HPM通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系退休教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）
助理編輯：黃俊瑋（台灣師大數學所研究生）
編輯小組：蘇意雯（台北市立教育大學）蘇俊鴻（北一女中）
黃清揚（福和國中）葉吉海（陽明高中）
陳彥宏（成功高中）陳啟文（中山女高）
王文珮（青溪國中）黃哲男（台南女中）
英家銘（台北醫學大學）謝佳叡（台灣師大數學系）
創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng

第十七卷 第七、八期合刊 目錄（2014年8月）

「轉移矩陣」二三事(3)：馬可夫鏈穩定狀態的判別

林倉億

國立台南一中

1. 前言

〈「轉移矩陣」二三事〉前兩篇討論了高中課本中的求法，以及歷年各版本高中課本對穩定狀態的呈現情形，接下來這一篇則要說明如何去判別一個馬可夫鏈是否會有穩定狀態，[1]這一部分在過去 **30** 年來一直未受重視，直至近年，三民書局出版的《普通高級中學數學第四冊》的《教師手冊》中才深入此主題，但只限於二階轉移矩陣。對一個高中教師來說，不懂得如何判別一個馬可夫鏈是否會穩定，並不會影響其教學，因為，高中數學課程中本來就不包含此部分，只有部分版本的課本會單純列出判別法則，但不含進一步的說明或證明。詳細的分析討論，請見筆者〈「轉移矩陣」二三事**(2)**：歷年高中課本中的穩定狀態〉，在此不再贅述。然而，若高中老師想一探究竟呢？除了三民書局的《教師手冊》外，還有哪些參考資料呢？

筆者到大學圖書館查閱相關的書籍，找到的都是從非負矩陣（元素均非負）出發，引入定義、性質，然後證明大名鼎鼎的 **Perron-Frobenius** 定理，最後再將 **Perron-Frobenius** 定理應用到轉移矩陣上，則轉移矩陣的諸多性質，幾乎就是 **clearly**！然而，對高中教師來說，轉移矩陣才是主角，再者，要了解轉移矩陣的性質，其實不需要懂得非負矩陣的諸多專有名詞及性質，因此，筆者在綜合幾份資料後，整理並改寫出以轉移矩陣為主體的證明，希望高中教師能透過這條「捷徑」，更進一步掌握轉移矩陣。如此一來，高中教師在課堂上講課時，也就能充滿自信地「大聲講」了。讓我們先從二階的情形看起。

---

[1]本文所稱的「穩定狀態」是：設 A 是一個 n 階轉移矩陣，對於任意一個 $n\times 1$ 階的狀態矩陣 X_0（各元均非負且總和為 1），若當 k 趨近於無限大時，$A^k X_0$ 會趨近唯一的 $n\times 1$ 階矩陣 X，就稱 X 為轉移矩陣 A 的「穩定狀態」。

2. 馬可夫鏈穩定狀態的判別：二階轉移矩陣的情形

定理 1：每個元都為正數的轉移矩陣 $A=\begin{pmatrix}\alpha & 1-\beta \\ 1-\alpha & \beta\end{pmatrix}$，其中 $0<\alpha,\beta<1$，一定有穩定狀態。[2]

證明：**(1)** 因為轉移矩陣必有特徵值 **1**，A 的特徵方程式

$\begin{vmatrix}\alpha-\lambda & 1-\beta \\ 1-\alpha & \beta-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-(\alpha+\beta)\lambda+\alpha\beta=0$ 必有一根是 **1**，令為 λ_1，另一根令為 λ_2。

由根與係數關係可知 $|\lambda_2|=|(\alpha+\beta)-1|<1$，即 $\lambda_1\neq\lambda_2$。

(2) 令 λ_1、λ_2 所對應的特徵向量分別為 $\overline{x_1}$、$\overline{x_2}$，即 $A\overline{x_1}=\lambda_1\overline{x_1}$、$A\overline{x_2}=\lambda_2\overline{x_2}$。特別地，我們可取 $\overline{x_1}=\dfrac{1}{2-\alpha-\beta}\begin{bmatrix}1-\beta \\ 1-\alpha\end{bmatrix}$。[3]因為 $\lambda_1\neq\lambda_2$，故 $\overline{x_1}$、$\overline{x_2}$ 為線性獨立，初始狀態 X_0（各元均非負且總和為 **1** 的 $n\times 1$ 階矩陣）可寫成兩者的線性組合，令 $X_0=a_1\overline{x_1}+a_2\overline{x_2}$，則：

$$X_1=AX_0=A(a_1\overline{x_1}+a_2\overline{x_2})=a_1\left(A\overline{x_1}\right)+a_2\left(A\overline{x_2}\right)=a_1\lambda_1\overline{x_1}+a_2\lambda_2\overline{x_2}$$

$$X_2=AX_1=A(a_1\lambda_1\overline{x_1}+a_2\lambda_2\overline{x_2})=a_1\lambda_1\left(A\overline{x_1}\right)+a_2\lambda_2\left(A\overline{x_2}\right)=a_1\lambda_1^2\overline{x_1}+a_2\lambda_2^2\overline{x_2}$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$X_k=AX_{k-1}=a_1\lambda_1^k\overline{x_1}+a_2\lambda_2^k\overline{x_2}$$

(3) 因為 $|\lambda_2|<1$，所以 $\lim\limits_{k\to\infty}X_k=\lim\limits_{k\to\infty}\left(a_1\lambda_1^k\overline{x_1}+a_2\lambda_2^k\overline{x_2}\right)=a_1\overline{x_1}=a_1\cdot\dfrac{1}{2-\alpha-\beta}\begin{bmatrix}1-\beta \\ 1-\alpha\end{bmatrix}$。

接下來我們只要證明 $a_1=1$，即得證 $\lim\limits_{k\to\infty}X_k=\overline{x_1}=\dfrac{1}{2-\alpha-\beta}\begin{bmatrix}1-\beta \\ 1-\alpha\end{bmatrix}$ 就是馬可夫鏈的穩定狀態。

