HPM通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系退休教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）
助理編輯：黃俊瑋（台灣師大數學所研究生）
編輯小組：蘇意雯（台北市立教育大學）蘇俊鴻（北一女中）
黃清揚（福和國中）葉吉海（陽明高中）
陳彥宏（成功高中）陳啟文（中山女高）
王文珮（青溪國中）黃哲男（台南女中）
英家銘（台北醫學大學）謝佳叡（台灣師大數學系）
創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng

第十七卷 第九期 目錄（2014年9月）

從複數到三角函數公式

陳敏晧
蘭陽女中

複數在數學各領域均有重大影響，本文章將討論如何以複數的形式來證明三角函數的相關公式，由於複數具有極坐標形式，可以將角度做旋轉、長度做伸縮變換，這是傳統幾何學在直角坐標平面難以突破的面向，因此，利用複數來證明三角函數公式往往會有意想不到的收穫，也常使學習者見識到數學之美！

本文將使用到歷史法國數學家棣美弗**(Abraham de Moivre, 1667-1754)**於 **1730** 年發表的棣莫弗公式，即若 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，則 $z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta), n\in Z$ 。及歐拉**(Leonhard Euler, 1707-1783)**在 **1748** 年所發表的歐拉公式：$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ 。
首先論證正弦與餘弦的和差角公式：

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

證明：
$$\begin{aligned}&\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)\\&=e^{i(\alpha+\beta)}\\&=e^{i\alpha}\cdot e^{i\beta}\\&=(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)\\&=(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)+i(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)\end{aligned}$$

比較兩複數的實部與虛部，即得

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$ 。

接著引入三倍角公式：

(1) $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ 。
(2) $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ 。

證明：
$$\begin{aligned}
&\cos 3\theta + i\sin 3\theta \\
&= e^{i(3\theta)} \\
&= (e^{i\theta})^3 \\
&= (\cos\theta + i\sin\theta)^3 \\
&= (\cos\theta)^3 + 3(\cos\theta)^2 \cdot i\sin\theta + 3\cdot\cos\theta(i\sin\theta)^2 + (i\sin\theta)^3 \\
&= (\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta) + i(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta) \\
&= [\cos^3\theta - 3\cos\theta(1-\cos^2\theta)] + i[3(1-\sin^2\theta)\sin\theta - \sin^3\theta] \\
&= (4\cos^3\theta - 3\cos\theta) + i(3\sin\theta - 4\sin^3\theta)
\end{aligned}$$

比較兩複數的實部與虛部，即得 $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ ； $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ 。

接著我們可以試著證明更複雜的三角函數公式：

$$(1)\sin\theta + \sin 2\theta + \ldots + \sin n\theta = \frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}\cdot\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \text{。}$$

$$(2)\cos\theta + \cos 2\theta + \ldots + \cos n\theta = \frac{\sin\frac{n\theta}{2}\cos\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \text{。}$$

第一種證明方法：不用複數概念。
(1) 首先考慮積化和差與和差化積的公式，即

$$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta), \cos\alpha - \cos\beta = 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right) \text{。}$$

令 $x = \sin\theta + \sin 2\theta + \ldots + \sin n\theta$ ，將等式兩邊同乘 $2\sin\frac{\theta}{2}$ ，即得

$$\begin{aligned}
2\sin\frac{\theta}{2}\cdot x &= 2\sin\frac{\theta}{2}\cdot\sin\theta + 2\sin\frac{\theta}{2}\cdot\sin 2\theta + \ldots + 2\sin\frac{\theta}{2}\cdot\sin n\theta \\
&= \left(\cos\frac{\theta}{2} - \cos\frac{3\theta}{2}\right) + \left(\cos\frac{3\theta}{2} - \cos\frac{5\theta}{2}\right) + \ldots + (\cos\frac{(2n-1)\theta}{2} - \cos\frac{(2n+1)\theta}{2}) \\
&= \cos\frac{\theta}{2} - \cos\frac{(2n+1)\theta}{2}
\end{aligned}$$

$$=2\sin\frac{(n+1)\theta}{2}\cdot\sin\frac{n\theta}{2}$$

移項得 $x=\dfrac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}\cdot\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$，即 $\sin\theta+\sin 2\theta+...+\sin n\theta=\dfrac{\sin\frac{n\theta}{2}\cdot\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$。

