HPM通訊
發行人：洪萬生（台灣師大數學系退休教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）
助理編輯：黃俊瑋（台灣師大數學所研究生）
編輯小組：蘇意雯（台北市立教育大學）蘇俊鴻（北一女中）
黃清揚（福和國中）葉吉海（陽明高中）
陳彥宏（成功高中）陳啟文（中山女高）
王文珮（青溪國中）黃哲男（台南女中）
英家銘（台北醫學大學）謝佳叡（台灣師大數學系）
創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng

第十八卷 第一期 目錄（2015年1月）

數學文化素材融入三年級課後社團之個案研究 (II)

林美媛 [1] 蘇意雯 [2]
[1] 臺北市立中正國小 mayan@jjes.tp.edu.tw
[2] 臺北市立大學數學系 yiwen@utaipei.edu.tw

（續前）

肆、研究結果與討論

本節根據所蒐集的資料，分析闡述為期十週的數學文化素材融入國小課後社團數學教學，對個案學生所產生的影響及改變。

一、提升數學學業成就

小花的數學上學期總平均成績為 **83.17** 分，在參加「數學與人文」社團之後，在期中考前小花告訴研究者他對數學考試有信心，學期總平均從 **83.17** 進步到 **92.28**。經過一學期的社團參與，小花的爸爸也覺得他進步很多，而且不必再額外花時間教他，比以前明顯進步。

T：你覺得這樣的學習方式對你是否有幫助呢？請說說看。
S：我覺得有幫助，我覺得我會知道更多數學的知識。
T：你對這樣的課後社團有沒有什麼感覺或想法？
S：想知道下個星期老師要上什麼。　　　　【T1020308-S】
T：期中考擔不擔心？
S：沒問題，我有信心考好。
T：為什麼？
S：因為我懂得比別人多啊！　　　　【T1020412- S】
T：上完了今天的課，你學到了什麼？可以說說看嗎
S：高斯很聰明。
T：從高斯的方法，你發現了什麼？

S：要配成 101 才會變簡單。
T：為什麼變簡單。
S：101 有 50 個就可以用乘的。
T：高斯在和你一樣的年紀時，計算 1 加到 100 的方法，你也會嗎？
S：以前不會，現在才會。
T：「數學與人文社團」與平常數學課程有沒有不一樣的地方？說說看。
S：可以學習古時候的人的智慧，因為可能會有更好的辦法。
T：你覺得這樣的學習方式對你是否有幫助呢？請說說看。
S：有幫助，我以後想要用更聰明的方法去算數學。 【T1020315-S】
T：請問爸爸這十二週下來有沒有發現小花在數學學習的改變？有什麼改變？
P：感覺他進步很多，數學的能力變得比較強，以前如果他有不會的題目，我解釋給他聽，他都聽不懂，現在一說就懂，而且最近也都沒什麼不會的，有時回來我出題目給他算看看，結果都會。那我就不用再教他了。 【T10206024-P】

二、知曉數學知識與人類活動以及社會文化之關聯

上社團前小花覺得平常很少用到數學，社團課之後小花能從生活中發現到有許多的事物，例如：生活中到處都有數字：車牌、名牌、電話…。石頭丟到水池會出現圓形的水紋，請客的桌子經過創意就成了七巧板，現在他知道原來這些都是和數學有相關的。

T：你覺得人的生活為什麼需要數學嗎？
S：生活中到處都有數字像車牌、名牌、電話…。
T：你覺得早期的人類為了什麼而開始需要數學？
S：就像埃及的人要計算有幾隻聖鳥、或者記錄自己有多少東西等。
T：古代的人都是怎麼記錄的呢？
S：有些是用狼的骨頭刻記號或泥板作記號像紙粘土那樣。 【A1020301-S】
T：今天的課中你有什麼新發現？
S：水的波紋真的是圓形的。
T：你覺得這樣的學習方式對你是否有幫助呢？
S：發現數學和大自然有關係。
T：數學文化素材融入的課程與平常數學課程有沒有不一樣的地方？
S：讓我發現和數學有關的事情。 【T1020426-S】
T：從今天的課程裡，你學到了什麼？可以說說看嗎
S：請客的桌子也可以變成數學的遊戲。
T：所以數學和日常生活有相關嗎？
S：有。 【T1020503S】

三、覺得數學課變得生動、有趣

透過數學文化素材融入數學教學，讓學生更進一步的體驗到數學不止是數字和符號的堆砌，它有許多涉及了古今中外的有趣題材，數學文化素材的運用讓老師嘗試使用多元的方式來進行教學，能達到活動教學、活化課堂的效果。

T：數學文化素材融入的課程與平常數學課程有沒有不一樣的地方？
S：比平常的上課有趣多了。
T：為什麼？
S：因為老師有介紹羅賽塔石碑，我覺得很酷。
T：為什麼很酷？
S：因為那是很久很久以前的人所留下來的、是真的、不是假的。
T：你覺得這樣的學習方式對你是否有幫助呢？
S：有幫助，我會懂得比別人多，回去可以告訴同學或爸爸。
T：你對這樣的課後社團有沒有什麼感覺或想法？
S：我比較喜歡這樣上數學課，因為可以知道一些神祕的古代故事，和平常上課一直算題目不同。【T1020301-S】

從這幾週的社團上課過程中，小花回家會和爸爸討論，家長表示孩子很有興趣也和他分享了很多像埃及的數學（記數符號和乘除算）、**0** 最晚才出現的、九九乘法的歌、找偽幣等，感覺都是很益智的活動，爸爸非常喜歡直問暑假會不會繼續開課。

T：以後還有機會的話希望讓孩子上這樣的課嗎？
P：OK！希望。
T：有沒有其它的建議或意見？
P：暑假如果能開課的話就更好了。　　　　　　【T1020517-P】

伍、結論與建議

本研究以數學文化素材融入國小三年級課後社團數學教學，共進行七個單元，歷時十週的研究過程。研究者透過教學觀察、錄音錄影資料、訪談等相關資料進行分析、探討在數學文化素材融入教學後，對個案學生的影響，並由此研究過程，得到下列結論與建議。