令 $J=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}$，則 $JA=J$ $\left(\because \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha & 1-\beta \\ 1-\alpha & \beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\right)$

$\Rightarrow\ JA\overline{x_2}=J\overline{x_2}\ \Rightarrow\ J\lambda_2\overline{x_2}=J\overline{x_2}\ \Rightarrow\ (1-\lambda_2)J\overline{x_2}=0$，又 $\lambda_2\neq 1$，故 $J\overline{x_2}=0$。

---

[2] 以下的證明過程中將使用到矩陣的特徵方程式、特徵值、特徵向量，以及「轉移矩陣必有特徵值 1」，對此不熟悉的讀者，請參閱筆者〈「轉移矩陣」二三事(1)：高中課本中穩定狀態的求法〉一文。

[3] 設 $\overline{x_1}=\begin{pmatrix}s \\ t\end{pmatrix}$，且 $s+t=1$，再利用 $A\overline{x_1}=\lambda_1\overline{x_1}$ 求得 $s=\dfrac{1-\beta}{2-\alpha-\beta}$，$t=\dfrac{1-\alpha}{2-\alpha-\beta}$，其中 $0<s,t<1$。

$\Rightarrow\ JX_0 = J(a_1\overline{x_1}+a_2\overline{x_2}) = a_1\left(J\overline{x_1}\right)$，因為 $JX_0=1$，[4]且

$J\overline{x_1} = \dfrac{1}{2-\alpha-\beta}\left(1-\beta+1-\alpha\right)=1$，

故得證 $a_1=1$。

從上述的證明中，我們不但知道每個元都是正數的二階轉移矩陣一定有穩定狀態，還知道**穩定狀態就是特徵值 1 的特徵向量**，這點非常重要，更是證明一般情形（n 階轉移矩陣）時的關鍵，請讀者先牢記於心。既然轉移矩陣的次方仍是轉移矩陣，[5]那麼，由定理 **1** 我們就可以推知，只要存在某個正整數 k，使得 A^k 中的每個元都為正數，則轉移矩陣 A 一定有穩定狀態。[6]至此，我們就得到了某些版本課本中的判別定理的二階情形。

既然每個元都是正數的二階轉移矩陣一定有穩定狀態，那很自然地，我們就要問：「逆敘述會不會也成立？」也就是說，是否有穩定狀態的二階轉移矩陣 A，一定存在某個正整數 k，使得 A^k 中的每個元都為正數？很可惜的，逆敘述並不成立。二階轉移矩陣 A 中的元有 **0** 出現的情形只有 **8** 種，請見下表：

A $0<\alpha<1$	$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&\alpha\\0&1-\alpha\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1-\alpha&0\\\alpha&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&1-\alpha\\1&\alpha\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\alpha&1\\1-\alpha&0\end{bmatrix}$
穩定狀態	不存在	不存在	$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\frac{1-\alpha}{2-\alpha}\\\frac{1}{2-\alpha}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\frac{1}{2-\alpha}\\\frac{1-\alpha}{2-\alpha}\end{bmatrix}$

除了 $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ 與 $\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$ 外，其餘 **6** 種都有穩定狀態，[7]當中的 $\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix}1&\alpha\\0&1-\alpha\end{bmatrix}$ 與 $\begin{bmatrix}1-\alpha&0\\\alpha&1\end{bmatrix}$，無論是多少次方，**0** 永遠都在！

至此，我們知道「存在某個正整數 k，使得 A^k 中的每個元都為正數」只是有穩定狀態的充分條件，而非必要條件。那麼，必要條件是什麼呢？也就是說，有沒有適用於每一個轉移矩陣的判別法則呢？答案就在定理 **1** 的證明之中！也就是下一節的定理 **2**。

---

[4] X_0 是初始狀態，故 JX_0 是 X_0 中各元之和，也就是 $JX_0=1$。

[5] 證明略。

[6] 由穩定狀態的定義即可推得。

[7] 這 6 個轉移矩陣的非 1 的特徵值 $\lambda_2 = 0, 1-\alpha, or\ \alpha-1$，即 $\left|\lambda_2\right|<1$，仿定理 1 的證明，可推得這 6 個轉移矩陣都有穩定狀態。

3. 馬可夫鏈穩定狀態的判別：*n* 階轉移矩陣的情形

定理 2：若 1 是轉移矩陣 A 的特徵方程式之單根（simple root，即不是重根），且其他的根 λ 滿足 $|\lambda|<1$，則 A 有穩定狀態。

在證明定理 **2** 之前，讓我們先對它做點分析。首先，各位讀者不妨再次看看定理 **1** 證明中的 $\lim_{k\to\infty} X_k = \lim_{k\to\infty}\left(a_1\lambda_1^k\overline{x_1}+a_2\lambda_2^k\overline{x_2}\right)$，就能知道為什麼其他的特徵值 λ 要滿足 $|\lambda|<1$，因為這樣取極限後，$\lim_{k\to\infty}\lambda^k$ 就會是 **0**。接下來要處理的問題就是：為什麼 **1** 要是單根？以 $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ 為例，其特徵值 **1** 是二重根，即 $\lambda_1=\lambda_2=1$，因此，可找到兩個不平行向量 $\overline{x_1}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$、$\overline{x_2}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ 都是 **1** 的特徵向量。如此一來，對任意初始狀態

$X_0=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix}=a_1\overline{x_1}+a_2\overline{x_2}$，$0\le a_1,\ a_2\le 1$ 且 $a_1+a_2=1$，

$\lim_{k\to\infty} X_k=\lim_{k\to\infty}\left(a_1\lambda_1^k\overline{x_1}+a_2\lambda_2^k\overline{x_2}\right)=a_1\overline{x_1}+a_2\overline{x_2}=X_0$，也就是極限值不會唯一，而是與初始狀態 X_0 有關了。以下就是定理 **2** 的證明：

