HPM通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系退休教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）
助理編輯：黃俊瑋（台灣師大數學所研究生）
編輯小組：蘇意雯（台北市立教育大學）蘇俊鴻（北一女中）
黃清揚（福和國中）葉吉海（陽明高中）
陳彥宏（成功高中）陳啟文（中山女高）
王文珮（青溪國中）黃哲男（台南女中）
英家銘（台北醫學大學）謝佳叡（台灣師大數學系）
創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng

第十八卷 第二、三期合刊 目錄（2015年3月）

祝賀道本周教授七十大壽論文集

洪萬生
台灣師範大學數學系退休教授

本論文集由 **David Rowe** 與筆者（**Wann-Sheng Horng**）合編，原先還有徐義保教授也在編輯之列，不幸他在 **2013** 年因腦溢血英年早逝。因此，所有的收稿與編輯，就由我們兩人趕在去年十月前完工。我們特別請即將出版本書的德國 **Springer-Verlag** 公司，為我們製作一本 **dummy** 版，在 **10** 月 **5** 日假紐約曼哈頓社區學院（**BMCC**）的研討會場，獻給道本老師，作為七十大壽的賀禮。

本論文集之題銜為 **"Delicate Perspectives on Innovation and Tradition in the History of Mathematics: A Festschrift in Honor of Joseph W. Dauben"**，目前已經開始接受預約，預訂在出版今年五月出版。

茲將本論文集之目錄引述如下：

Contents

Preface

Set Theory and Foundations of Mathematics

Walter Purkert, "On Cantor's Continuum Problem and Well Ordering: What really happened at the 1904 International Congress of Mathematicians in Heidelberg"

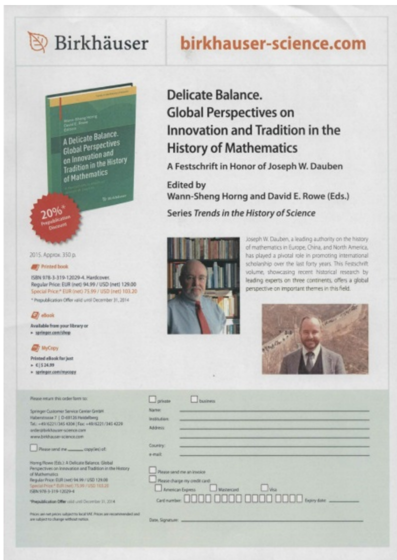
Craig Fraser, "Nonstandard Analysis, Infinitesimals, and the History of Calculus"

Ivor Grattan-Guinness, "Despite Kempe, the Modest Place of Multisets and Multiclasses in Foundational Theories"

On the Boundaries of Mathematics and Physics

Niccoló Guicciardini, "Proofs and Contexts: the Debate between Bernoulli and Newton on the Mathematics of Central Force Motion"

David Rowe 與筆者晚宴合照



A Memory of Xu Yibao

Wann-Sheng Horng

I met YIbao for the first time in 1995 when he was about to come to New York for Ph.D. program under Joe's supervision. I visited Beijing apparently at Joe's invitation and had a chance to see Yibao as he went to Beijing in order to apply a US visa. I remember I sent him as a gift C. C. Gillispie's *Edge of Objectivity* and the reason why I am unable to retrieve for the time being.

Without much impression about him though, we had a great chance to meet again at Oberwolfach in 1998, a conference organized by Ivor Grattan-Guinness and David Rowe Yibao took photo-pictures for Joe, me, among others. Thanks to his camera records, we can well remember how we have been gone through so far.

After the year 2000, Yibao had visited Taiwan two or three times. Due to the reasons that I was involved with social movement in Taiwan, so I just left him to chair seminars on the history of Chinese mathematics with my graduate students, and the topics covered were annotation of the *Suanshu shu* etc. Yibao did not comment, at lease to me, on what he had seen in Taiwan. Yet, I gather he would be very pleased to have such kind of visiting experience.

In the summer of last year, Yibao and I met for the last time. Due to some reason I almost canceled my travel plan of Manchester to attend the international congress on the history of science and technology. But for now I feel so lucky that I could have the unforgettable opportunity to chat with him. It is the day before the opening of the congress he invited me to a nearby pub to enjoy beer. I was so happy to update the news about his career: he just got promotion as a full professor, a status he deserved to achieve quite a few years ago, and he was engaged in public service in his community. And he was so proud to let me know that he read three copies of newspapers each day, *New York Times*, *Renmin Ribao* and *Shijie Ribao*. He was well established and completely ready for doing something to fulfill his vision both in academic work and public service by far.

Yibao was a sweet and thoughtful person on whom you can always count. He always thought how to pay back what he shared with friends and colleagues. He, David and I come from different origins and grow up in diversified background. Yet, due to Joe the great teacher, we become family. And Yibao is as always our little brother no matter where he is now. I miss him so much from my deep heart!