證明(2)：首先考慮積化和差與和差化積的公式，即

$$2\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta),\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$ 。

令 $y=\cos\theta+\cos 2\theta+...+\cos n\theta$，將等式兩邊同乘 $2\sin\dfrac{\theta}{2}$，即得

$$2\sin\frac{\theta}{2}\cdot y=2\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\theta+2\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos 2\theta+...+2\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos n\theta$$

$$=(\sin\left(-\frac{\theta}{2}\right)+\sin\frac{3\theta}{2})+(\sin(-\frac{3\theta}{2})+\sin\frac{5\theta}{2})+...+\left(\sin\left(-\frac{(2n-1)\theta}{2}\right)+\sin\left(\frac{(2n+1)\theta}{2}\right)\right)$$

$$=\sin\left(\frac{(2n+1)\theta}{2}\right)-\sin\frac{\theta}{2}$$

$$=2\sin\frac{n\theta}{2}\cdot\cos\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)$$

移項得 $y=\dfrac{\sin\frac{n\theta}{2}\cdot\cos\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}$，

即 $\cos\theta+\cos 2\theta+...+\cos n\theta=\dfrac{\sin\frac{n\theta}{2}\cos\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$。

證明：

(1) $\sin\theta+\sin 2\theta+...+\sin n\theta=\dfrac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}\cdot\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$。

(2) $\cos\theta+\cos 2\theta+...+\cos n\theta=\dfrac{\sin\frac{n\theta}{2}\cos\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$。

第二種證明方法：利用複數的概念。

我們可以使用歐拉公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$，若將 θ 以 $-\theta$ 代入可得 $e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta$，可

得$\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\\ \sin\theta=\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\end{cases}$，變換變數得$\begin{cases}\cos\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{e^{\frac{i\theta}{2}}+e^{\frac{-i\theta}{2}}}{2}\\ \sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{e^{\frac{i\theta}{2}}-e^{\frac{-i\theta}{2}}}{2i}\end{cases}$，

將上式令為

$$\begin{aligned}
y+ix&=(\cos\theta+\cos 2\theta+\ldots+\cos n\theta)+i(\sin\theta+\sin 2\theta+\ldots+\sin n\theta)\\
&=(\cos\theta+i\sin\theta)+(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)+\ldots+(\cos n\theta+i\sin n\theta)\\
&=(\cos\theta+i\sin\theta)+(\cos\theta+i\sin\theta)^2+\ldots+(\cos\theta+i\sin\theta)^n\\
&=e^{i\theta}+e^{i2\theta}+\ldots+e^{in\theta}\\
&=\frac{e^{i\theta}\cdot(1-e^{in\theta})}{1-e^{i\theta}}\text{，分母}1-e^{i\theta}=e^{\frac{i\theta}{2}}\cdot(e^{\frac{-i\theta}{2}}-e^{\frac{i\theta}{2}})=e^{\frac{i\theta}{2}}(-2i\sin\frac{\theta}{2})\\
&=\frac{e^{i\theta}\cdot(1-e^{in\theta})}{e^{\frac{i\theta}{2}}(-2i\sin\frac{\theta}{2})}\\
&=\frac{e^{\frac{i\theta}{2}}-e^{\frac{i(2n+1)\theta}{2}}}{-2i\sin\frac{\theta}{2}}\\
&=\frac{\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}-\cos\frac{(2n+1)\theta}{2}-i\sin\frac{(2n+1)\theta}{2}}{-2i\sin\frac{\theta}{2}}\\
&=\frac{(\sin\frac{(2n+1)\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2})+i(\cos\frac{\theta}{2}-\cos\frac{(2n+1)\theta}{2})}{2\sin\frac{\theta}{2}}
\end{aligned}$$

