（山西教育出版社**2013**年**7**月）頁**122**。

羅驥韡 **(2009).**〈如何計算圓錐曲線的切線？〉，《數學傳播》**33(2): 27-47**。

黃繼紅**(2009).**〈圓的切線和切點弦方程〉，《數學教學》**2009**年**8**期：**34-35**。

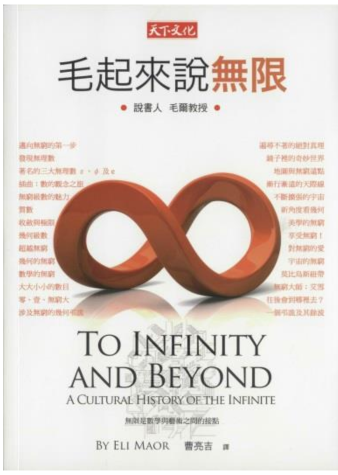
靳衛軍、王西茜 **(2013).**〈由反三角函數教學引發的哲學思考〉，《台灣數學教師（電子）期刊》**34: 1-12**。

彭捷 **(2012).**〈怎樣應用切點弦方程解題〉，《中學數學》**2012** 年 **2** 月：**18-19**。

楊學枝 **(2009).**〈圓錐曲線的切線公式〉，《數學通報》**2009**年**7**期：**61-62**。

# 推薦毛爾的《毛起來說無限》

洪萬生
台灣師範大學數學系退休教授




**書名：毛起來說無限（*To Infinity and Beyond: A Cultural History of the Infinite*）**
**作者：毛爾（Eli Maor）**
**譯者：曹亮吉**
**出版社：天下文化出版社，台北市**
**出版年：2014**
**出版資料：平裝本，326 pp**
**國際書碼：ISBN 978-986-320-402-2**
**關鍵詞：無限、毛爾、數學普及、無窮與美學**

如將本書計算在內，毛爾的數學普及書籍已有三本在台出版中譯本：《毛起來說三角》、[9]《毛起來說 *e*》，[10]以及本書。事實上，第四本將是他的《畢氏定理四千年》（三民書局即將出版），[11]可見，數學家毛爾耕耘有成，是一位相當受到矚目的數學普及作家。

本書內容共有四大部分，依序是「數學的無窮」、「幾何的無窮」、「美學的無窮」，以及「宇宙的無窮」。如果讀者多少熟悉一點數學史與科學史實，對於作者在本書中，安排一、二、四部份，一定覺得理所當然，因為這是一本介紹有關無限的數學普及書籍。不過，作者所納入的第四部份「美學的無窮」，則顯然意在呼應本書副標題：有關無限的文化史（**Cultural History of the Infinite**）。當然，如將數學與宇宙論也視之為人類文化史的必要組成因素，那麼，我們的這一補充說明就顯得畫蛇添足了。

儘管如此，本書對於數學知識的解說始終堅持「質感」，即使「美學的無窮」這一部份（第 **17-22** 章）意在一般讀者，然而，作者對於其中相關數學的說明，也絕不「輕薄」了事。比如說吧，這一部份的主角雖然是畫家艾雪（**M. C. Escher**），但是，第 **19-20** 章的對稱與對稱群，卻是十分紮實的數學知識內容，至於其必要性，乃是作者在第 **21** 章所指出的：

> **艾雪的作品中，至少用了十七種平面對稱群中的十三種，可見艾雪對數學原理一定有某種直覺上的把握，只不過，他受過的正式數學訓練只有高中程度。（頁 214）**

---

[9] 參考蘇俊鴻，〈總有故事可說的三角學：《毛起來說三角》〉，台灣數學博物館・科普特區・深度書評欄。
[10] 參考蘇惠玉，〈數學的故事告訴了我們什麼？評論《毛起來說 e》〉，台灣數學博物館・科普特區・深度書評欄。
[11] 參考林炎全，〈畢氏定理 4000 年〉，台灣數學博物館・科普特區・深度書評欄。

而且，艾雪的藝術作品，「**是一位藝術家展現出來的數學內涵，雖然幾乎沒受過正式的數學訓練**」。其實，艾雪自己也承認：「**數學課我從來沒有及格過。好笑的是，我似乎可以在一知半解的情況下掌握數學理論。真的，在學校裡我的表現非常差。想想看 — 數學家現在拿我的作品表現他們書中的觀點！真妙，我還和這些有學問的人結交，好像我是他們失聯多年的兄弟。我猜他們並不十分清楚，對這些東西我一無所知。**」（頁 **216**）儘管如此，根據毛爾的分析，艾雪的作品包含有許多數學概念，如無窮、鏡射與反演（**inversion**），三維物件及其在二維曲面上的呈現乃至於它們之間的關係。「**最廣義來說，對稱概念是艾雪作品中的重點所在。不但所有的四種對稱都呈現在作品中，艾雪還加入第五種對稱：相似。這些特徵，還有對無窮的無盡迷戀，是艾雪作品中的精髓。**」（頁 **206**）