2015/1/30 洪萬生後記：這是我在徐義保教授（**1965-2013**）的追思場合（**2014/10/4**）所唸的一段文字，希望藉以永遠懷念這位天不假年的數學史家。這個追思併入 **The 6th International Symposium on Ancient Chinese Books & Records of Science & Technology, 2-8 October 2014** 舉行。這次研討會在美國紐約曼哈頓社區學院（**BMCC**）舉行，這個學院數學系也是義保生前任教的地方。正因為如此，這個研討會在該場所舉行原是他所籌劃的。事實上，他也打算利用此一時機與場合，慶祝我們共同的指導教授道本周老師七十大壽。祝壽活動還包括他、**David Rowe** 與我共同編輯一本祝壽論文集。所幸，儘管他不幸謝世，**David** 與我還是努力完成這一部論文集：***Delicate Perspectives on Innovation and Tradition in the History of Mathematics: A Festschrift in Honor of Joseph W. Dauben***，並且及時在 **10** 月 **5** 日祝壽活動時，獻給道本老師作為生日賀禮。

在這次追思活動中，義保的長子 **Jonathan** 代表家屬前來致意。幾年不見，他已經是紐約大學醫學院的學生了。**Jonathan** 致詞時，表現大方得體，頗有大將之風，讓在場的義保好友都感到十分欣慰。義保如天上有知，也一定同感驕傲才是。

從複數到向量～一段奇妙之旅

蘇惠玉
台北市立西松高中

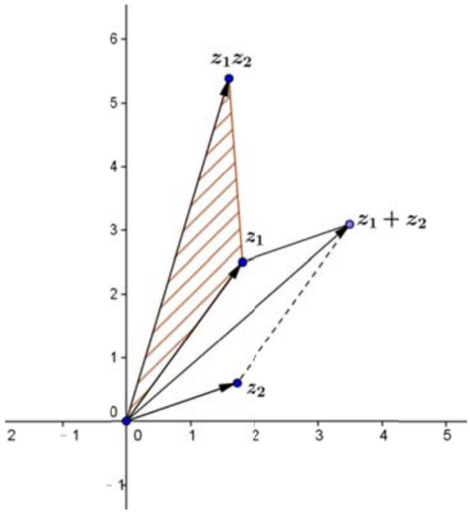
就數學發展的歷史軌跡來看，一開始幾何與代數這兩個分支各自為政，當然傳統上幾何的地位要高一些，所以傳說柏拉圖學院（**Platonic Academy**）的牌樓上寫著：「不懂幾何者不得入內」。直到坐標系統發明之後，幾何結合代數的解析幾何開始發揮效利，以微積分這把大刀席捲整個數學與科學應用領域。這樣的徑路為數學家開啟了一種可能性，跨領域的結合似乎可以帶來意想不到的結果。學校數學的學習過程，好似重複著數學發展的路徑，幾何、代數，然後坐標系統的解析幾何，那麼接下來，應該就是向量幾何登場了。然而數學是怎麼發展到向量的呢？

一、尋找複數的幾何解釋

隨著 **3** 次方程式公式解的出現，數學家不得不正視 $i=\sqrt{-1}$，即使心理上不斷抗拒，還是得接受它的存在，定義它的運算，促成了數系往複數擴充。然後高斯（**Johann Carl Friedrich Gauss, 1777 – 1855**）的代數基本定理告訴我們：每一個 **n** 次複數係數方程式都恰有 **n** 個根，到此數系的發展似乎已經足夠且圓滿。同時法國數學家伽羅瓦（**Évariste Galois, 1811 – 1832**）在他年輕短暫的生命裡提出的伽羅瓦理論說「五次及五次以上的方程式沒有公式解」。到這個階段，方程式求解的完成似乎結束了代數學上的一個重要篇章。然而數學發展的腳步並沒有就此停止，數學家又將關愛的眼神投注到另一個古老神聖的數學領域－幾何學上。

1702 年萊布尼茲（**Gottfried Wilhelm von Leibniz, 1646 – 1716**）說：「虛數是聖靈完美而奇妙的避難所，也差不多是介於存在和不存在之間的兩棲類。」這個時期數學家對虛數該有什麼性質，什麼意義都還不是很清楚，不過因為「有用」而接受它的存在。直到十九世紀，數學家最終才對複數的性質有了清楚的理解。複數的表徵有兩種形式，一種是純代數形式的，將複數寫成 $a+bi$ 的形式，其中 **a, b** 為實數，這種形式依賴實數而存在，其運算規則如同我們在高一學過的一般。然而這種「規定」的複數運算除了在其體系中相容不矛盾之外，如果沒有實質意義，怎麼能讓人打從心底接受呢？因此不久之後，到十九世紀末時，有關複數的研究幾乎都走向了幾何解釋的道路。

對於任一複數 $z=a+bi$ ，其中 a,b 為實數，我們可以將這個複數考慮成數對 (a,b)，在坐標平面上將橫軸當作實軸，與其垂直的坐標軸當成虛軸，進而將數對 (a,b) 當成點表示在此平面上，這樣一個複數便有了幾何表徵，兩個複數的加法與乘法運算便有了幾何意義。兩個複數 $z_1=x_1+y_1$，$z_2=x_2+y_2$，這兩個複數的加法幾何地表示成 $z_1+z_2=(x_1+x_2,\ y_1+y_2)$ ，代表平面上的平移；而



$z_1z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2,\ x_1y_2 + x_2y_1)$ 的幾何意義為將 z_1 根據 z_2 作伸縮與旋轉的變換。不過，將原點與表示複數的一點連接起來，不就可以用來表示平面上的有向線段（向量）？