一、 結論

(一)數學文化素材有助於學生知曉數學知識與人類活動以及社會文化之關聯

在本研究中，數學文化素材的取材大致有四大方向：**1.**以數學史題材為主；**2.**來自當下生活週遭與數學相關的元素；**3.**益智遊戲的題材；**4.**數學繪本及相關媒材，這些都與人類活動或社會文化背景關係密切。其中，數學史素材中數學的起源、最早的符號、最早的圖形無一不是來自生活中的需求或社會上共同需要面對的問題的處理，其內容呈現著數學的發展脈絡以及文化背景不同所孕育出不同的數學面向。另外，從生活週遭去找尋、發現學生們比較關心、注意的數學元素，以記數符號來說，例如：球星的號碼林書豪的 **17** 號到 **7** 號、王建民的球衣號碼等甚至到幸運數字的討論、學生和老師的年齡、身高等，都是現下社會中大家注目的焦點，也是小朋友們常會聽到、看到、接觸到的題材，它們都是很好的生活中的數學元素，因為這些素材一直就存在日常生活當中被討論以及關注。

(二)數學文化素材能培養學生欣賞數學、將數學視為文化的寶藏而讚賞它

數學文化素材包羅萬象、內容豐富、多元，大都是學生未曾聽聞過的，在數學課程中融入數學文化素材能讓學生覺得數學課變得生動而有趣，引發學生學習的興趣。尤其數學文化素材中數學家的努力不懈的精神及過程可以是激發學生學習以及欣賞的人格典範，運用數學文化素材也可以引導學生學習欣賞數學簡潔、對稱、平衡的數學美學。

二、檢討與建議

（一）數學文化素材應適當選擇

由於史料難易不一，太艱深的數學史料並無法切合國小教學。因此，教師應該先體會教科書的精神，尋找適當數學史料後加以剪裁，再經過自我詮釋後才可以進行教學實作（蘇意雯，**2007**）。此外妥適安排教材，做好內外部的連結可以彌補時間運用上的不足，將數學文化素材融入國語、社會、自然、綜合活動等等都是可以嘗試的方式，也不致於讓剛開始要實施這樣融入教學的教師受限於時間而產生焦慮感（沈志龍、蘇意雯，**2009**）。

（二）廣開數學課後社團

課後社團的成立是有其必要性的，尤其以都會地區的學校，學生的家庭多數為雙薪家庭，課後社團的成立可以有效解決學生下課後沒地方去的問題。所以，成立數學課後社團是一個可嘗試的方式，只是比較困擾的是家長可能會拿來和坊間的數學補習班作評比，誤以為是另一種數學的反覆練習或快速學習班，這是觀念上有待克服的部分，如果學生因為數學文化素材融入課後社團的影響對數學建立了不一樣的認知和情感，願意主動參與學習數學、樂於接觸數學科普書籍，進而能以數學眼光看待事物、欣賞事物，相信這會是每一位老師所衷心期盼的。

參考文獻

王曉鳳（**2010**），〈讓數學文化潤澤我們的數學課堂〉，中國教師研修網檢自 **http://bzr.teacherclub.com.cn/dts/resource/download.action?id=4639173**。

沈志龍、蘇意雯（**2009**），〈當動畫與學習工作單相遇－數學史融入國小數學教學之實作研究〉，《教師天地》，**163**，**70-77**。

李文林（**2005**），《文明之光-圖說數學史》。濟南市：山東教育出版社。

李國偉（**2013**），〈數學文化面面觀之數學思維〉，載於國立勤益科技大學通識教育學院 **&** 中央研究院數學研究所（主編），**2013** 年數學文化與教育國際研討會會議手冊（頁 **80-97**）。台北市：國立勤益科技大學通識教育學院；中央研究院數學研究院。

李善良、單墫（**2002**），〈我們為什麼要學習數學-兼及新世紀中小學數學課程目標〉，《數學傳播》，**26**（**4**），**77-88**。

邱守榕（**1996**），《學門資源整合規劃資料-數學教育》。臺北市：行政院國家科學委員會。

林孝信（**2012**），〈大學通識課程如何呼應數學文化的教育目標？〉【**101** 年數學文化與通識課程規劃座談會】檢自 **http://w3.math.sinica.edu.tw/nsc_mathedu/general/abs.php**。

洪萬生（**1984**），〈數學史與數學教育〉，《科學月刊》，**173**。

洪萬生（1998），〈HPM 隨筆（一）〉，《HPM 通訊》，1（2）。
洪萬生（2000），〈無異解中的三案初探：一個 HPM 的觀點〉，《科學教育學刊》，8（3），215-224。
洪萬生（2001），〈『古代數學文本在課堂上的使用』研究心得〉，《HPM 通訊》，4（12）。
洪萬生（2006），《此零非彼 o--數學、文化、歷史與教育文集》。臺北市：臺灣商務印書館。
徐澤林（2007），〈江戶時代的算額與日本中學數學教育〉，《數學傳播》，31（3），pp. 70-78。
徐澤林（2009），〈數學史概論--第一講〉，【天津師範大學--精品課程】檢自 http://59.67.71.238:8080/shuxueshi/d%20y%20j.htm。
童莉（2006），《基於數學文化的數學課堂教學文化氛圍的構建》。重慶師範大學學報，23（3），62-64。
馮芬芬（2008），〈如何在中學數學教學中滲透數學文化〉，【桐廬教研網-初中數學-數學文化】檢自 http://www.tljys.net/czshuxue/ShowClass.asp?ClassID=382。
劉柏宏（2011），〈數學與邏輯--期中教學反思雜記〉，【數學文化部落閣】檢自 http://blog.ncut.edu.tw/meworksv2a/meworks/page1.aspx?no=3612&step=1&newsno=5195Victor。
劉柏宏（2012a），〈從數學思考到思考數學〉，【數學教師知識庫 101 學年度演講與研討會資料】檢自 http://www.mtedu.tmue.edu.tw/forum.php?mod=viewthread&tid=290。
劉柏宏（2012b），〈數學文化之我見〉，【數學文化部落閣】檢自 http://blog.ncut.edu.tw/meworksv2a/meworks/page1.aspx?no=17902&step=1&newsno=5321
劉柏宏（2012c），〈數學文化與數學教育〉，【數學文化部落閣】檢自 http://blog.ncut.edu.tw/meworksv2a/meworks/page1.aspx?no=17902&step=1&newsno=5322
蕭文強（1976），〈數學發展史給我們的啟發〉，《抖擻》，17（46-53）。
蕭文強（1992），〈數學史和數學教育：個人經驗和看法〉，《數學傳播》，16（3），23-29。
蕭文強（1993），《1，2，3，…以外》。香港：三聯書店。
蘇意雯（2007），〈日本算額題的趣味教學〉，《科學教育月刊》，299，35-40。
蘇意雯（2011），〈國小階段之數學史素材設計初探〉，《科學教育研究與發展季刊》，62，75-96。
NCTM (1989), *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