因此，$y=\cos\theta+\cos 2\theta+\ldots+\cos n\theta=\dfrac{\sin\frac{(2n+1)\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}}=\dfrac{\sin\frac{n\theta}{2}\cos\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$。

$x=\sin\theta+\sin 2\theta+\ldots+\sin n\theta=\dfrac{\cos\frac{\theta}{2}-\cos\frac{(2n+1)\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}}=\dfrac{\sin\frac{n\theta}{2}\cdot\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$。

第三種證明方法：圖形証法。

如下圖所示，我們令 $\overline{BB_1}=1$，且 $\overline{BB_1}$ 與 x 軸之夾角為 θ，再過 B_1 點做另一條線段 $\overline{B_1B_2}=1$，

並使其與第一條線段 $\overline{BB_1}$ 的夾角為 θ，所以，$\overline{B_1B_2}$ 與 x 軸之夾角為 2θ，以此類推做 n 次，

得到點 B_n，利用對同弧時圓周角等於其所對圓心角的性質，則 $B,B_1,B_2,\ldots,B_n$ 都在以 A 為圓心的圓周上，令 $B(0,0),B_1(\cos\theta,\sin\theta),B_2(\cos\theta+\cos 2\theta,\sin\theta+\sin 2\theta)$，以此類推，令

$B_n(\cos\theta+\cos 2\theta+\ldots+\cos n\theta,\sin\theta+\sin 2\theta+\ldots\sin n\theta)$，在 ΔABB_1 中，因為 $\overline{AB}=\overline{AB_1}$，所以

$\angle ABB_1=\angle AB_1B=90^0-\dfrac{\theta}{2}$，根據正弦定理，即 $\dfrac{\overline{AB}}{\sin(90^0-\frac{\theta}{2})}=\dfrac{\overline{BB_1}}{\sin\theta}$，利用正弦二倍角公

式，得到 $\overline{AB}=\dfrac{1\cdot\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\theta}=\dfrac{\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}=\dfrac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}$，接著考慮 ΔABB_n，因為頂角 $\angle BAB_n=n\theta$，

則底角 $\angle ABB_n=\angle AB_nB=90^0-\dfrac{n\theta}{2}$，再根據正弦定理及正弦二倍角公式

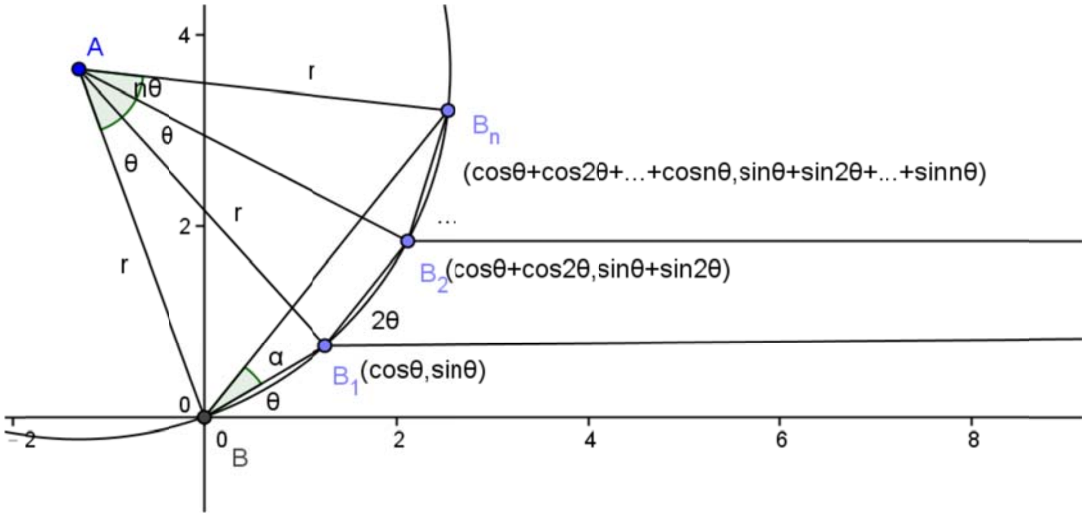
$\dfrac{\overline{AB}}{\sin(90^0-\frac{n\theta}{2})}=\dfrac{\overline{BB_n}}{\sin n\theta}$，化簡得 $\overline{BB_n}=\overline{AB}\cdot\dfrac{\sin n\theta}{\cos\frac{n\theta}{2}}=\dfrac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}\cdot\dfrac{2\sin\frac{n\theta}{2}\cdot\cos\frac{n\theta}{2}}{\cos\frac{n\theta}{2}}=\dfrac{\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$，利