向量作為一個同時帶有大小與方向的量，因為在力、速度等物理現象上的觀念而早被接受,並以有向線段的幾何形式來表徵,而以平行四邊形法則表示兩個這樣量的加法，則更早在亞里斯多德（**Aristotle, 384 BC - 322 BC**）或阿基米德（**Archimedes of Syracuse, 287 BC - 212 BC**）的書中就已發現。然而當坐標系統的解析幾何在微積分上取得廣泛成就之後，數學家們努力地想將這樣的結合徑路，套用在複數與有向線段上：為代數形式的複數尋求幾何解釋；為幾何的有向線段尋求解析地代數符號表徵方式。所謂解析**(analytical)**意同解析幾何的用法，即以代數形式表示幾何物件及其運算，例如函數圖形的方程式，事實上，這兩件事是一體兩面。為複數尋找幾何意義以及幾何表徵方式，首次完整地出現挪威數學家韋塞爾**(Caspar Wessel, 1745 – 1818)1799** 年的著作中，他以複數的幾何表徵形式來闡明平面有向線段，即平面向量的解析表徵與運算法則。

二、韋塞爾的〈方向的解析表示；一種嘗試〉

1797 年，韋塞爾向丹麥皇家科學院發表論文，於 **1799** 年以丹麥文的形式出版在論文集中，名為〈方向的解析表示；一種嘗試−主要用於平面與球面多邊形的解**(On the Analytical Representation of Direction; an Attempt, Applied Chiefly to the Solution of Plane and Spherical Polygons)**〉,這篇文章的主要目的是創造解析方法來表示方向與方向的運算，他說：

> **目前我們嘗試論述的問題是：怎樣解析地表示方向，也就是我們怎樣表示直線(right lines)，才能在一個包含一未知直線與若干已知直線的方程式中，把未知直線的長度和方向都表示出來。**

這裡要注意的是韋塞爾論文中的直線，指的即是有向線段，後面皆同。接著他把這個問題分成兩個命題：

> 第一，能被代數運算作用的方向之改變，能用它們的符號來表示。**(changes in direction which can be effected by algebraic operations shall be indicated by their signs)**
> 第二，只有當方向能用代數運算改變時，它才是一個代數對象。**(direction is not a subject for algebra except in so far as it can be changed by algebraic operations)**

簡單地說，當我們想將幾何物件（有向線段）與關係（彼此間長度與方向的關係）以代數表示時，幾何關係的改變，例如方向改變時，要能用這些代數符號及其運算表達得出幾何意義來，也只有這樣解析地表示有向線段才算達成目標。

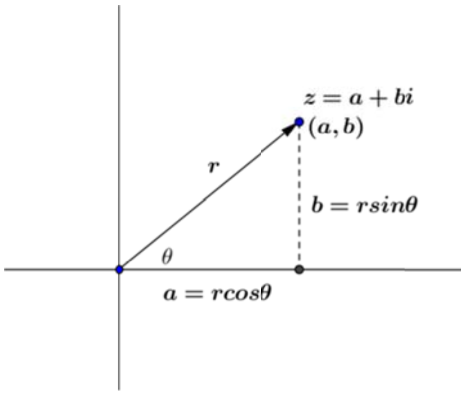
韋塞爾首先幾何地說明有向線段的加法運算，即我們熟知的平行四邊形法則；而兩個有向線段的「乘積**(product)**」必須滿足：**(1)**這兩個「因子（**factor,** 相乘的兩個物件，

在此為有向線段）」與正單位位於同一平面；**(2)**積的長度等於兩者長度相乘；**(3)**積的角度（他稱為散度，**divergence from unit**）等於兩者方向角**(direction angles of factors)**的和。接著他開始以我們現在熟知的方式定義複數平面：

> **+1 表示正的直線單位，+ε 表示某個垂直於正單位且原點相同的單位，那麼+1 的角度等於 0^0，−1 的角度等於 180^0，+ε 的角度等於 90^0，−ε 的角度等於−90^0 或 270^0。根據法則，積的方向角等於因子方向角的和，我們有：(+1)(+1)=+1；(+1)(−1)= −1；(−1)(−1)=+1；(+1)(+ε)=+ε；(+1)(−ε)= −ε；(−1)(+ε)= −ε；(−1)(−ε)=+ε；(+ε)(+ε)= −1；(+ε)(−ε)=+1；(−ε)(−ε)= −1。**
>
> **由此可見 ε=$\sqrt{-1}$，不違背普通的運算法則，積的散度得到確定。**

接著他以單位圓為例，圓周上一點可表示成$\cos v+\varepsilon\sin v$，換成現代符號即$\cos v+i\sin v$，其中v表示此點與圓心連成的半徑偏離正單位的角度。接著他說與直線 **cos0^0(+1**，即實軸正單位)與 **εsin90^0**(+i ，即虛軸正單位)在同一平面，且長度為 **r**，方向角為v的有向線段的一般表達式即為$r(\cos v+i\sin v)$。

韋塞爾告訴我們，一個複數$z=a+bi$可以用來表示平面向量，當此有向線段的長度為 **r**，與實軸正方向所夾的方向角為 **θ** 時，$a=r\cos\theta$，$b=r\sin\theta$，換句話說，在此平面上，可用點**(a, b)**表示複數，或是平面上的向量。以這樣的表徵方式，可以解釋複數運算的幾何意義；同時，複數的幾何表徵也為平面向量提供了一套代數律則，可以用來表示向量與向量間的運算。以坐標系統的解析形式表徵向量之後，例如$\vec{u}=(a,b)$，向量長度的伸縮與角度的改變就可以代數運算如加減法與乘積來操作，就如同我們現在學習到的一樣。