看來，藝術家和數學家這對「失聯的兄弟」的確是「心同此理」，因此，他們才能不約而同地表現類似的數學內涵吧！在另一方面，艾雪和另一位比他早兩個世紀，在完全不同的領域發揮的音樂家家巴哈（**J. S. Bach**），也有著相似的數學直觀。他們「**兩人最相同之處，在於他們對模式、節奏韻律及規則很敏銳 — 對於規則，在巴哈是時間上的，在艾雪是空間上的。雖然兩人都不會承認（或根本就不知道），但他們都是最有成就的實驗數學家。**」（頁 **222**）

有關本書之書寫與敘事，毛爾仍然維持他一貫的典雅與簡約，在各章（全書共有 **29** 章）有限的篇幅中，述說或論證一些相關的數學或科學史，而且，也不時提出他的洞識。譬如說吧，在第 **15** 章〈新角度看幾何〉結尾時，毛爾從射影幾何的對偶性（**duality**），提出了「點」在幾何學中不再獨尊的地位之評論：

> **「線由點組成」的觀念，已深入我們的幾何直觀，好像沒有人會去質疑。射影幾何靠著對偶原理，屏棄了這種觀念：它讓點與線地位平等，任何一個都可作為基石，使得整個幾何可以搭建起來。射影幾何打破了傳統，從古希臘的束縛中解脫出來，迎來了許多新發現使數學生命力大張，影響其後的發展。但如果一開始沒引進無窮遠點及無窮遠線，這些都不會發生，因為就是這兩個元素，使射影幾何達成統整的目標。**（頁 **146**）

又譬如，在第 **16** 章「遍尋不著的絕對真理」（旨在介紹非歐幾何）第一段，毛爾給了我們蠻深刻的開場白：

> **若說射影幾何（經由對偶原理）從美學方面大大豐富了數學的內涵，非歐幾何的創立，則帶給整個科學思想與哲學思維無與倫比的衝擊。……點燃這次思想革命的火花，再度與無窮有關；說得更確切些，是與下面的問題有關：平行線在很遠很遠的遠方到底會怎麼樣？**」（頁 **148**）

還有，第 **23** 章第一段，則是對天文學甚早成為一門成熟的學問之反思：

> 自有歷史以來，人類就一直望著天空，驚嘆於其神秘，對於看起來像小珠寶般鑲在天上的無數星辰充滿好奇。這些星星是什麼做成的？它們有多遠？它們帶給我們什麼訊息？出自人類對宇宙創生的敬畏的這些問題，是天文學（研究宇宙的科學）誕生的第一步。天文學研究的是我們想得到的最遠的事物，卻成為第一門發展成熟的科學，這實在是挺矛盾的。相較之下，與地球及棲居生物有關的地質學或生物學，卻要到最近幾個世紀，才成為真正的科學。藏在愈遙遠的謎團，似乎愈吸引人去解開它！（頁 230）

可見，毛爾也細心研讀了許多科學史論述，讀者如欲檢視，可徵之於本書的參考書目。

毛爾的博雅也不僅限於科學史、數學史、藝術與音樂（本書列有 **66** 份參考書目，其中，毛爾在每一項目下都提供了簡要的介紹與推薦），他對各種異文化也保持著濃厚的興趣。十幾年前，在遠流出版公司的慷慨贊助下，國內科學哲學與科學史學者創辦了一份英文期刊 ***Philosophy and the History of Science: A Taiwanese Journal***（很可能是台灣人文與社會學界的第一份），在國外大學的訂戶中，就有來自毛爾的任教大學：芝加哥的羅耀拉大學（**Loyola University**）。我相信這個期刊的購訂，應該是出自他的推薦。

本書英文初版於 **1987** 年，已經將近 **30** 個年頭了。在過去 **30** 年間，在科技發展上，不僅天體物理（或宇宙科學）的進展一日千里，即使數學也不遑多讓。比如說，截至 **2013** 年 **2** 月 **8** 日為止，已知的最大質數為 $2^{57885161}-1$，共有 **17425170** 位數，比前一個最大質數多了 **400** 多萬位數。本書第 **40** 頁所列舉的，是 **1979** 年的舊資料：只有 **6897** 位數，作者當然也補充說：到 **1986** 年為止（應該是本書英文初版定稿時），共有 **65050** 位數：$2^{216091}-1$，請讀者稍加注意。還有，**2013** 年 **5** 月美籍華人數學家張益唐在孿生質數的研究上，做出了百年來最偉大的貢獻，而成為國際數學界的大事 － 中譯本編輯在本書第 **45** 頁的注解提供了按語，提及此一事實。英文版出版於 **1987** 年的本書介紹孿生質數時（頁 **39**）當然無法納入，不過，這剛好最適合用以提醒讀者：閱讀普及書籍時，也最好能利用網路搜尋可靠的及時資訊才好。