證明：**(1)** 令 $\lambda_1,\ \lambda_2,\cdots\cdots,\ \lambda_n$ 是轉移矩陣 A 的特徵值，對應的 n 個線性獨立的特徵向量為 $\overline{x_1},\ \overline{x_2},\cdots\cdots,\ \overline{x_n}$，[8]其中 $\lambda_1=1$，且當 $i\ge 2$ 時，$|\lambda_i|<1$。

對任意初始狀態 X_0，可寫成 n 個特徵向量的線性組合，令

$X_0=a_1\overline{x_1}+a_2\overline{x_2}+\cdots+a_n\overline{x_n}$，

則：

$$X_1=AX_0=a_1\left(A\overline{x_1}\right)+a_2\left(A\overline{x_2}\right)+\cdots+a_n\left(A\overline{x_n}\right)=a_1\lambda_1\overline{x_1}+a_2\lambda_2\overline{x_2}+\cdots+a_n\lambda_n\overline{x_n}$$

$$X_2=AX_1=a_1\lambda_1\left(A\overline{x_1}\right)+a_2\lambda_2\left(A\overline{x_2}\right)+\cdots+a_n\lambda_n\left(A\overline{x_n}\right)=a_1\lambda_1^2\overline{x_1}+a_2\lambda_2^2\overline{x_2}+\cdots+a_n\lambda_n^2\overline{x_n}$$

$$\vdots$$
$$\vdots$$

[8] 為什麼會是 n 個線性獨立的特徵向量？這要請讀者自行驗證了。可分為兩種情況，第一是特徵值 $\lambda\neq\lambda'$ 時，兩者的特徵向量必不平行；第二，若特徵值 λ 是 k 重根，$1<k\le n$，則可找到 k 個兩兩不平行的向量均是 λ 的特徵向量。

$$X_k = AX_{k-1} = a_1\lambda_1^k\overline{x_1} + a_2\lambda_2^k\overline{x_2} + \cdots + a_n\lambda_n^k\overline{x_n}$$

(2) 因為$\lambda_1 = 1$，且當$i \ge 2$時，$\left|\lambda_i\right| < 1$，所以

$\lim\limits_{k\to\infty} X_k = \lim\limits_{k\to\infty}\left(a_1\lambda_1^k\overline{x_1} + a_2\lambda_2^k\overline{x_2} + \cdots + a_n\lambda_n^k\overline{x_n}\right) = a_1\overline{x_1}$，即$\lim\limits_{k\to\infty} A^k X_0 = a_1\overline{x_1}$。因為每一個$A^k X_0$的各元均非負且總和為 **1**，故$a_1\overline{x_1}$也是各元均非負且總和為 **1**，即$a_1\overline{x_1}$就是穩定狀態。[9]

上述證明中的$a_1\overline{x_1}$會滿足$A(a_1\overline{x_1}) = a_1(A\overline{x_1}) = a_1(\lambda_1\overline{x_1}) = \lambda_1(a_1\overline{x_1})$，即$a_1\overline{x_1}$也是$\lambda_1 = 1$的特徵向量。也就是告訴我們，**特徵值 1 的特徵向量中，有一個各元均非負且總和為 1，那就是穩定狀態！**[10]

既然我們討論了定理 **1** 的逆敘述並不成立，同樣地，我們也要問：「定理 **2** 的逆敘述是否成立？」這次，答案就是肯定的了。理由一：若 **1** 是重根，則可找到兩個不平行的特徵向量$\bar{x}$與$\bar{y}$（分量和為 **1**），都是特徵值 **1** 的特徵向量，很容易可推得$\lim\limits_{k\to\infty} A^k\bar{x} = \bar{x}$且$\lim\limits_{k\to\infty} A^k\bar{y} = \bar{y}$，那就不符合穩定狀態須唯一的要求了！[11]理由二：只有特徵值 **1** 才會有每個元都是非負的特徵向量。利用反證法。若特徵值$\lambda \ne 1$的特徵向量中，存在非零向量$\overline{x}'$的每個元都是非負，那麼，令$J = \begin{bmatrix}1 & 1 \cdots 1\end{bmatrix}_{1\times n}$，則

$J = JA \Rightarrow J\cdot\overline{x'} = JA\cdot\overline{x'} = J(A\cdot\overline{x'}) = J\cdot\lambda\overline{x'} \Rightarrow (1-\lambda)\cdot J\overline{x'} = 0$，因$\overline{x'}$的每個元都是非負且$\overline{x'} \ne \vec{0}$，所以$J\overline{x'} > 0$，故$1-\lambda = 0$，這與$\lambda \ne 1$矛盾！有了這兩個理由後，我們就可以證

[9] $A(a_1\overline{x_1}) = a_1(A\overline{x_1}) = a_1(\lambda_1\overline{x_1}) = \lambda_1(a_1\overline{x_1})$，即$a_1\overline{x_1}$也是$\lambda_1 = 1$的特徵向量。

[10] 定理 2 的另一種證明方式，就是先找出特徵值 1 的特徵向量中，各元均非負且總和為 1 的向量，然後再證明它就會是穩定狀態。

[11] 例如前文中的例子$A = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$。若讀者認為單位矩陣這反例太特殊了，那可以再試試看

$A = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$， 1 是其特徵方程式$f(\lambda) = (1-\lambda)^2(1+\lambda)^2 = 0$的二重根，對應的特徵向量為$(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0)$與$(0,0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，讀者可自行驗證，只要是這兩個向量的線性組合$\vec{v}$，必定會滿足$\lim\limits_{k\to\infty} A^k\vec{v} = \vec{v}$。