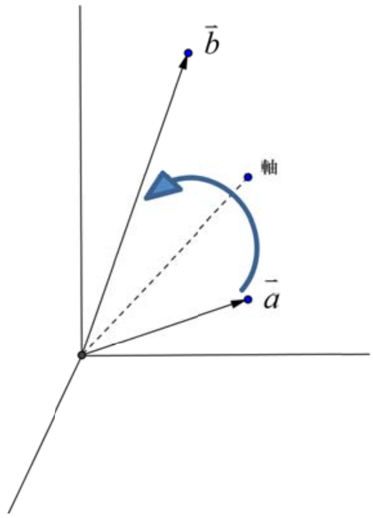
韋塞爾這篇論文發表之時，因為語言的限制並沒有受到太大的注意，直到 **1897** 年翻譯為法文之後才引起重視。不過差不多與韋塞爾同時的瑞士數學家阿甘得**(Jean Robert Argand, 1768 – 1822)**於 **1806** 年亦曾發表有關複數的幾何表徵方面的論文；而名聲顯著的高斯亦於 **1831** 年出版有關複數幾何表徵的著作，在此書或高斯的日記中，他都曾表示過他早在 **1793** 年就有這樣的想法了。當然高斯著作的影響力顯得更高一些，因此我們常將表示複數的幾何性的這個平面稱為高斯平面，不過法國人似乎更喜歡稱它為阿甘得平面。此時的數學家們開始接觸與熟悉複數的幾何表徵，以及複數用來表示平面向量及其運算的方式，還有它所帶來的便利性之後，數學家們開始將目光放得更遠，開始思考在三維或更高維度上如何表示向量及其運算。

三、四元數的誕生

在複數用來表示平面向量上取得成功之後，數學家們開始尋找類似複數的形式來表示三維空間的向量，畢竟現實世界以及物理問題處理的大多是不在同一平面的向量。雖

然我們可以用空間的直角坐標系統中的點**(x, y, z)**來表示原點至該點的向量，如同我們現在課堂上使用的一樣，然而這樣的方式在當時還沒辦法定義向量的代數運算，更重要的是無法解釋與使用向量的運算表示向量間的伸縮和旋轉，因此數學家才想尋找類似複數的「超複數」來表示三維向量，甚至更高維度的向量。

不過這個問題並不是那麼容易，愛爾蘭數學家與物理學家漢彌爾頓（**Sir William Rowan Hamilton, 1805 – 1865**）在 **1833** 年出版複數幾何表示的相關著作之後，他就著力於尋找所謂的三維複數來解決這些問題。十年過去了，他依然沒有完成。直到 **1843** 年的某一天，漢彌爾頓和太太在秋高氣爽的日子裡散步，經過一座橋樑時忽然靈光一閃，他形容「突然一種電流似的思緒向我逼近」，他想到了解決方法了：**3** 個分量行不通，必須有 **4** 個分量，同時還得犧牲乘法交換律才行。事實上，想以一個新數系統來表示空間中向量的伸縮與旋轉，確實需要 **4** 個分量，要將空間中的一個向量作旋轉，需要繞一個固定的軸作旋轉，要表示固定軸的方向需要有 **2** 個量（例如經度和緯度），向量繞軸旋轉的角度是 **1** 個量，長度的伸縮是 **1** 個量，因此這樣的新數需要有 **4** 個分量而非 **3** 個（如下圖）。漢彌爾頓稱他的新數叫做四元數（**quarternions**）。



每個四元數都可表示成：$d+ai+bj+ck$ ，其中 a, b, c, d 為實數，**d** 稱為純量部分，其餘部分稱為向量部分，向量部分的係數**(a, b, c)**為空間直角坐標系中某一點的坐標，而 i, j, k 稱為定性單位**(qualitative unit)**，在幾何上即是直角坐標系的三個坐標軸的方向，需滿足 $i^2+j^2+k^2=-1$ ，且 $ij=k,\ ji=-k$ 、 $jk=i,\ kj=-i$ 、 $ki=j,\ ik=-j$ ，這是為了使四元數除法的得到唯一結果的必要犧牲。四元數可以定義加減運算，就如同我們習慣的向量加減法，可用來解釋向量平移的幾何意義。而四元數的乘法運算則可根據分配律與上述法則得到，舉例來說，設兩個四元數 $u=d+ai+bj+ck$ ， $v=w+xi+yj+zk$ ，可得

$$uv=(d+ai+bj+ck)(w+xi+yj+zk)$$
$$=(dw-ax-by-cz)+i(aw+dx+bz-cy)+j(bw+dy+cx-az)+k(cw+dz+ay-bx)$$

可以看出兩個四元數相乘之後仍是四元數，還有不滿足乘法交換律，當然也可定義與計算乘法的反運算－除法。

四、從四元數到向量

漢彌爾頓為四元數的研究花費了大半輩子的時光，他認為四元數是處理幾何學與數學物理問題的關鍵。然而除了少數同樣為英國人的數學家支持外，四元數並不受到數學家，尤其是物理學家的採用。對物理學家而言，他們需要的是像空間直角坐標系統一樣的表示方式，或與空間坐標系密切相關的概念。當漢彌爾頓辛苦地研究四元數的同時，住在現今波蘭斯特丁的葛拉斯曼（**Hermann Günter Grassmann, 1809 – 1877**）正在發展一套大膽的數學體系，以他所謂的擴展量來表示 **n** 維空間。**1844** 年他出版了簡稱為《擴展論（***Die Lineale Ausdehnungslehre***）》的這一本書，在此書中用一種有 **n** 個分量的「高