用圓周角性質 $\angle B_1BB_n=\dfrac{1}{2}\angle B_1AB_n=\dfrac{(n-1)\theta}{2}$，即圖上 $\alpha=\dfrac{(n-1)\theta}{2}$，算得

$\alpha+\theta=\dfrac{(n-1)\theta}{2}+\theta=\dfrac{(n+1)\theta}{2}$，最後根據正弦與餘弦定義得

$$\cos\theta+\cos 2\theta+\ldots+\cos n\theta=\overline{BB_n}\cdot\cos\frac{(n+1)\theta}{2}=\frac{\sin\frac{n\theta}{2}\cdot\cos\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$ 。

$$\sin\theta+\sin 2\theta+\ldots+\sin n\theta=\overline{BB_n}\cdot\sin\frac{(n+1)\theta}{2}=\frac{\sin\frac{n\theta}{2}\cdot\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$



歐拉公式$e^{i\pi}+1=0$常常被譽為數學界中最美的公式。最後，筆者引《博士熱愛的算式》第 **163** 頁做為結語：

歐拉從這些看似毫無關係的數字中，發現彼此之間自然的關聯：「e的π和i之積的次方再加上1，就變成了0。」我重新看著博士的紙條。永無止境循環下去的數字，和讓人難以捉摸的虛數畫出簡潔的軌跡，在某一點落地。雖然沒有圓的出現，但來自宇宙的π飄然來到e的身旁，和害羞的i握著手。他們的身體緊緊靠在一起，屏住呼吸；但有人加了1以後，世界就毫無預警發生了巨大的變化，一切都歸於0。

費爾茲獎首度出現女性數學家！

洪萬生
台師大數學系退休教授

目前正在首爾舉行（**8/13-8/21**）的 **2014 ICM**（國際數學家大會），已經公布今年的費爾茲獎得獎人，依序如下：

- **Artur Avila**，**CNRS Paris (France) / IMPA (Brasil)**，巴西人。
- **Manjul Bhargava**，**Princeton University**， 印度裔，出生於加拿大。
- **Martin Hairer**，**Warwick University (UK)**，奧地利人。
- **Maryam Mirzakhani**，**Stanford University**，伊朗人，女性 。

這份名單充分展現了數學天賦能力對於種族與性別的無私，非常值得我們頌揚。有關 **Maryam Mirakhani** 這位女數學家，我們要多講幾句話。

出生於 **1977** 年的 **Maryam Mirakhani**，在伊朗德黑蘭完成大學教育，然後前往哈佛大學，於 **2004** 年榮獲博士學位，她的指導教授 **Curtis McMullen** 也曾是費爾茲獎（**1998**）得主。她年幼時酷愛閱讀，曾立志要當作家，直到高中快唸完，才對數學發生興趣。或許正因為如此，她才得以參加國際奧林匹亞競賽，並榮獲 **1994**（香港舉辦）、**1995**（多倫多舉辦）的金牌獎。在 **1995** 年這一次，她更是在伊朗學生參賽歷史中，創下首度滿分的紀錄。

Maryam Mirakhani 的得獎，讓我們聯想到古波斯的偉大數學家奧瑪•海雅姆（**Omar Khayyam, 1048-1131**），這一位以《魯拜集》聞名於英美文學界的博學者，在歷史上更有名的，其實是他的數學成就。他的祖先都以製造帳棚為業，但由於他多方面的才華，而贏得統治者的贊助，還有，他去世後的墳墓（現在已成為博物館），更是阿拉伯建築的經典作品。