明特徵值 1 的特徵向量中，有一個各元均非負且總和為 1，那就是穩定狀態！。這證明過程基本上與定理 **1** 證明中的第**(3)**部分是一樣的，筆者在此略去，留給有興趣的讀者試試。從定理 **1**、定理 **2** 到定理 **2** 的逆定理，花了好大一番工夫後，我們終於得到了定理 **3**：

定理 3：A 有穩定狀態 $\Leftrightarrow$ 1 是轉移矩陣 A 的特徵方程式之單根，且其他的根 λ 滿足 $|\lambda|<1$

4. 結語

筆者在此仍要呼應在〈「轉移矩陣」二三事**(2)**：歷年高中課本中的穩定狀態〉中的第四點建議，就是課本中不要出現是否有穩定狀態的判別定理。理由很簡單，除非要將特徵方程式、特徵值、特徵向量等整套理論放進高中課程中，不然，定理 **2** 或定理 **3** 絕對不可能寫進課本之中的！如此一來，課本充其量只能出現定理 **1** 或是定理 **1** 的一般情形（即 n 階轉移矩陣的情形），而筆者在〈「轉移矩陣」二三事〉這系列文章中，已多次表達這樣子作法的缺點，再此就不再嘮叨了！

最後，當我們從高觀點的特徵方程式、特徵值、特徵向量來看轉移矩陣時，我們就能更認識轉移矩陣，知道它的內在性質有：

(1) 轉移矩陣必有特徵值 **1**；
(2) 只有特徵值 **1** 才會有每個元都是非負的特徵向量。

由這兩個內在性質，我們才能得到定理 **2**。除這兩個內在性質之外，我們還可以證明轉移矩陣的內在性質**(3)**：特徵值 λ 都滿足 $|\lambda|\le 1$。這性質的證明有點繁複，筆者就省略不證了。一旦有了內在性質**(3)**，那麼實際判別是否有穩定狀態時，就容易許多了。因為，我們只要驗證特徵方程式 $f(\lambda)=0$ 滿足 $f(1)=0$ 且 $f'(1)\neq 0$，就可知道 **1** 是的單根，接下來只要再確認 **1** 不是 $\dfrac{f(|\lambda|)}{|\lambda|-1}=0$ 的根，即其餘的特徵值 λ 都滿足 $|\lambda|<1$，那麼，由定理 **2** 就知道穩定狀態存在了。至於要求出穩定狀態，就利用 $A\cdot X=X$ 來解方程組囉！

參考資料

Bryan,Kurt and Leise, Tanya. (2004). "The $25,000,000,000 Eigenvector: the Linear Algebra behind Google", *Siam Review* 48(3), 569-581.

Meyer, Carl D. (2000). *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics.

Rousseau, Christiane and Saint-Aubin, Yvan (2008). *Mathematics and Technology*. New

York: Springer.
Seneta, Eugene (2006). *Non-negative Matrices and Markov Chains*. New York: Springer.
Murty, M. Ram（陳麗伍翻譯） (2012).〈How Google Works—搜尋引擎中的線性代數〉，《數學傳播》36(3)：12-23。
單維彰、鄭惟厚主編 (2012). 《普通高級中學數學第四冊教師手冊》，台北：三民。

1. 為節省影印成本，本通訊將減少紙版的的發行，請讀者盡量改訂 PDF 電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail 至 suhy1022@gmail.com
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請 e-mail 至 suhy1022@gmail.com
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：http://math.ntnu.edu.tw/ ~ horng/letter/hpmletter.htm
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本：陳昭蓉 (東京 Boston Consulting Group)
基隆市：許文璋（南榮國中）
台北市：英家銘（台北醫學大學）楊淑芬（松山高中）杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中）蘇俊鴻（北一女中）陳啟文（中山女高）蘇惠玉（西松高中）蕭文俊（中崙高中）郭慶章（建國中學）李秀卿（景美女中）王錫熙（三民國中）謝佩珍、葉和文（百齡高中）彭良禎（師大附中）郭守德（大安高工）張瑄芳（永春高中）張美玲（景興國中）文宏元（金歐女中）林裕意（開平中學）林壽福、吳如皓 (興雅國中) 傅聖國（健康國小）李素幸（雙園國中）程麗娟（民生國中）林美杏（中正國中）朱賡忠（建成國中）
新北市：顏志成（新莊高中） 陳鳳珠（中正國中）黃清揚（福和國中）董芳成（海山高中）孫梅茵（海山高工）周宗奎（清水中學）莊嘉玲（林口高中）王鼎勳、吳建任（樹林中學）陳玉芬（明德高中）羅春暉 (二重國小) 賴素貞（瑞芳高工）楊淑玲（義學國中）林建宏 （丹鳳國中）莊耀仁（溪崑國中）、
宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中）吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）林宜靜（羅東高中）
桃園縣：許雪珍、葉吉海（陽明高中）王文珮（青溪國中） 陳威南（平鎮中學）洪宜亭、郭志輝（內壢高中） 鐘啟哲（武漢國中）徐梅芳（新坡國中） 程和欽 (大園國際高中)、鍾秀瓏（東安國中）陳春廷（楊光國民中小學）王瑜君（桃園國中）
新竹市：李俊坤（新竹高中）、洪正川、林典蔚（新竹高商）
新竹縣：陳夢綺、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）
苗栗縣：廖淑芳 (照南國中)
台中市：阮錫琦（西苑高中）、劉雅茵（台中二中）、林芳羽（大里高中）、洪秀敏（豐原高中）、李傑霖、賴信志、陳姿研（台中女中）、莊佳維（成功國中）、李建勳（萬和國中）
南投縣：洪誌陽（普台高中）
嘉義市：謝三寶（嘉義高工）郭夢瑤（嘉義高中）
台南市：林倉億（台南一中）黃哲男、洪士薰、廖婉雅（台南女中）劉天祥、邱靜如（台南二中）張靖宜（後甲國中）李奕瑩（建興國中）、李建宗（北門高工）林旻志（歸仁國中）
高雄市：廖惠儀（大仁國中）歐士福（前金國中）林義強（高雄女中）
屏東縣：陳冠良（枋寮高中）楊瓊茹（屏東高中）黃俊才（中正國中）
澎湖縣：何嘉祥 林玉芬（馬公高中）
金門：楊玉星（金城中學）張復凱（金門高中） 馬祖：王連發（馬祖高中）