元數」表示 **n** 維幾何空間中的向量，例如一個三維的高元數 **a** 可表示成 $a = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$，其中 x_i 為實數，e_1, e_2, e_3 在幾何上可視為代表單位長度的有向線段，具有共同端點，並決定一個右手直角坐標系，這幾乎已經是現在我們學習的向量形式了。本來他的系統應該更符合當時數學家與物理學家的需求，不過因為他的書過於隱諱難明，呈現的方式也過於神秘抽象，因此一直為人所忽視。有關他這本書的銷量及受注目的程度，從這本書的出版商寫給葛拉斯曼的一封信就可以一目了然，他的出版商寫道：「你的書《擴展論》已經有好一陣子沒有印刷出版了。因為你的作品一點都不好賣，大約有 **600** 本被當成垃圾處理，只賣出奇零的幾本，其中還有一本放在我們的圖書館。」

葛拉斯曼的作品不受重視，漢彌爾頓的四元數卻吸引了大多數人的注意，雖然物理學家覺得不好用，但是他們卻也在四元數的基礎上發展出我們現在使用的三維向量系統。這些人像是電磁學大師馬克斯威爾（**James Clerk Maxwell, 1831－1879**）將四元數中的向量部分獨立出來，當成個體來研究處理，到十九世紀末已經發展成獨立的三維向量分析體系。在空間中一個向量 $\bar{u}$，考慮一個四元數，讓純量的地方為 **0**，只考慮向量部分，將 $\bar{u}$ 表示成 $\bar{u} = ai + bj + ck$，其中 i, j, k 分別是沿著 **x, y, z** 軸的單位向量。我們可定義向量的加減法如同四元數的加減法一般；再由四元數的乘法來看，如上述的 $u = d + ai + bj + ck$，$v = w + xi + yj + zk$，讓 **d, w** 等於 **0**，可得

$$\begin{aligned} uv &= (ai + bj + ck)(xi + yj + zk) \\ &= -(ax + by + cz) + i(bz - cy) + j(cx - az) + k(ay - bx) \end{aligned}$$

由此我們可以定義向量的兩種乘積：純量的內積 $u \bullet v = ax + by + cz$，可用來解釋與計算正射影。另一種乘積為向量的外積：

$$u \times v = i(bz - cy) + j(cx - az) + k(ay - bx)$$

外積所指涉的方向為與這兩向量垂直，並由右手系統決定的方向。這些代數運算就足以表示空間向量間的平移、旋轉與伸縮。到此為直，終點已經達成？！

數學發展的腳步從來不曾停止，也不會因為某位數學家的作品被忽視而停滯，有的可能只是步伐稍微減緩而已。葛拉斯曼的作品雖然不受注意，然而數學知識的洪流，還是朝著他所指向的數學張量方向發展。向量分析這一分支，也不會只到三維向量就停滯不前，只要人類還存在著對未知的好奇，數學，甚至是任何知識體系都將繼續前進不懈。

註：原文刊載于翰林出版社〈翰林我的網 **WorldOne**〉網站。

參考文獻

Crowe, M. J. (1967), ***A History of Vector Analysis*****, New York: Dover Publications, Inc.**

Nahin, P. J. (1998), ***An Imaginary Tale: The Story of*** $\sqrt{-1}$**, New Jersey: Princeton University Press.**

Smith, D. E. (1984), ***A Source Book in Mathematics*****, Dover Publications, Inc.**

Kline, F. (1996)，《高觀點下的初等數學》，台北：九章出版社。

Kline, M. (1991)，《數學史－數學思想的發展》，林炎全、洪萬生、楊康景松譯。台北：九章出版社。

黃俊瑋**(2007)**，〈從複數到四元數〉，收錄於《**HPM** 通訊》第十卷第十一期。

江戶日本的一場數學論戰

黃俊瑋
台北市立和平高中

歷史上，數（科）學家為了發明的優先權，或者基於哲學觀點的不同，而發生了爭執或論戰，是常見的事件。在優先權方面，牛頓與萊布尼茲有關微積分發明孰先孰後之爭，或卡丹諾（**Cardano**）與塔塔利亞（**Tartaglia**）有關誰先提出三次式公式解之爭，都是數學史上非常著名的經典案例。另一方面，希爾伯特（**Hilbert**）的形式主義與布勞爾（**Brouwer**）的直觀主義之爭，則是由於兩造在數學哲學觀上的看法歧異所致，他們最後甚至請出了愛因斯坦出面仲裁。好在睿智的愛因斯坦始終未曾捲入這場他所謂的「老鼠與青蛙之爭」。儘管愛因斯坦的評論有一點嘲謔，但是，說他們兩位「庸人自擾」，恐怕也難以說服當事人罷手吧。

除了西方數學之外，日本數學史上也曾發生過一場數學論戰。究其本質，這場論戰有著迥異的旨趣，是我們考察東西數學對比的極佳切入點。不過，我們必須首先簡要介紹江戶時期的和算發展。如此，我們也才比較容易說明此一論戰的特殊意義。

一、和算與關流

在江戶時代，日本發展出具有藝道化特色的本土算學，而這就是後來被數學史家所稱呼的和算（***wasan***），而從事這些數學知識活動的武士（或浪人），就稱之為和算家。