【HPM 國際研討會報導專欄】

2014 建部賢弘國際研討會紀行

英家銘
臺北醫學大學人文暨社會科學院

2014 年八月，筆者受邀至東京御茶水女子大學參加「建部賢弘國際會議 **2014**」。這個會議是為了要紀念和算家建部賢弘 **(1664-1739)** 誕生 **350** 週年。建部賢弘與其師關孝和 **(?-1708)** 被認為是日本江戶時代 **(1603-1868)** 最重要的兩位數學家，而他們的算學研究也代表了日本數學本土化之後轉化與創新最重要的里程碑，意義重大。

這次的研討會是由日本四日市大學關孝和數學研究所森本光生教授（圖一前排中手握海報者）主辦，地點選在距離建部賢弘出生地不遠的御茶水女子大學舉行。御茶水女子大學的前身是明治時代設立的東京女子師範學校，至今校園內仍然有附屬小學校、中學校與高校。在這個校園開會，跟一般大學的感覺很不同，比較有中小學嚴肅的氛圍。事實上，御茶水女子大學的出入口都還有門禁，我們與會學者要表明身份才能進入。

圖一：建部賢弘國際會議 **2014** 與會學者合影

本次研討會有來自東亞、西歐、北美、紐西蘭與日本國內共三十餘位數學史學者參加。既然這個研討會主要的目的是紀念建部賢弘，所以最重要的主題當然是以和算為中心。下面是本次研討會的三大主題：

1. 「關流」的算學，特別是與建部賢弘有關的數學成就。
2. 傳統東亞數學（包含中算、和算與東算）。

3. 東亞脈絡中的西方數學 **vs.**東亞數學。

本次研討會關於建部賢弘的討論很多，但由於筆者對於和算的陌生，我只能把研討會資料帶回台灣讓我們 **HPM** 通訊團隊中對和算有研究的伙伴來好好參考。不過，這次研討會關於和算的報告中，有幾個讓筆者印象深刻的地方，寫出來與大家分享。

第一件事情是「享保日本図」，這是建部賢弘等人受將軍德川吉宗之命繪製的全日本地圖。本來已經失傳，**2014** 年發現私人收藏品，目前交由廣島縣立歷史博物館收藏。因為本次研討會，所以這張地圖特地從廣島運來御茶水女子大學展覽，並請廣島博物館的研究員向大家報告這張地圖的特點。看到這個古地圖，又是從失傳再度發現，頗為感動。可惜現場不准拍照。這次研討會，上海交通大學的薩日娜老師也就「享保日本図」與清國的「皇輿全覽圖」之間的比較為題發表論文。

第二件事情是，很高興看到和算也在國際間越來越多人有興趣研究。除了日本國內、台灣、中國一些數學史家，以及法國知名學者 **Annick Horiuchi** 等人以外，這次有一位來自紐西蘭的博士生 **Rosalie Hosking** 也在研究和算。這次研討會她就和算代數方法「點竄術」為題發表論文。她將於 **2015** 年中完成論文答辯，未來研究和算的生力軍又增加了一位。

第三件事情是一位小說家的演講。學術研討會很少會請到小說家報告他創作的過程。這次請到的是《円周率を計算した男》的作者鳴海風，他是工程師出身的小說家，平常就很喜歡研究和算。這本小說中的主角就是建部賢弘，劇情中有常見的愛情與兄弟之情。賢弘的兄長建部賢明也是江戶時代重要的學者。作者說，他寫到賢弘終於完成圓周率的計算之後，感嘆如果兄長賢明還在世的話，一定能夠理解他的計算而且稱讚他。這當然是虛構的劇情。然而，在這本書出版數年之後的 **2005** 年，原本被認為失傳的建部賢弘關於圓周率的著作『弧背截約集』在古書店被發現，而這本書裡面，建部賢弘真的有寫下同樣的感概。聽到這句話，全場鼓起掌聲。小說家從人類的感情出發看世界，有時候比我們歷史學家更接近真實。

除和算之外，這次也有許多歐洲數學史與中算史的論文發表。不過，關於東算，也就是韓國傳統數學，相關的論文比較少。這次主要的報告者原本僅有洪性士教授等三位數學家出身的學者進行報告，主要的內容是朝鮮算學的整體面向，以及朝鮮算學家在方程式論上的討論與創新。因為東算的研究者較少，而且大多為韓國學者，本次研討會也邀請我參加，希望我可以提供一個韓國數學史的「國際觀點」。筆者前年收到邀請參加這個研討會，當然甚感榮幸，所以我在這次會議，就從數學社會史，而不是純數學的角度，發表我對十九世紀儒家明算者南秉吉的研究，特別是在朝鮮實學的脈絡之下，南秉吉如何推廣算學。