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。懇請各位老師惠賜高見！

「轉移矩陣」二三事(2)：歷年高中課本中的穩定狀態 附錄

表一：「88 課綱」各版本教科書對馬可夫鏈穩定狀態的說明

版本	穩定狀態的敘述
三民版	如果一機率向量 $X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$ 為轉移矩陣 A 的固定機率向量，即 X 滿足 $AX=X$，則稱此一馬可夫鏈產生穩定的狀態 X。不一定每一個馬可夫鏈都會產生穩定的狀態，必須在極限值 $\lim\limits_{k\to\infty}A^kP^{(0)}$ 存在，即 $P^{(k)}=A^kP^{(0)}=\begin{bmatrix}p_1^{(k)}\\p_2^{(k)}\\\vdots\\p_n^{(k)}\end{bmatrix}$，數列 $\langle p_1^{(k)}\rangle$、$\langle p_2^{(k)}\rangle$、…、$\langle p_n^{(k)}\rangle$ 都有極限，纔有穩定的狀態。因為當 $\lim\limits_{k\to\infty}A^kP^{(0)}$ 存在時，就有 $\lim\limits_{k\to\infty}A^kP^{(0)}=X$，且 $AX=X$。 最後再說明初始狀態不影響穩定狀態。解題方法中，有利用二階的例題，展示用極限求穩定狀態，以及用 $AX=X$ 求穩定狀態這兩種方法。
南一版	**由例題與隨堂練習中可知：不管開始觀察那一天是晴天或是雨天，五天後，每天是晴天的機率約為 0.603，是雨天的機率約為 0.397。因此該市一年中雨天的天數大約為 365×0.397≒145 (天)。** **馬可夫（Andrei Andreyevich Markov，俄國，1856~1922）曾經證明：若 A 是一個 n 階轉移矩陣，且 A 或 A 的某一次方的所有的元都是正數，則對於任意的 X_0，當 n 趨近無限大時，$X_n=A^nX_0$ 會趨近一個行矩陣 X。這個 X 滿足下列兩個條件：(i) $(A-I_n)X=O$； (ii) X 的各元之和為 1。**
翰林版	只有在某個例題中，從第一天 $X_1=\begin{pmatrix}0.5\\0.5\end{pmatrix}$ 開始，算到 $X_8=AX_7$，其中 $A=\begin{pmatrix}0 & 0.25\\1 & 0.75\end{pmatrix}$。然後寫道：「**我們觀察到當 n 愈大時，X_n 愈接近 $X_1=\begin{pmatrix}0.2\\0.8\end{pmatrix}$，換言之，許多天以後，吳偉雄在甲自助餐店用餐的機率約為 0.2，在乙自助餐店用餐的機率約為 0.8。**」
正中版	在課本例題中，只求到 $A_{18}=P^{18}A_0$，其中 P 為轉移矩陣。在求 P^n 時，是利用計算機取近似值到小數點後第四位，故求到 P^{18}，就說 $P^{18}=P^{19}=P^{20}=\cdots\cdots$。
龍騰版	在課本例題中，最多只求到 $X_4=P^4X_0$，其中 P 為轉移矩陣。不過，在習題中有一題：「**假設台北市每年有 3%的人口移居台北縣，而台北縣每年有 2%的人口移居台北市。若台北縣市人口仍都不變，試求兩地人口之比例。**」
康熙版	無相關說明或例子。

表二：「95 暫綱」各版本教科書對馬可夫鏈穩定狀態的說明

版本	穩定狀態的敘述
南一版	與「88 課綱」的版本一樣，都用晴天、雨天機率的例子來呈現機率會越來越接近定值，也並未出現「馬可夫鏈」與「穩定狀態」這兩個名詞。不過，這版本刪除了馬可夫證明過的定理。
翰林版	例題 8：有互相連通的大、小水池各一個，兩水池中的魚總數是 1400 條，每天由小水池游向大水池的魚量占小水池魚量的 40%，而從大水池游向小水池的魚量占大水池魚量的 30%。如此日復一日，大水池與小水池的魚量都不變，求大水池與小水池的魚量。 習題第 6 題：棲息在 A、B 兩小島的某種鳥類總數是 5400 隻，每年 A 島上的鳥 80%會留在島上，而 20%移居到 B 島；B 島上的鳥 75%會留在島上，而 25%移居到 A 島。假設每年依這種方式遷移，兩個島上的鳥數量都保持一定，求 A、B 兩島上的鳥數量。 《教師手冊》: 這類問題最有趣的是找出穩定狀態，即求 $\overline{X}=\lim\limits_{n\to\infty}P^nX$，這 $\overline{X}$ 其實是滿足 $\overline{X}=P\overline{X}$，是 P 的一個固有向量，在這個例子中，$\overline{X}=\begin{pmatrix}3.33\\4.71\\1.96\end{pmatrix}$。
龍騰版	只列結果沒有證明： 設 A 是一個 n 階轉移矩陣，且 A 或 A 的某一次方之所有元都是正實數，則對於任意一個所有元都是非負的實數，且各元的和是 1 的 $n\times1$ 階矩陣 X_0，當 k 趨向無限大時，$X_k=A^kX_0$ 會趨近唯一的矩陣 X。而這個矩陣 X 就是滿足 (1) $AX=X$； (2) X 中各元的和為 1 的 $n\times1$ 階矩陣。 例題 8：……(3) 長期而言此選手的投籃命中率為？ 有不會呈現穩定狀態的例子：$B=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$
康熹版	像這樣的矩陣 T 稱為轉移矩陣。令 $X_1=\begin{pmatrix}a_1\\b_1\\c_1\end{pmatrix}$，其中 a_1、b_1、c_1 皆為非負實數，且 $a_1+b_1+c_1=1$，又令 $X_{n+1}=TX_n$，即 $X_{n+1}=T^nX_1$。若 $X_n=\begin{pmatrix}a_n\\b_n\\c_n\end{pmatrix}$，則 a_n、b_n、c_n 皆非負，且 $a_n+b_n+c_n=1$（證明留作習題）。在大部分情況下，可以證明 X_n 會趨於穩定，假設 $X=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ 是其穩定狀態（a、b、c 非負，且 $a+b+c=1$），即 $TX=X$。……值得注意的是穩定狀態 a、b、c 的解存在且唯一，它只與轉移矩陣 T 有關，而與初始值 a_1、b_1、c_1 無關。
全華版	在例題中求到 $P^{(8)}=A^8P^{(0)}$ 後寫道：「事實上，根據馬可夫的理論（請參閱附錄三)，甲、乙兩家石油公司的市占率會趨於固定的值（甲公司的市占率 60%，