早在十七世紀中期，日本一些重要的和算家便各自建立數學流派。當時的數學知識，主要是透過各個流派的掌門人或具有代表性的數學家，以秘傳的方式傳授給拜入門下、有心學算的徒弟。其中，又以「算聖」關孝和所建立的數學流派 -- 關流 -- 人數最多、影響最深遠，且最具有聲望。從十七世紀中後期開始秘傳的關流數學（知識），一直到了十八世紀中期之後，才終於公開於世。當時，精於算學的關流數學名家藤田貞資，被大名馬賴僮聘為久留藩的算學師範，負責數學之教授工作。由於有馬賴僮本身熱愛數學，在其管理的久留米藩中大力推動數學教育，再加上藤田貞資所著的《精要算法》，廣收門徒，和算特別是關流數學得以越來越普及於庶民階級。

上述這些史實被日本兒童文學作家遠藤寬子吸收，融入她的數學小說兼歷史小說《算法少女》之情節。她藉由算學少女千葉章的見證，對於這一段歷史的片段，有著相當溫暖貼心的敘事，非常值得參閱。事實上，這本小說也是認識和算的極佳切入點。

二、論戰主角會田安明

前述提到的這場論戰，發生在十八世紀末期，而這場論戰的主角，便是關流數學家藤田貞資及其弟子，對上了後來建立最上流的數學家－會田安明。會田安明幼名為重松，通稱算左衛門，他於西元 **1747** 年的 **2** 月 **10** 日，出生於日本山形縣附近前明石村的一戶農家，後來，當他的父親舉家搬至山形七日町後，他才改姓會田。在會田安明著作的《算

法天生法發端》自序中提到，他在十六歲（**1762** 年）時，進入岡崎安之的「中西流」算學私塾學習數學，並且，在短短不到兩年的時間裡，他便學完了簡單的八算與較困難的天元演段，盡通岡崎之學。由於數學能力突出，遂獲聘在該算塾教授數學。可見，會田安明在數學上的確具有不凡的天分。後來，他為了進一步研究數學，於 **1769** 年（明和六年）移居江戶，並且改名為鈴木彥助（有時亦稱鈴木安明），擔任與監督管理建築工程有關的工作，並參與過關東地區幾處治水工程。

正如前述，會田安明的算學是中西流的和算家所啟蒙，年紀輕輕便展現出不凡的數學天份與能力。當他進入江戶之後，本來想要加入關流，並投身藤田貞資的門下。沒想到他與關流數學家藤田貞資、神谷定令等人見面後的一場數學「交流」裡，竟然擦出了「不愉快」的火花，因此，會田安明只好打消了加入關流的念頭。而後，會田安明便潛心研讀藤田貞資所著作的《精要算法》，並發現該書中的一些缺失。於是，會田安明於西元 **1785** 年著作刊刻了《改精算法》，批判《精要算法》中設計不佳的布題與有待精進的解答，並進一步提供了新的解法與評論。

另一方面，會田安明自行創立了另一個重要的和算流派 **--** 最上流。此流派名稱的命名上，與會田安明故鄉的「最上川」有關。同時，他所採用的「最上」一詞，本有最好、最佳之意，足見會田安明欲顯示其流派數學能力之高強，並展現最上流與關流較勁的意味。**1787** 年，第十一代幕府將軍德川家濟對當時幕府的官員與役人進行了大調整，會田安明被免職成為浪人，時年 **41** 歲。自此，他開始完全投入數學研究。也由於沒有公務的羈絆，他得以全神貫注致力於算學研究與著述。這可以解釋何以他一生著述豐富，數學書籍共達一千餘卷，現有 **600** 餘卷傳世，是江戶時期最多產的和算家之一。他於 **1817** 年年歿，享年 **70** 歲。

三、最上流 vs. 關流之論戰

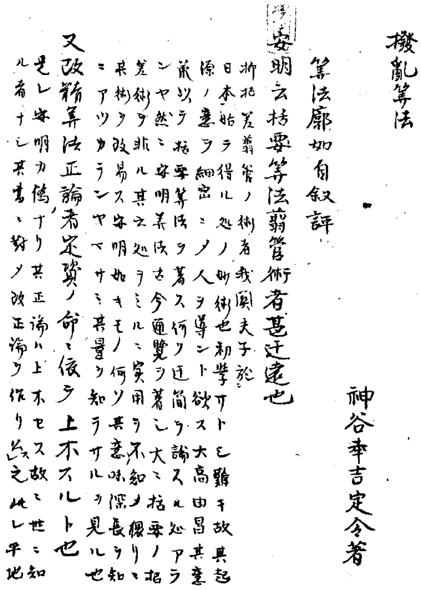
故事回到這場數學論戰。就在會田安明著作《改精算法》，企圖改正關流藤田貞資《精要算法》的缺失後，雙方拉開了論戰的序幕。當時名滿江戶的關流，當然嚥不下這口氣，於是，關流的藤田貞資與神谷定令，便輪流著書回應會田安明對關流的批評，而會田安明當然也不干示弱，同樣著書回應。於是，會田安明與關流和算家你來我往，不斷地著書抨擊、評論對方算書中不佳的問題及其解法，回應對方的評論，並闡述各自有關算學的見解。在關流這一方面，主要是以藤田貞資與徒弟神谷定令為主角，其他門人如安島直圓及其弟子日下誠，亦曾發言或著書回應。另一方面，最上流則是由會田安明獨挑大樑。這場數學論戰直至 **1806** 年藤田貞資去世前一年方告終止。