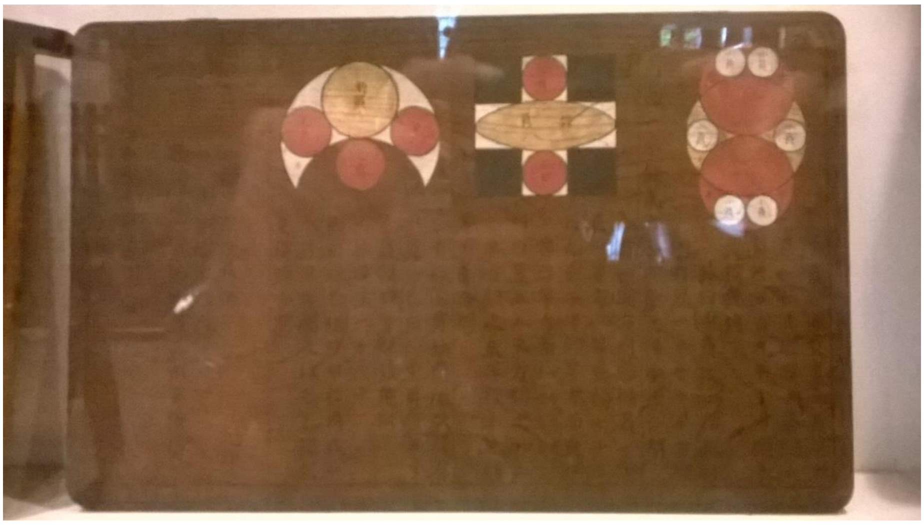
圖二：筆者報告關於朝鮮儒家明算者南秉吉的研究

說到這裡，其實我也想聊聊台灣學者與台灣社會的優勢。我們台灣位處東亞，相對於中國的強大經濟實力，日本與韓國的傳統社會，台灣學者與台灣社會其實在國際化與靈活度來說是很有競爭力的。台灣學者其實比較容易接受歐美學者的研究觀點，而在教育上，台灣也比較容易接受新的教學思路。這些優勢，其實我們應該要好好發揮。

這次研討會在東京舉行,所以筆者也趁機到位於涉谷的金王八幡宮,拜見三片算額。由於這次是筆者首度造訪日本，所以筆者過去其實只有在書上看過算額的照片。所謂算額，就是江戶時代與明治初期，算學家將研究寫在匾額上獻給神社，作為發表研究與感謝神明加持的物品。東京都過去因為東京大震災與二戰美軍空襲的緣故，古老的算額保留下來的不多。今日得見，實在感動！圖三與圖四即為其中兩片算額的照片，與大家分享。

這次研討會有許多對於東亞數學史研究的論文發表，筆者收穫甚多，也希望這次帶回的文件資料能夠幫助國內的和算研究者有更多的參考資料與研究觀點。未來筆者也會對於我所參加的 **HPM** 相關研討會做系列性的報導。

圖三：位於涉谷的金王八幡宮所收藏之算額



圖四：位於涉谷的金王八幡宮所收藏之算額

1. 為節省影印成本，本通訊將減少紙版的的發行，請讀者盡量改訂 PDF 電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail 至 suhy1022@gmail.com
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請 e-mail 至 suhy1022@gmail.com
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：http://math.ntnu.edu.tw/ ~ horng/letter/hpmletter.htm
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本：陳昭蓉 (東京 Boston Consulting Group)
基隆市：許文璋（南榮國中）
台北市：英家銘（台北醫學大學）楊淑芬（松山高中）杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中）蘇俊鴻（北一女中）陳啟文（中山女高）蘇惠玉（西松高中）蕭文俊（中崙高中）郭慶章（建國中學）李秀卿（景美女中）王錫熙（三民國中）謝佩珍、葉和文（百齡高中）彭良禎（師大附中）郭守德（大安高工）張瑄芳（永春高中）張美玲（景興國中）文宏元（金歐女中）林裕意（開平中學）林壽福、吳如皓 (興雅國中) 傅聖國（健康國小）李素幸（雙園國中）程麗娟（民生國中）林美杏（中正國中）朱賡忠（建成國中）
新北市：顏志成（新莊高中） 陳鳳珠（中正國中）黃清揚（福和國中）董芳成（海山高中）孫梅茵（海山高工）周宗奎（清水中學）莊嘉玲（林口高中）王鼎勳、吳建任（樹林中學）陳玉芬（明德高中）羅春暉 (二重國小) 賴素貞（瑞芳高工）楊淑玲（義學國中）林建宏 （丹鳳國中）莊耀仁（溪崑國中）、
宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中）吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）林宜靜（羅東高中）
桃園縣：許雪珍、葉吉海（陽明高中）王文珮（青溪國中） 陳威南（平鎮中學）洪宜亭、郭志輝（內壢高中） 鐘啟哲（武漢國中）徐梅芳（新坡國中） 程和欽 (大園國際高中)、鍾秀瓏（東安國中）陳春廷（楊光國民中小學）王瑜君（桃園國中）
新竹市：李俊坤（新竹高中）、洪正川、林典蔚（新竹高商）
新竹縣：陳夢綺、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）
苗栗縣：廖淑芳 (照南國中)
台中市：阮錫琦（西苑高中）、劉雅茵（台中二中）、林芳羽（大里高中）、洪秀敏（豐原高中）、李傑霖、賴信志、陳姿研（台中女中）、莊佳維（成功國中）、李建勳（萬和國中）
南投縣：洪誌陽（普台高中）
嘉義市：謝三寶（嘉義高工）郭夢瑤（嘉義高中）
台南市：林倉億（台南一中）黃哲男、洪士薰、廖婉雅（台南女中）劉天祥、邱靜如（台南二中）張靖宜（後甲國中）李奕瑩（建興國中）、李建宗（北門高工）林旻志（歸仁國中）
高雄市：廖惠儀（大仁國中）歐士福（前金國中）林義強（高雄女中）
屏東縣：陳冠良（枋寮高中）楊瓊茹（屏東高中）黃俊才（中正國中）
澎湖縣：何嘉祥 林玉芬（馬公高中）
金門：楊玉星（金城中學）張復凱（金門高中） 馬祖：王連發（馬祖高中）

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。懇請各位老師惠賜高見！

四圓相切問題

吳允中[1]、黃俊瑋[2]