	乙公司的市占率 **40%**)，然而，並非所有的轉移矩陣皆會使值趨於固定的值，如：轉移矩陣 $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$，……，除非 $a=b=\dfrac{1}{2}$，否則是不會有固定的值。」 附錄三：「……此定理的證明已超出本書範圍，因此我們僅將定理敘述如下：若 A 是馬可夫鏈的 n 階轉移矩陣，且其所有元都是正數，則必存在唯一的矩陣 $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$，其中 $0\le x_i\le 1$，$i=1,\ 2,\cdots,\ n$，且 $x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n=1$，使得 $AX=X$。定理中的矩陣 X（滿足 $AX=X$），我們稱 X 為此馬可夫鏈的穩定狀態矩陣。」
泰宇版	如果機率向量 X 是轉移矩陣 A 的固定機率向量，即 $AX=X$，那麼在一些條件下可以證明：當 $k\to\infty$ 時，$P^{(k)}\to X$，此時我們稱此一馬可夫鏈產生穩定狀態 X。值得一提的是：此穩定狀態與初始狀態 $P^{(0)}$ 無關。」舉例說明之後，「最後要提醒的是，並不是每一個馬可夫鏈都會產穩定狀態，例如 $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$，……

表三：「**99** 課綱」各版本教科書對馬可夫鏈穩定狀態的說明

版本	穩定狀態的敘述
南一版	在例題 **6** 及其隨堂練習之後寫道：「事實上，設機率矩陣 X 為 $X=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\begin{matrix}\leftarrow 甲\\\leftarrow 乙\\\leftarrow 丙\end{matrix}$，轉移矩陣 $P=\begin{pmatrix}0.5&0.4&0.3\\0.2&0.4&0.2\\0.3&0.2&0.5\end{pmatrix}$，若 $PX=X$（X 經 P 轉移後仍是 X 本身），則稱 X 為”穩定狀態”。由 $PX=X$ 得…… $X=\begin{pmatrix}0.40625\\0.25000\\0.34375\end{pmatrix}\begin{matrix}\leftarrow 甲\\\leftarrow 乙\\\leftarrow 丙\end{matrix}$。」除此之外，例題或習題之中，都沒以求穩定狀態的題目。
翰林版	由例題 **1** 及其隨堂練習可以觀察出：住在市區的人口比例在四年前有逐年下降的趨勢。我們不禁想要問：如果人口遷移的轉移矩陣一直沒有改變，則在許多年後，市區的人口會一直下降至零嗎？關於這個問題，數學家馬可夫證明了一個理論，說明最終市區及郊區人口的比例會趨近於一個穩定狀態。此理論超出高中課程範圍，但是我們仍然在此介紹當作補充，以完整呈現轉移矩陣的應用。 馬可夫定理[12]

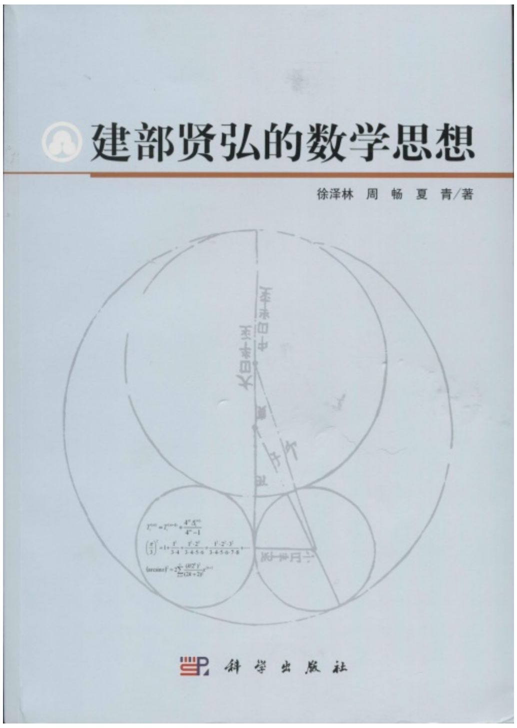
[12] 這個定理在此首度被冠上「馬可夫」的大名，也僅有在這個版本中做如此的稱呼，這並非是該定理通用的名稱。