儘管會田安明的《改精算法》（**1785**）評論藤田貞資《精要算法》的缺失，但他在該書序言中，仍保持君子風度，不吝稱許關流歷代重要和算家。事實上，他對於關孝和及其門派弟子如建部賢弘、松永良弼、久留島義太、山路主住等人，都給予了很高的評價。他除了評論關流《精要算法》「**闡千歲未發之蘊奧，窮算家不傳之妙處技能**」外，也在書中推崇藤田貞資為「**海內一人**」。

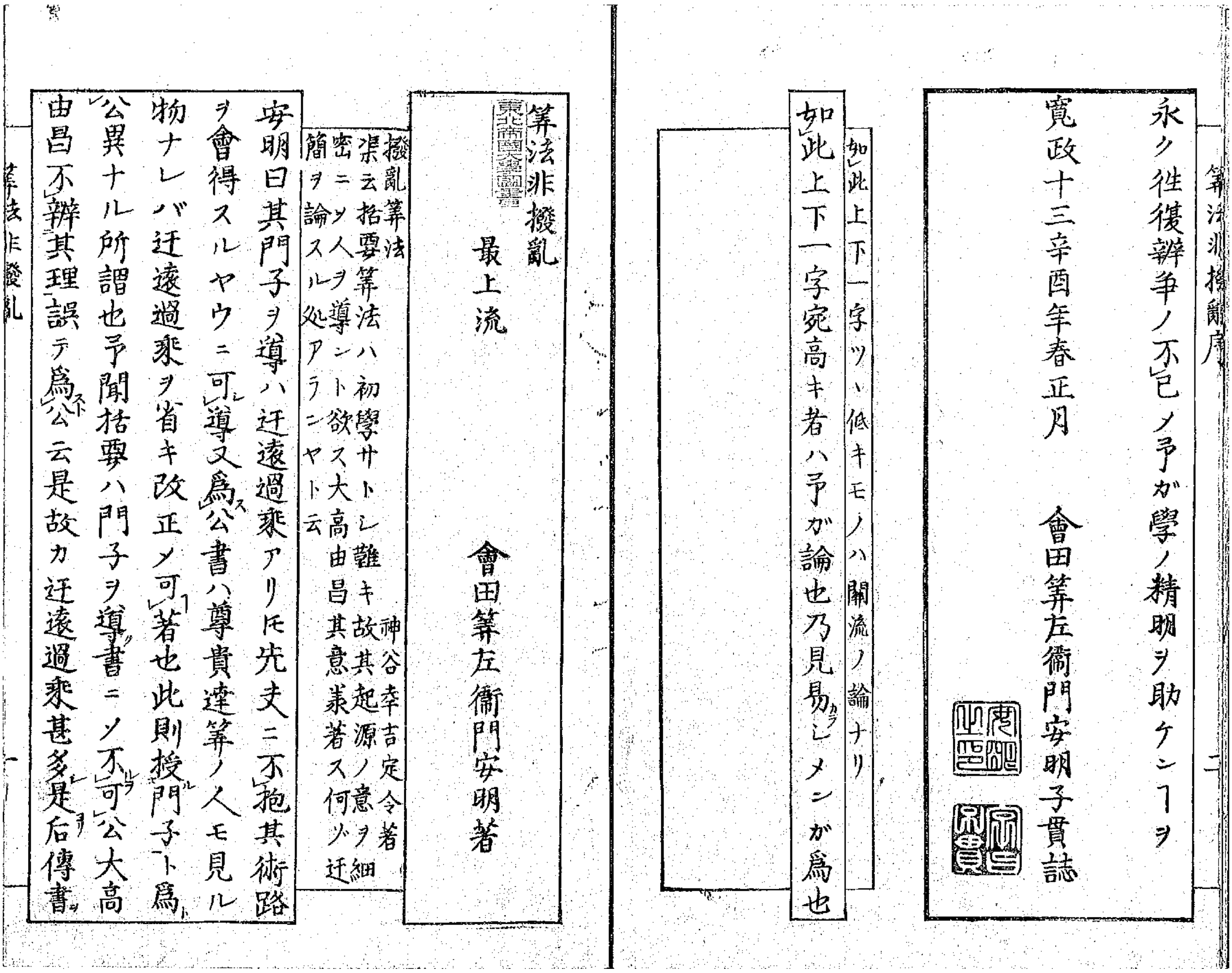
不過，關流和算家無法「理性」看待此事。百年來，關流獨尊的算學傳統與流派名望，竟然被一個原欲拜於門下，名不見經傳的年輕人公開挑戰。於是，關流的神谷定令首先發難，他先後於 **1786** 與 **1787** 年著作《改精算法正論》與《非改精算法》。從書名即可看出他意圖回應會田安明的挑戰。同一時期，也出現一本不知名的關流著作《規改精算法并術解草》，同樣是以反駁《改精算法》為目的。接著，會田安明於 **1787** 年著作《改精算法改正論》，顯然是衝著神谷定令的《改精算法正論》而來。然後，藤田貞資親上火線，著述《非改正論》，反駁會田安明的《改精算法改正論》。從這些著作的書名，我們可以看出雙方誰也不認輸，不斷你來我往、十足針鋒相對的態勢。

1788 年，會田安明再著述《解惑算法》，回應前述的《非改精算法》，並且重新評論並釐清最上流與關流間的數學論戰內容。他在序言中，反駁了關流認為他「訪求簡易遺卻精密」的論述，並自稱「余簡易自精密而得之也」、「余豈好爭哉，亦以解彼惑也。」他還進一步評論關流「恐一盲牽眾盲，十犬吠虛也」。至此時，會田安明也從原本主要針對藤田貞資和神谷定令的論調，轉向批判整個關流。兩年後，神谷定令著述《解惑辯誤》，藤田貞資著述《非解惑算法》。這兩本著作，顯然都針對會田安明《解惑算法》而來。當然，會田安明也再著述《解惑非辯誤》一書，來回應關流數學家的批評。