總之，古波斯與今伊朗的對比，讓我們對於數學知識的源遠流長與性別跨界，有著更深刻的期待！

貝葉斯和貝氏定理

蘇俊鴻
北一女中

貝氏定理**(Bayes' Theorem)**在高中數學的機率單元中出現，被當成是條件機率的重要議題，為人所知的是它的定理內容以及相關的應用，如品管檢驗、醫學檢定等。但多數人不知道貝氏是誰？什麼問題促使他發展出貝氏定理？貝氏定理在現今統計學上有著廣泛的應用，但學說提出之初，就如此為數學家和統計學家所擁護嗎？這些問題都是本文撰寫的動機。首先，就由托馬斯．貝葉斯**(Thomas Bayes, 1702-1761)**的生平開始說起，貝氏定理正是由他所提出的。

托馬斯出身於英國新教徒家庭，是家中七個孩子的老大。他的父親約書亞．貝葉斯**(Joshua Bayes)**是英國最早被任命的六位新教牧師之一。對於貝葉斯的童年教育我們所知不多，有歷史學者認為他可能受過棣美弗**(Abraham de Moivre, 1667-1754)**的指導，也有人認為他接受過成為牧師的養成訓練。

1719 年，貝葉斯進入蘇格蘭的愛丁堡大學，主要是學習邏輯和神學。在當時，新教徒是無法得到牛津大學或是劍橋大學的入學資格。儘管沒有任何他在愛丁堡學習數學的記錄，不過，他為了反駁貝克萊主教**(George Berkeley, 1685-1753)**在《分析學家》**(*The Analyst*, 1734)**對微積分邏輯基礎的攻擊，曾在 **1736** 年寫過一篇〈流數學說的介紹，以及對《分析學家》作者的反對提出數學家的防禦〉**(*An Introduction to the Doctrine of Fluxions, and a Defence of the Mathematicians Against the Objections of the Author of The Analyst*)**，文章一開頭便提到：

我早就認為流數法的基本原理和規則，需要更為全面且清楚的解釋和證明。

無疑表明著他對流數法的熟悉。不過，他卻反對貝克萊出於宗教因素的批評。很快地，貝葉斯也被任命為牧師，擔任他父親的助手。在 **1733** 年之前，更成為 **Tunbridge Wells**(距離倫敦 **35** 英里)地方教堂的牧師。直到 **1752** 年，他才從這個位置退休，但仍繼續居住在 **Tunbridge Wells**。

儘管沒有任何數學的作品，**1742** 年貝葉斯被選為英國皇家學會的院士。不過，這是當時的風氣：沒有人在生前用自己的名字義發表作品，上面提及 **1736** 年的數學作品是匿名出版。直到他死後，才出版有關 $\log z!$ (由斯特林和棣美弗所給出)的漸近級數之斂散性的數學研究。

托馬斯．貝葉斯　圖片出處 **http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/PictDisplay/Bayes.html**

事實上，貝葉斯更值得注意的是他在機率論上的研究：〈《機率論》中一個問題的解決〉(***An Essay towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances***)，而《機率論》(***The Doctrine of Chances*, 1718**)是棣美弗有關機率的數學著作。同樣地，在他死後，他的朋友理查德．普萊斯(**Richard Price, 1723-1791**)發現此篇論文，加以重新編輯註解，於 **1764** 年送交英國皇家學會的《自然科學會報》(***The Philosophical Transactions of the Royal Society***)出版。在這篇論文中，有今日我們所熟知的條件機率之討論，以及被稱為貝氏定理的命題。