	設 A 是一個 n 階轉移矩陣，且 A 或 A 的某一次方之所有元都是正實數，則對於任意一個 $n\times 1$ 階的機率向量 X_0，當 k 逐漸增大時，$X_k=A^kX_0$ 會逐漸趨近唯一的 $n\times 1$ 階矩陣 X，而這個矩陣 X 滿足**(1)** $AX=X$，**(2)** X 中各元的和為 **1**（即 X 也是機率向量），特別地，我們將 X 稱為穩定狀態時的矩陣。 其中**(1)**的 $AX=X$，即代表：若此時的狀態以機率向量 X 表示，則下一時刻代表狀態的機率向量亦為 X，也就是說這個狀態是穩定不動的。
龍騰版	在例 1 中，……，觀察發現：甲瓶的水量由 0.6 公升逐漸增加，乙瓶的水量由 0.4 公升逐漸減少。在此狀況下，如果長時間持續下去，那麼乙瓶的水量會繼續減少，甚至成為「空瓶」嗎？事實上，當 k 趨向無限大時，k 輪後的水量分布矩陣 $X_k=A^kX_0$ 會趨近唯一的矩陣 X，而且這個矩陣 X 就是滿足(1) $AX=X$；(2) X 中各元的和為 1 的 2×1 階矩陣（這證明超過本書範圍，故省略）。現在我們利用這個結論來求矩陣 X……
康熹版	在課本中提到利用電腦算出 $X_1,\ X_2,\cdots,\ X_{10}$ 的 **6** 位小數近似值，並一一列出，其中 $X_{n+1}=TX_n$，T 為轉移矩陣，$X_n=\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\\ c_n\end{pmatrix}$，然後寫：「觀察表 **3-3**，可見 $X_9\approx X_{10}$，進而會得到 $X_{10}\approx X_{11}\approx X_{12}\approx\cdots$。根據理論，$n$ 增大時，X_n 會趨於穩定，即 a_n、b_n、c_n 都會趨於穩定，由表 **3-3** 的數據可知：a_n 的穩定值 **0.505495** ≈**51%**，b_n 的穩定值 **0.274725**≈**27%**，c_n 的穩定值 **0.219780**≈**22%**。由此可見，長期來看（約 **9** 週後即顯現），A、B、C 三種套餐的占有率會趨於穩定，依序約為 **51%**、**27%**、**22%**。」
全華版	基本上在「**95** 暫綱」的版本上略做改變，文字敘述或有不同，但本質上是一樣的。不過，在「**95** 暫綱」的版本中，「穩定狀態」是放在附錄之中，到了此版本，則正式在課文內容中介紹「穩定狀態」： 一般而言，設 A 是一個轉移矩陣，若存在一個行矩陣 X 滿足 $AX=X$，且 X 的各元的和為 **1**，則稱此行矩陣 X 為轉移矩陣 A 的穩定狀態。……然而，並非所有的轉移矩陣街會使值趨於穩定，如：轉移矩陣 $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$，**……**，除非 $a=b=\dfrac{1}{2}$，否則是不會有固定的值。
泰宇版	若有一個狀態 X 滿足 $AX=X$，則稱 X 為此馬可夫鏈的穩定狀態 **(stable state)**。在前例中，……若該城裡與郊區人口遷移情形不變的話，那麼經長時間改變後，會趨於一個穩定狀態，此時城裡人口（約）占 **25%**，而郊區人口（約）占 **75%**。
三民版	以例題 **1** 做說明，在求出 X_5、X_6、X_{10}、$X_{20}=P^{20}X_0=\begin{pmatrix}0.3332\\0.6668\end{pmatrix}$、……、$X_{30}=P^{30}X_0=\begin{pmatrix}0.3333\\0.6667\end{pmatrix}$ 後寫道：「我們發現隨著 n 越來越大，X_n 漸趨穩定：逐漸變成一個固定的狀態矩陣 X，使得 $PX=X$。因為 X 表示長期以後母群體屬於各狀態的比率，所以 X 的元素和必為 **1**。**……**以上長期而言的穩定現象，對於有 n 種狀態的情況也都成立，但是其證明超出高中課程範圍。」

簡介徐澤林等《建部賢弘的數學思想》

洪萬生
台師大數學系退休教授

書名：建部賢弘的數學思想
作者：徐澤林、周暢、夏青
裝訂與頁數：平裝，**452** 頁
出版社：科學出版社，北京市
出版年：**2013**
定價：人民幣 **98** 元
ISBN 978-7-03-038684-7



本書是徐澤林教授師徒三人有關和算史研究的總結著作，作者三人以建部賢弘數學思想為主題，在數學文本的深入解讀中，探索建部賢弘的數學認識論，以及中國宋明理學、心學如何影響他的數學研究。這是和算史研究中頗為獨到的進路，非常值得推薦。

有關理學、心學對他的研究之影響，徐澤林等深入分析了建部的〈自質說〉，這是收入他的《綴術算經》中的最後一節，以前很少受到和算史家的青睞。因此，在此，我要引述徐澤林等的有關研究心得，說明和算能夠在東亞數學圈中獨樹一幟，不是沒有道理的：

> 〈自質說〉內容不只論說「人之質分」問題，還涉及「數學之質」，以及「人之質分」與「數學之質」的關係、「數學之理」及數學方法論問題，而且，對「自質說」思想的分析還需要結合《綴術算經》十二個術例中的自注文本加以系統分析。

不過，徐澤林認為中國宋明理學與建部的數學思想之關係，仍有進一步探討的必要，譬如

> 〈自質說〉所反映的數學思想與宋明理學在哪些點上是一致的？在方法論上，建部賢弘的『綴而探之以會數理』與宋明理學中『格物以致知』在形式上具有一定的相似性，這種相似性能否說明哲學與數學具有相同的方法論基礎？傳統哲學思想與數學思想能否在某種角度上達到統一？

在數學文本的研究上，本書也對關孝和、建部賢明與建部賢弘合著的《大成算經》內容進行了前所未有的深入分析，並論述它在數理思想上，如何影響方圓亭的《自然算法》。

另一方面，本書前三章主題依序為建部賢弘的時代、關孝和的數學遺產，以及建部賢弘的生平與著述，對於身為第八代將軍德川吉宗曆學顧問的建部之歷史脈絡，提供了非常完整的論述。因此，本書對於想要開始研究和算史的學者來說，尤其是不可少的參考文獻。