[1]台灣師範大學數學系三年級

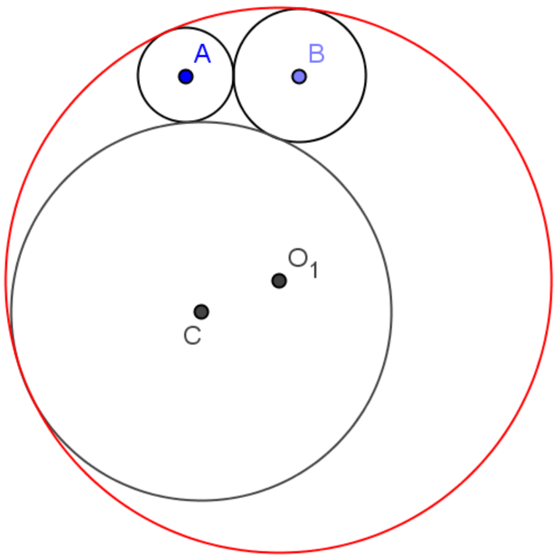
[2]台北市立和平高中

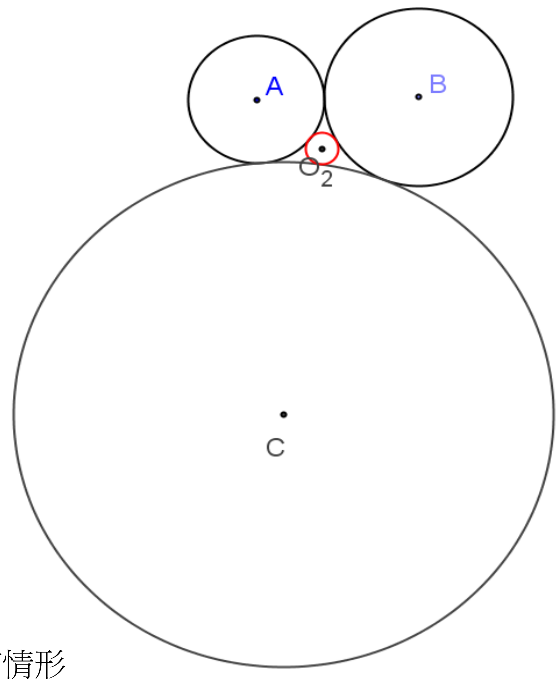
一、前言

江戶時期日本數學家對於各種幾何問題的求解，極感興趣。這些多元的幾何問題，可說是和算（江戶時期日本本土數學）最豐富的數學寶藏。當中，又以容切問題最引人注目，例如三角形或其它多邊形內切多個圓，求各圓直徑之類的問題，或者多個圓彼此內切或外切的問題等。這類問題在當時的日本數學界頗為流行，並常見於和算特有的數學扁額 ─ 算額。當時的數學家因成功地解題，為了感念神佛，特將數學問題、圖形與答案，繪製於木製的扁額上，並奉納、懸掛於神社或寺廟中，形成了日本數學史上特有的「算額奉納」數學文化。另一方面，算額也是當時數學家展現數學能力與研究成果的重要媒介。無怪乎有一位日本數學普及作家稱呼這種算額活動為「江戶科學院」。本文描述一個四圓相切問題的性質，並藉現代數學符號予以證明。

二、四圓兩兩相切問題

當四圓兩兩相切時，可分為兩種情形，如下兩圖所示：





圖一 四圓兩兩相切的所有情形

1. 有最大圓 O_1 同時內切於其他三小圓 （圖一的左邊）
2. 有最小圓 O_2 同時外切於其他三小圓 （圖一的右邊）

令圓 A、B、C 的半徑為 R_1、R_2、R_3，另一圓半徑為R_4

則滿足

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right)^2=\left(\frac{1}{R_1}\right)^2+\left(\frac{1}{R_2}\right)^2+\left(\frac{1}{R_3}\right)^2+\left(\frac{1}{R_4}\right)^2$$

上述為一個二次多項式，其兩根恰為R_4的兩種可能：

記左圖大圓 **O_1** 半徑為 **R_{4+}**；右圖大圓 **O_2** 半徑為 **R_{4-}**。為方便記，取 **R_{4-}**為負值**(**大小無異**,** 正負相反**)**

下來，則是對上述關係式的證明。如圖二，令圓 **A**、B 外切於 P 點，X 點為 C 點在$\overline{AB}$的垂足點。令直線 $L_1 // L_2$ 與圓 C 相切，且 $L_1 \perp \overleftrightarrow{AB}$。$\overleftrightarrow{AB}$分別交圓 **A**、B 於 **$A_1$**、$B_1$ 兩點，交直線 L_1、L_2 於 **A_2**、B_2 兩點。