儘管如此，由於數學知識歷久彌新，它永遠可以豐富我們人類的思維方式，因此，本書值得高度推薦。對於受過一點數學專業入門訓練的人來說，這本書更是數學博雅素養的試金石，喜歡挑戰的讀者千萬不要錯過。

最後，順便提一些訂正的建議：

頁 **237**：作者在第 **23** 章〈古代世界〉提及天主教會對於「異端邪說」的壓制時，以「**歐洲從此進入黑暗時代**」結尾。這種措辭已經不被目前西方一般史學家所採用。比較常見的說法，是中世紀歐洲科學進入一個停滯的階段。

頁 **241** 注 **2**：法國科學史大師夸黑（**Alexandre Koyre**）的經典名著《從封閉世界到無限宇宙》的英文書名是 **"From the Closed World to the Infinite Universe"** 才正確。又，

如果讀者對本書有興趣，不妨參考陳瑞麟、張樂霖的中譯本（**2005**）。

頁 **146**：「直線是一條線，在其上的點排得整整齊齊。」顯然譯自《幾何原本》**Heath** 英文版原文：**"A *straight line* is a line which lies evenly with the points on itself."** 不過，原文的意思可能與木匠在確認砌磚如何對準一條（繃緊的）直線有關，因此，或可中譯為：「**直線是它上面的點一樣平放著的線**」。[12]而「線」在《幾何原本》中的定義是「只有長度而沒有寬度」（**A *line* is breadthless length.**），泛指「曲線」而言。謹提供譯者曹亮吉教授及讀者參考。


1. **為節省影印成本，本通訊將減少紙版的的發行，請讀者盡量改訂 PDF 電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail 至 suhy1022@gmail.com**
2. **本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。**
3. **歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請 e-mail 至 suhy1022@gmail.com**
4. **本通訊內容可至網站下載。網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng/letter/hpmletter.htm**
5. **以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡**

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本：陳昭蓉 (東京 Boston Consulting Group)
基隆市：許文璋（南榮國中）
台北市：英家銘（台北醫學大學）楊淑芬（松山高中）杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中）
蘇俊鴻（北一女中）陳啟文（中山女高）蘇惠玉（西松高中）蕭文俊（中崙高中）
郭慶章（建國中學）李秀卿（景美女中）王錫熙（三民國中）謝佩珍、葉和文（百齡高中）
彭良禎（師大附中）郭守德（大安高工）張瑄芳（永春高中）張美玲（景興國中）
文宏元（金歐女中）林裕意（開平中學）林壽福、吳如皓 (興雅國中) 傅聖國（健康國小）
李素幸（雙園國中）程麗娟（民生國中）林美杏（中正國中）朱賡忠（建成國中）
新北市：顏志成（新莊高中） 陳鳳珠（中正國中）黃清揚（福和國中）董芳成（海山高中）孫梅茵（海山高工）周宗奎（清水中學）莊嘉玲（林口高中）王鼎勳、吳建任（樹林中學）陳玉芬（明德高中）羅春暉 (二重國小) 賴素貞（瑞芳高工）楊淑玲（義學國中）林建宏 （丹鳳國中）莊耀仁（溪崑國中）、
宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中）吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）林宜靜（羅東高中）
桃園縣：許雪珍、葉吉海（陽明高中）王文珮（青溪國中） 陳威南（平鎮中學）
洪宜亭、郭志輝（內壢高中） 鐘啟哲（武漢國中）徐梅芳（新坡國中） 程和欽 (大園國際高中)、
鍾秀瓏（東安國中）陳春廷（楊光國民中小學）王瑜君（桃園國中）
新竹市：李俊坤（新竹高中）、洪正川、林典蔚（新竹高商）
新竹縣：陳夢綺、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）
苗栗縣：廖淑芳 (照南國中)
台中市：阮錫琦（西苑高中）、劉雅茵（台中二中）、林芳羽（大里高中）、洪秀敏（豐原高中）、李傑霖、賴信志、陳姿研（台中女中）、莊佳維（成功國中）、李建勳（萬和國中）
南投縣：洪誌陽（普台高中）
嘉義市：謝三寶（嘉義高工）郭夢瑤（嘉義高中）
台南市：林倉億（台南一中）黃哲男、洪士薰、廖婉雅（台南女中）劉天祥、邱靜如（台南二中）張靖宜（後甲國中）李奕瑩（建興國中）、李建宗（北門高工）林旻志（歸仁國中）
高雄市：廖惠儀（大仁國中）歐士福（前金國中）林義強（高雄女中）
屏東縣：陳冠良（枋寮高中）楊瓊茹（屏東高中）黃俊才（中正國中）
澎湖縣：何嘉祥 林玉芬（馬公高中）
金門：楊玉星（金城中學）張復凱（金門高中） 馬祖：王連發（馬祖高中）

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。懇請各位老師惠賜高見！


[12] 參考藍紀正、朱恩寬譯，《歐幾里得幾何原本》，台北：九章出版社，2002。