在說明貝葉斯的論文之前，先來交待一下當時機率論的發展情形。法國貴族默勒(**Chevalier de Mere**)請教巴斯卡(**Blaise Pascal, 1601-1665**)骰子擲點及賭金分配等問題，引發巴斯卡與費瑪(**Pierre de Fermat, 1601-1665**)兩人書信討論解決，奠立了機率論的基礎。**1655** 年，荷蘭數學家惠更斯(**Christiaan Huygens, 1629-1695**)走訪巴黎，得知巴斯卡與費瑪兩人討論的問題，引發興趣，進而延伸討論，**1657** 年出版一本小冊子《論機率博奕的計算》(***On the Calculations in Games of Chance***)。到十八世紀初，該書一直都是機率論入門的著作。

伯努利(**Jakob I. Bernoulli, 1654-1705**)在惠更斯的基礎上，因應當時對於保險風險評估等實際的需求，討論機率與各種實際問題的結合。在他死後 **8** 年，出版的《猜度術》(***Ars Conjectandi*, 1713**)成為機率論重要的著作。今日我們所知的大數法則、二項分佈等概念，均在書中可見。伯努利認為任意給定誤差範圍，只要實驗次數足夠多，希望產生的結果總數與實驗總數的比值和理論值 ***p*** 的差距就會在給定範圍內。依此，就能推估觀測的次數。不過，他對二項分佈的近似公式取得不夠好，無法應用於實際情形上。這個工作後來就由棣美弗完成。**1733** 年棣美弗發展出我們現在所說的常態曲線，作為二項分佈的近似，改善伯努利所需觀測次數之估計(**高斯及拉普拉斯後來又重新發現**)。棣美弗將此法收入 **1738** 和 **1756** 年再版的《機率論》中(**此書於 1718 年初版**)。

貝葉斯論文的標題〈《機率論》中一個問題的解決〉說明他的工作奠基於棣美弗的成果上。文章開頭，就提出他想解決的問題

> **給定某未知事件(指發生的機率未知)發生與未發生的次數，求在一次試驗中發生的機率值介於兩個指定機率值之間的可能性(機率)。**

以現在的符號表示，令 X 為 n 次試驗中事件發生的次數，x 表事件在一次試驗中發生的機率值，r, s 為指定的機率且 $r < s$。那麼，貝葉斯所求問題即為

$$P(r < x < s \mid X) = ？$$

貝葉斯採取公理化的體系，先給出定義，再提出命題，其中最重要的兩個命題是：

> 命題 **3**
> **兩個相繼發生的事件機率是一個比率，它由第一事件發生的機率，以及在第一事件發生的條件下第二事件的機率複合而成。**

命題 **5**

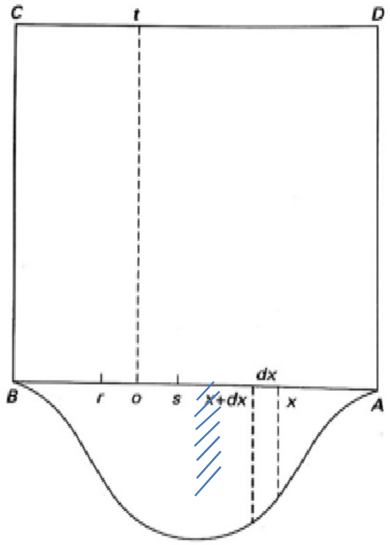
若有兩個相繼發生的事件，已知第二事件的機率為 $\dfrac{b}{N}$，兩者都發生的機率為 $\dfrac{P}{N}$。

由於第二事件已經發生，據此我猜想第一事件也會發生，且它的機率無疑是 $\dfrac{P}{b}$。

令 E 表示第一事件，F 表示第二事件。那麼，命題 **3** 即為今日所提的條件機率的乘法原理 $P(E\cap F)=P(E)P(F\,|\,E)$，命題 **5** 則是貝氏定理，在 F 發生的情形下，計算 $P(E\,|\,F)=\dfrac{P(E\cap F)}{P(F)}$。

事實上，我們若將 F 視為「n 次試驗中事件發生的次數為 X 次」的事件，E 視為「$r_1<x<r_2$」的事件。貝葉斯的問題便是計算 $P(E\,|\,F)$。因此，只要能求出 $P(F)$ 和 $P(E\cap F)$ 即可。接著貝葉斯用了一個頗為獨特的想法，據以建立機率模型進行計算。