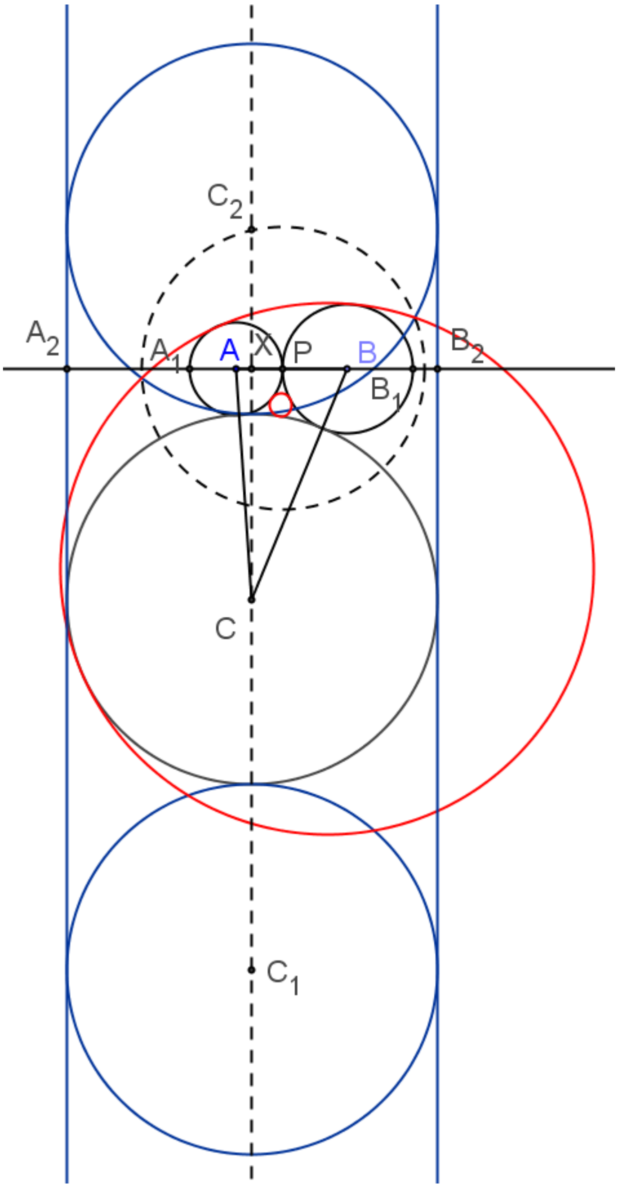


圖 (二)

(Ⅰ) 依海龍公式，得△ABC = $\sqrt{\mathrm{R_1R_2R_3(R_1+R_2+R_3)}}$

則 $\overline{\mathrm{XC}} = \frac{2\sqrt{\mathrm{R_1R_2R_3(R_1+R_2+R_3)}}}{\mathrm{R_1+R_2}}$

(Ⅱ) 取 r 為反演半徑，使得 I(P, r)(圓 C) = 圓 C

由於圓 C 與圓 A、B 相切，故

I(P, r)(圓 A) =直線 L_1 ; I(P, r)(圓 B) =直線 L_2

則 $\overline{\mathrm{PA_1}}\cdot\overline{\mathrm{PA_2}} = r^2$； $\overline{\mathrm{PB_1}}\cdot\overline{\mathrm{PB_2}} = r^2$， $\overline{\mathrm{A_2B_2}} = 2\mathrm{R_3}$

故 $\overline{\mathrm{A_2B_2}} = \overline{\mathrm{PA_2}} + \overline{\mathrm{PB_2}}$

$\Rightarrow\ 2\mathrm{R_3} = r^2\left(\frac{1}{PA_1}+\frac{1}{PB_1}\right)$

$\Rightarrow\ r^2 = 4R_3\Big/\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) = \frac{4R_1R_2R_3}{R_1+R_2}$

(Ⅲ) 由(Ⅰ)、(Ⅱ)結果，可得

$\frac{\overline{\mathrm{XC}}}{r^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R_1+R_2+R_3}{R_1R_2R_3}}$……………………………①

(Ⅳ) 令 M 點在圓 C 上，使得 $\overline{\mathrm{MP}} \perp \overline{\mathrm{MC}}$

則 $r^2 = \overline{PM}^2 = \overline{PC}^2 - \overline{MC}^2$

$= \overline{PX}^2 + \overline{XC}^2 - {R_3}^2$………………………②

(Ⅴ) 做圓 C_1 與圓 C 相切，亦與直線 L_1、L_2 相切，

其中 P 點不在圓 C_1 內 (如圖二)

則 I(P, r)(圓 C_1) = 圓 O_1 為其一解

記圓 O_1 半徑為 R_{4+}

則依反演基本性質可得 $\frac{\mathrm{R_3}}{\mathrm{R_{4+}}} = \frac{\overline{\mathrm{PM_1}}}{\overline{\mathrm{PN_1}}}$

$\frac{\mathrm{R_3}}{\mathrm{R_{4+}}} = \frac{\overline{\mathrm{PM_1}}}{\overline{\mathrm{PN_1}}} = \frac{\overline{\mathrm{PM_1}}}{\mathrm{r^2}/\overline{\mathrm{PM_1}}} = \frac{\overline{\mathrm{PM_1}}^2}{\mathrm{r^2}}$ ……………③

(Ⅶ) 考慮 $\overline{PM_1}^2 = \overline{PC_1}^2 - \overline{M_1C_1}^2$

$= \overline{PX}^2 + \overline{XC_1}^2 - {R_3}^2$

$= \overline{PX}^2 + \left(\overline{XC} + 2R_3\right)^2 - {R_3}^2$

$$= \left(\overline{PX}^2 + \overline{XC}^2 - {R_3}^2\right) + 4{R_3}^2 + 4R_3 \cdot \overline{XC}$$

$$= r^2 + 4{R_3}^2 + 4R_3 \cdot \overline{XC}$$

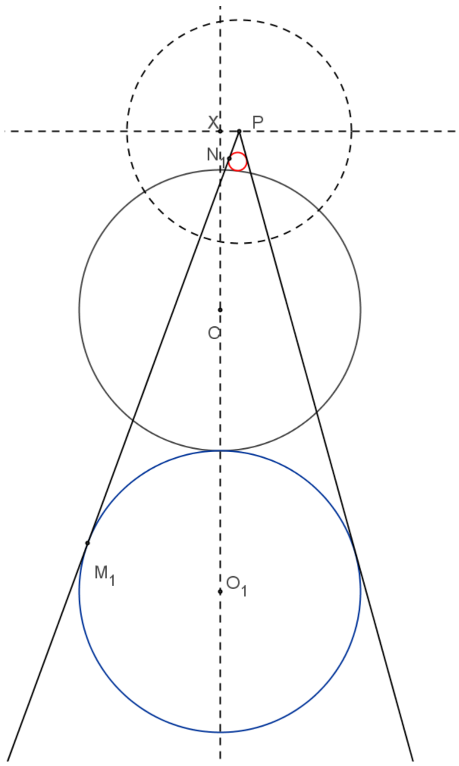


圖 (三)