碩士論文：《科普書中的數學史敘事−以非歐幾何為例》摘要

鄭宜瑾
台師大數學系碩士班

由於非歐幾何在數學史中的戲劇性和重要性，許多科普作者紛紛在作品中提及此一主體。 鑒於此，本篇論文挑選了幾本廣受推薦，且分屬不同文類的科普作品，做為研究對象。這幾本書分別是高瑞夫與哈托許所著的數學小說《爺爺的證明題》、日本數學家岡部恆治的數學漫畫《用漫畫來學幾何》、李奧納多・曼羅迪諾 的《歐幾里得之窗》與馬里歐・李維歐的《上帝是數學家》。本論文亦參考專業數學史書籍《**The Historical Roots of Elementary Mathematics**》、**Victor J. Kats**《數學史通論》與 **Morris Kline**《數學：確定性的》與專業數學史網站 **Mactutor**，作為數學史實的一個標準。 筆者從文本分析，比較不同科普作者，針對非歐幾何此一主題 ，在數學史的敘事上有何異同。而科普書和專業數學史的敘事相比，又有何差異。

研究結果發現，在這四本科普書中，不約而同提到歐幾里得《幾何原本》的重要地位、第五設準的問題、非歐幾何歷史中的重要人物與非歐幾何對於數學本質上所造成的影響，這四個主題，是作者在勾勒非歐幾何歷史中不可或缺的因素。另一方面， 科普作家在科普書中提及的數學內容，並非完全符合史實。作者可能是為了符合敘事內容的連貫性，或者是顧及讀者在數學內容的理解力，不管真正原因為何，這種現象皆可視為一種作者與數學文本商量的結果。而在科普書與專業數學史敘事的比較中，筆者發現科普作者在提及數學家時，傾向加入專業數學史敘事中未提及的軼事，並深入描寫數學家的性格與心情轉折，勾勒數學家們有血有肉的形象，企圖利用此種寫作手法，讓讀者產生共鳴，進而減低對數學的疏離感。

關鍵字**:**非歐幾何、科普書、幾何原本、第五設準、數學史敘事。

論文心得

鄭宜瑾
台師大數學系碩士班

碩士論文是完成學位最重要的一道關卡，在畢業前，身邊親友關心你的話題，離不開論文進度；和一些已畢業的碩士好友聚會時，他們也常投以關愛眼神，同理你的焦慮外並分享寫自己寫論文時的訣竅。筆者有兩位在國外拿碩士學位的好友，他們所修的學位並不需要寫論文，聊到這個話題時，不約而同和我說，他們很慶幸不用寫論文；對於筆者而言，回頭看整個寫論文的過程，雖然不容易但卻也很開心自己完成了整個過程，從尋找論文題目、研讀文獻資料、構思論文架構、靜下心來完成整份論文的每一個步驟裡，學到做研究的基本態度和方法，在未知的領域中一步步地摸索前進，最後看到原本模糊的想法，以文字具體呈現出來，這種成就感真的無以言喻。

筆者於碩一時旁聽數學史與數學社會史的課程，老師和學長們會在課堂上分享西方數學史、中算、和算、數學科普書、小說、數學電影等不同主題，有時是在課堂上深入研讀，有時則是讀書會裡與其他人共同討論。老師給的資料豐富而博雅，在閱讀這些材料的過程中，發現自己很喜愛科普這一塊領域，也因此決定了大致的研究方向。當時與老師請益如何做相關的研究時，老師建議大量閱讀，並在閱讀時將「有感覺」(有共鳴)的文字記錄下來，反覆多讀幾次後，心中自然會浮現一些問題，而這些問題就可作為論文的研究方向，這是一種培養「問題意識」的過程。當我看完老師在課堂上推薦的科普書《爺爺的證明題》時，驚喜的發現作者將非歐幾何的這段數學史大量地融入小說創作中，這個主題在我曾經讀過的《歐幾里得之窗》、《上帝是數學家?》中都有出現過，當時的我其實沒甚麼把握，在與老師討論過後，老師肯定了這一個研究主題方向，並推薦《用漫畫學幾何》與其他參考資料，在這之後便開始著手進行研究。

我讀科普書的方式分成三個階段；第一，快速讀過整本書，大致了解書中內容；第二層次則是細讀，將書中與非歐幾何相關的內容畫線做記號，並將敘事內容打字紀錄，並依照主題歸類，第三層次則是比較不同科普書的敘事內容，並進一步從數學史專書中找到最接近真實的歷史脈絡，在這一個層次中得到的就是我論文中主要的內容。

萬事起頭難，一開始寫論文時真的不知從何下筆，聽從前輩的建議：「邊讀邊寫」，千萬不要想全部讀完了再寫，其實一邊寫作的同時，一邊會將讀過的東西思考統整，也會讓記憶更加深刻。在論文時併肩作戰的夥伴，和準備大考時一樣重要，雖然人研究的主題雖不盡相同，但在解讀文本、尋找資料與寫作上遭遇瓶頸時，有個人能聊一聊，反而會得到意外的靈感。

希臘哲學家蘇格拉底曾說：「認識你自己。」這是筆者在寫論文時的最大心得，論文就像是一趟修煉自我的旅程，在過程裡發現自己個性中的長處與短處、學習和自己長時間的獨處。筆者一直很害怕提筆寫文字，這一次撰寫論文的過程，但凡事總要有開始

才有機會進步。從一開始的慌亂無頭緒，到最後能順利完成論文，這一路走來，要謝謝學長與同學的幫忙和陪伴，還有洪老師的耐心指導。從老師與學長姊在做學問時的嚴謹態度，更深刻明白做學問所需要的耐心與毅力。而前輩們在討論問題時的虛心態度，並無私地傾囊相授，以身教示範，讓我體會到做學問時該有的開闊，這又是另一個意想步道的收穫。