接著，我們來看貝葉斯如何求出 $P(F)$ 和 $P(E\cap F)$。他用了一個頗為獨特的想法，據以建立機率模型進行計算。如圖一，考慮水平擺放一個正方形的桌面或平面 $ABCD$，將球 O 或 W 拋向桌面，並假設它們落在桌面上任何相等區域內的機率相同。這時，假設球 W 先拋，過落點畫一條直線 ot 平行 AD，分別交 CD 與 AB 於 t 和 o。接著，球 O 被拋擲 $p+q=n$ 次，如果它一次單獨拋擲中落在 AD 和 ot 之間，稱為在一次試驗中發生了事件 M。



圖一

為了便於接下來的說明，我們不妨設 $\overline{AB}=1$。依照貝葉斯的說法，球 W 的位置決定了機率 x。同時，點 o 落在點 r 與 s 之間的機率可以表示為 $\overline{rs}$ 的長度。因此，在球 W 拋擲後，事件 M 的條件機率相當於 $\overline{Ao}$ 的長度。

反過來說，任何給定一個機率範圍，都能用 $\overline{AB}$ 上的一個區間來表示，記做 $[x, x+dx]$，此時，x 值若視為球落在 ot 右側的機率，則 $1-x$ 表示球落在 ot 左側的機率。所以，在 $p+q=n$ 次的拋擲中，球有 p 次落在 ot 右側的機率為

$y = C_p^n x^p (1-x)^q = C_p^n x^p (1-x)^{n-p}$ 。

接著，貝葉斯在 $\overline{AB}$ 的下方畫出 $y = C_p^n x^p (1-x)^{n-p}$ 對應的曲線**(**承自棣美弗的成果**)**。

由命題 **3** 知道，$P(E \cap F) = P(E)P(F \mid E)$。因此，球 W 落在區間 $[x, x+dx]$ 的上方，而球 O 有 p 次落在球 W 右側的機率可以用 $[x, x+dx]$ 下方與曲線之間所圍成的區域**(**斜線所示**)** 面積表示。所以，當 $P(E \cap F) = P((r < x < s) \cap (X = p))$ 即為區間 $[r, s]$ 下方與曲線之間所圍的區域面積。以現在的符號即為

$$\int_r^s C_p^n x^p (1-x)^{n-p} dx$$

同理，$P(F) = P((0 < x < 1) \cap (X = p))$，可以表為 $\overline{AB}$ 與曲線之間所圍的區域面積，為

$$\int_0^1 C_p^n x^p (1-x)^{n-p} dx$$

因此，由定理 **5** 可知，

$$P(E \mid F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{\int_r^s C_p^n x^p (1-x)^{n-p} dx}{\int_0^1 C_p^n x^p (1-x)^{n-p} dx}$$

依此結果，我們易知：事件 M 發生的機率，只要知道一定次數的試驗中發生與不發生的次數就能決定，不用知道更多其他的信息，透過上述面積的計算就能得到機率。

儘管貝葉斯形式上解決了這個問題，進入統計推斷的領域。但是，至少有兩個困難亟需跨越：首先，分子和分母涉及的面積計算**(**積分**)** 並不容易。再來，對於上面這個推論的方式**(**等同一個思想實驗**)**，利用球的投擲滾動是否真的能代表實際情形嗎？而且，貝葉斯只考慮 $X = 0, 1, 2 \cdots, n$ 都具有相同的機率的情形，因為他覺得「沒有理由認為在一定次數的試驗中，它發生的次數會偏向某個可能的值，而不是其他的值。」這個假設引發不小的爭論：在不了解給定情形下發生事件的機率，就可以斷定所有可能的結果都具有相同的機率嗎？