註: 反演中心 **P** 不在圓 C_1 內，故其反形 O_1 與原形 C_1 相離，且 **P** 點為外位似中心

(Ⅵ) 做圓 C_2 與圓 **C** 相切，亦與直線 L_1、L_2 相切

其中 **P** 點在圓 C_2 內 (如圖四)

則　$I(P, r)$(圓 C_2) = 圓 O_2 為其一解

記圓 O_2 半徑為 R_{4-}

則依反演基本性質可得 $\frac{R_3}{R_{4-}} = -\frac{\overline{PM_2}}{\overline{PN_2}}$

$$\frac{R_3}{R_{4-}} = -\frac{\overline{PM_2}}{\overline{PN_2}} = -\frac{\overline{PM_2}}{r^2/\overline{PM_2}} = -\frac{\overline{PM_2}^2}{r^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots④$$

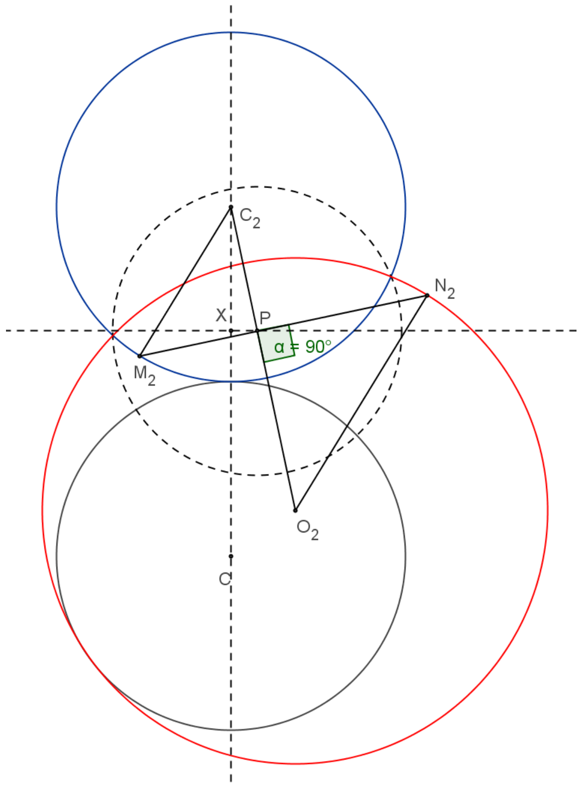
(Ⅷ) 考慮 $\overline{PM_2}^2 = \overline{M_2C_2}^2 - \overline{PC_2}^2$

$$= {R_3}^2 - \left(\overline{PX}^2 + \overline{XC_2}^2\right)$$

$$= \mathbf{R_3}^2 - \overline{\mathbf{PX}}^2 + \left(2\mathbf{R_3} - \overline{\mathbf{XC}}\right)^2$$

$$= -\left(\overline{\mathbf{PX}}^2 + \overline{\mathbf{XC}}^2 - \mathbf{R_3}^2\right) - 4\mathbf{R_3}^2 + 4\mathbf{R_3} \cdot \overline{\mathbf{XC}}$$

$$= -\mathbf{r}^2 - 4\mathbf{R_3}^2 + 4\mathbf{R_3} \cdot \overline{\mathbf{XC}}$$



圖（四）

註：反演中心 **P** 在圓 $\mathbf{C_2}$ 內，故其反形 $\mathbf{O_2}$ 與原形 $\mathbf{C_2}$ 相交(或內離)

(Ⅸ) 將(Ⅴ)、(Ⅵ)結果帶入③、④式，可得

$$\frac{1}{R_{4+}} = \frac{\overline{PM_1}^2}{R_3 \cdot r^2} = \frac{r^2+4R_3{}^2+4R_3\cdot\overline{XC}}{R_3 \cdot r^2} = \frac{1}{R_3} + \frac{4R_3}{r^2} + \frac{4\overline{XC}}{r^2} = \frac{1}{R_3} + \frac{R_1+R_2}{R_1R_2} + \frac{4\overline{XC}}{r^2}$$

$$= \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) + \frac{4\overline{XC}}{r^2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑤$$

$$\frac{1}{R_{4-}} = -\frac{\overline{PM_2}^2}{R_3 \cdot r^2} = \frac{r^2+4R_3{}^2-4R_3\cdot\overline{XC}}{R_3 \cdot r^2} = \frac{1}{R_3} + \frac{4R_3}{r^2} - \frac{4\overline{XC}}{r^2}$$

$$= \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) - \frac{4\overline{XC}}{r^2} \cdots\cdots\cdots\cdots⑥$$

(Ⅹ) 若將⑤、⑥視為二次方程 $x^2 + ax + b = 0$ 的兩根，則有：

$$\mathbf{a} = -\left(\frac{1}{\mathbf{R_{4-}}} + \frac{1}{\mathbf{R_{4+}}}\right) = -2\left(\frac{1}{\mathbf{R_1}} + \frac{1}{\mathbf{R_2}} + \frac{1}{\mathbf{R_3}}\right)$$

$$\mathbf{b}=\frac{1}{R_{4-}}\cdot\frac{1}{R_{4+}}=\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)^2-\frac{16\overline{XC}^2}{r^4}$$

$$=\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)^2-\frac{4(R_1+R_2+R_3)}{R_1R_2R_3}$$

$$=\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)^2-4\left(\frac{1}{R_1R_2}+\frac{1}{R_2R_3}+\frac{1}{R_3R_1}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑦$$

且 $\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)^2=\left(\frac{1}{R_1}\right)^2+\left(\frac{1}{R_2}\right)^2+\left(\frac{1}{R_3}\right)^2+2\left(\frac{1}{R_1R_2}+\frac{1}{R_2R_3}+\frac{1}{R_3R_1}\right)$

$$\Rightarrow\ 4\left(\frac{1}{R_1R_2}+\frac{1}{R_2R_3}+\frac{1}{R_3R_1}\right)=2\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)^2-2\left[\left(\frac{1}{R_1}\right)^2+\left(\frac{1}{R_2}\right)^2+\left(\frac{1}{R_3}\right)^2\right]$$

則⑦式

$$b=2\left[\left(\frac{1}{R_1}\right)^2+\left(\frac{1}{R_2}\right)^2+\left(\frac{1}{R_3}\right)^2\right]-\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)^2$$

(X) 今以 $\frac{1}{R_4}$ 取代 x ,得

$$\left(\frac{1}{R_4}\right)^2-2\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)\left(\frac{1}{R_4}\right)+2\left[\left(\frac{1}{R_1}\right)^2+\left(\frac{1}{R_2}\right)^2+\left(\frac{1}{R_3}\right)^2\right]-\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)^2=0$$

$$\Rightarrow\left(\frac{1}{R_4}\right)^2+2\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)\left(\frac{1}{R_4}\right)+\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)^2$$

$$=2[(\frac{1}{R_1})^2+(\frac{1}{R_2})^2+(\frac{1}{R_3})^2(\frac{1}{R_4})^2]$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right)^2=\left(\frac{1}{R_1}\right)^2+\left(\frac{1}{R_2}\right)^2+\left(\frac{1}{R_3}\right)^2+\left(\frac{1}{R_4}\right)^2\qquad \text{得證!!}$$

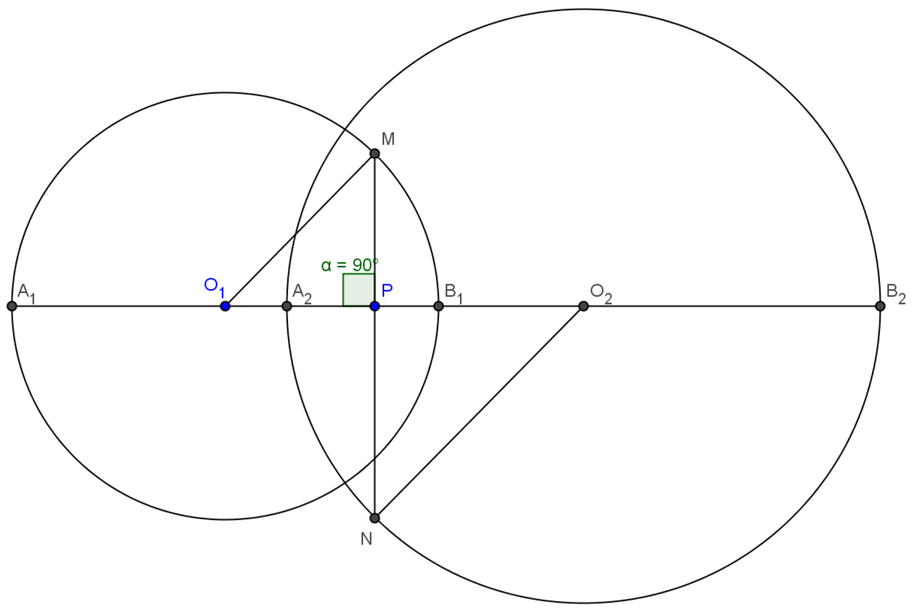
三、結語

除了上述多圓相切問題外，三角形內切多個圓問題亦是過去東西方數學家們皆感興趣的問題。例如十八世紀的和算家們，便將三角形內切圓問題，推廣至三角形內切兩個等圓、三個等圓、…、任意多個等圓求半徑問題等，並且提出了問題的解答與公一般性式。而後，他們更進一步發展出三角形容切多個橢圓問題，或者推廣至空間中錐體容切多個球、多個橢球的問題等。

另一方面，十九世紀的西方數學家瑪菲堤（**Malfatti**），則是採取不同的研究進路，提出了著名的瑪菲堤問題（**Malfatti's Problem**），該問題是在給定一個三角形的條件下，探討如何在內部容切三個圓，使得三個圓的總面積盡可能的大。雖然，瑪菲堤在 **1803** 年提出問題時，且他認為自己已經找到了問題的答案，不過一直得等到二十世紀初期，數學家們才發現了一些反例，證明瑪菲堤的猜想是錯的。

總結來看，本文所討論的四圓相切問題，最後證得的四圓半徑的關係式，相當簡潔

且具有內部的對稱性。對稱之美那麼平凡多見，卻那麼令數學家醉心，數學的美，往往出現在異想不到之處，看似複雜問題背後，卻隱藏著充滿規律且對稱的數學式，同時，若再將圓的數量推廣，亦可發展出諸多不同的可能性，甚至你可能會猜想，新問題的背後，亦將隱藏著具有類似規律的關係式。有興趣的讀者不妨動手試試，或許會更許多令人驚奇的發現！



註: 記 $I(P, r)$(圓 O_1) = 圓 O_2 ，其半徑各為 r_1、r_2

令 $\overline{PA_1}=a \quad \overline{PA_2}=b \quad \overline{PB_1}=c \quad \overline{PB_2}=d$

則有： $ab=cd$ (即 $\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_2}=\overline{PB_1}\cdot\overline{PB_2}=r^2$)

考慮 $(a+c)^2bd - (b+d)^2ac$

$= (a^2+c^2+2ac)bd - (b^2+d^2+2bd)ac$

$= a^2bd+c^2bd - b^2ac - d^2ac$

$= a(ab)d+bc(cd) - b^2ac - d^2ac = a(cd)d+bc(ab) - b^2ac - d^2ac = 0$

故 $(a+c)^2bd = (b+d)^2ac \quad \Rightarrow \dfrac{\overline{A_1B_1}^2}{\overline{A_2B_2}^2}=\dfrac{(a+c)^2}{(b+d)^2}=\dfrac{ac}{bd}=\dfrac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_2}}{\overline{PB_1}\cdot\overline{PB_2}}$

$\Rightarrow \dfrac{4r_1^2}{4r_2^2}=\dfrac{\overline{PM}^2}{\overline{PN}^2} \quad \Rightarrow \dfrac{r_1}{r_2}=\dfrac{\overline{O_1M}}{\overline{O_2N}}=\dfrac{\overline{PM}}{\overline{PN}}$

得 $\triangle PO_1M \sim \triangle PO_2N$ (SAS 相似)