而且，貝氏定理的核心概念是「先驗機率＋新獲得的資訊＝更新後的後驗機率」。這與二十世紀初期方興未艾，以頻率論**(frequentism)** 為核心概念的統計學是相抵觸。可想而知，貝氏定理被長期冷落也就不意外。不過，進入二十一世紀，基於貝氏定理所發展的各式應用卻充斥在我們四周，如 **Google** 搜索篩選詞條到無人駕駛汽車判斷自己的行駛位置等等。這又是另一段很長的故事，有興趣的讀者，可以參閱 **Sharon McGrayne**

所寫的《不死的定理》(***The Theory That Would Not Die: How Bayes' Rule Cracked the Enigma Code, Hunted Down Russian Submarines, and Emerged Triumphant from Two Centuries of Controversy*. Yale University Press, 2011.**)

1. **為節省影印成本，本通訊將減少紙版的的發行，請讀者盡量改訂 PDF 電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail 至 suhy1022@gmail.com**
2. **本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。**
3. **歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請 e-mail 至 suhy1022@gmail.com**
4. **本通訊內容可至網站下載。網址：http://math.ntnu.edu.tw/ ~ horng/letter/hpmletter.htm**
5. **以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡**

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本：陳昭蓉 (東京 Boston Consulting Group)
基隆市：許文璋（南榮國中）
台北市：英家銘（台北醫學大學）楊淑芬（松山高中）杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中）
蘇俊鴻（北一女中）陳啟文（中山女高）蘇惠玉（西松高中）蕭文俊（中崙高中）
郭慶章（建國中學）李秀卿（景美女中）王錫熙（三民國中）謝佩珍、葉和文（百齡高中）
彭良禎（師大附中）郭守德（大安高工）張瑄芳（永春高中）張美玲（景興國中）
文宏元（金歐女中）林裕意（開平中學）林壽福、吳如皓 (興雅國中) 傅聖國（健康國小）
李素幸（雙園國中）程麗娟（民生國中）林美杏（中正國中）朱賡忠（建成國中）
新北市：顏志成（新莊高中） 陳鳳珠（中正國中）黃清揚（福和國中）董芳成（海山高中）孫梅茵（海山高工）周宗奎（清水中學）莊嘉玲（林口高中）王鼎勳、吳建任（樹林中學）陳玉芬（明德高中）羅春暉 (二重國小) 賴素貞（瑞芳高工）楊淑玲（義學國中）林建宏 （丹鳳國中）莊耀仁（溪崑國中）、
宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中）吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）林宜靜（羅東高中）
桃園縣：許雪珍、葉吉海（陽明高中）王文珮（青溪國中） 陳威南（平鎮中學）
洪宜亭、郭志輝（內壢高中） 鐘啟哲（武漢國中）徐梅芳（新坡國中） 程和欽 (大園國際高中)、
鍾秀瓏（東安國中）陳春廷（楊光國民中小學）王瑜君（桃園國中）
新竹市：李俊坤（新竹高中）、洪正川、林典蔚（新竹高商）
新竹縣：陳夢綺、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）
苗栗縣：廖淑芳 (照南國中)
台中市：阮錫琦（西苑高中）、劉雅茵（台中二中）、林芳羽（大里高中）、洪秀敏（豐原高中）、李傑霖、賴信志、陳姿研（台中女中）、莊佳維（成功國中）、李建勳（萬和國中）
南投縣：洪誌陽（普台高中）
嘉義市：謝三寶（嘉義高工）郭夢瑤（嘉義高中）
台南市：林倉億（台南一中）黃哲男、洪士薰、廖婉雅（台南女中）劉天祥、邱靜如（台南二中）張靖宜（後甲國中）李奕瑩（建興國中）、李建宗（北門高工）林旻志（歸仁國中）
高雄市：廖惠儀（大仁國中）歐士福（前金國中）林義強（高雄女中）
屏東縣：陳冠良（枋寮高中）楊瓊茹（屏東高中）黃俊才（中正國中）
澎湖縣：何嘉祥 林玉芬（馬公高中）
金門：楊玉星（金城中學）張復凱（金門高中） 馬祖：王連發（馬祖高中）

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。懇請各位老師惠賜高見！