1799 年，神谷定令再著作《撥亂算法》，企圖為這場論戰「撥亂反正」。圖一為《撥亂算法》的書影，其中的漢字抄錄會田安明的論點，而日文則是神谷定令的評論。從此圖可看出，神谷定令先列舉會田安明的論點，再提出自己的評論與反駁。而會田安明回應的著作，是刊刻於 **1801** 年的《算法非撥亂》，圖二是該書的書影，會田安明以其人之道還治其人之身，同樣先列舉神谷定令書中的論述與文字，再貼上自己所寫的評論與反駁。從這兩張圖示，我們也可清楚看出論戰雙方著書的風格與特色。同一年，會田安明重新針對《精要算法》進行逐題評論，並著《再訂精要算法起源》一書，此時，會田安明不僅將《精要算法》批評得體無完膚，並在論戰過程中，舉出許多例子作為評論藤田貞資未真達算的證據。



圖一 神谷定令《撥亂算法》書影[1]


永ク往復辯争ノ不已ノ予ガ學ノ精明ヲ助ケンヿヲ
寛政十三辛酉年春正月　會田算左衛門安明子貫誌
如此上下一字宛高キ者ハ予ガ論也乃見易カラシメンガ為也
如此上下一字ツヽ低キモノハ關流ノ論ナリ
算法非撥亂
最上流
會田算左衛門安明著
撥亂算法
渠云括要算法ハ初學サトシ難キ故其起源ノ意ヲ細密ニ〆人ヲ導ント欲ス大高由昌其意兼著ス何ゾ迂簡ヲ論スル処アランヤト云　神谷幸吉定令著
安明曰其門子ヲ導ハ迂遠過來アリヒ先夫ニ不拘其術路ヲ會得スルヤウニ可導又為公書ハ尊貴達算ノ人モ見ル物ナレバ迂遠過來ヲ省キ改正〆可著也此則授門子ト為公異ナル所謂也予聞括要ハ門子ヲ導書ニ〆不可公大高由昌不辨其理誤テ為公云是故カ迂遠過來甚多是后傳書

圖二　會田安明《算法非撥亂》書影[1]

十八世紀末期的這幾年裡，會田安明也多方開火，除了著作回應前述關流的著作外，他也回頭檢視過去關流歷代和算家的重要著作，並且對這些著作或著作中提出的數學問題與答案，提出評論與他自己的改進建議，以彰顯自己比關流這些數學前輩優秀之處。例如，他認為關流集大成者松永良弼所著《方圓算經》「**詞花言葉文華以飾**」，文字華而無益，並舉例說明自己著作的精簡以及解答的簡易。而後，他甚至還列舉「關流邪術邪法之條目」，大力攻擊過去關流數學的成就。縱觀十八世紀末期這場數學論戰，過程中所涉及的其它算書仍多，「族繁不及備載」，筆者暫且打住。

進入十九世紀之後，整個論戰也進入尾聲，隨著 **1802** 年，神谷定令著作《福成算法》回應會田安明後，關流數學家已悄然退出此一戰場。而論戰的終局，是會田安明於 **1806** 年的《掃清算法》。此書問世後，就此「掃清」了兩造的恩怨，而隨著藤田貞資的過世，這場日本數學史上的論戰終於落幕了。

---

[1]《算法非撥亂》書影，引自日本東北大學圖書館電子資料庫：
http://dbr.library.tohoku.ac.jp/infolib/meta_pub/G0000002wasan_4100002316

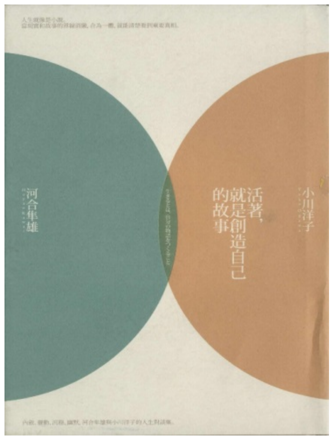
四、結論

這場論戰並非優先權之爭，而是展現它對比西方數學論戰大不相同的特色。簡言之，在一方面，他們是基於和算特有的知識價值與標準，來評論對方的數學研究，同時，雙方基於各自相異的算學觀點，彼此提出的論點當然針鋒相對，再加上為了捍衛各自流派聲望，因而使得論戰始終持續不斷。

有趣的是，這場論戰雖是兩個流派之爭，但從兩個陣營的著述來看，主要是會田安明以一人之力，對抗一整個關流裡的所有數學家。再加上會田安明後期身份變成浪人，而關流數學家多半是身份較崇高的武士，使得這場看似並不對等的論戰，更加顯得多姿多彩。然而，從前期的你來我往，到了後期會田安明針對藤田貞資《精要算法》的嚴格批評，以及對整個關流乃至歷代關流數學著作的重新檢視與比較，反而讓他自詡「**孤軍引百萬新加之敵，百戰百勝勢破竹之勢。**」這也更加展現出會田安明這位數學家的才能與傲氣。

作家的心路歷程：
小川洋子談《博士熱愛的算式》之創作

洪萬生
台灣師範大學數學系退休教授



書名：活著，就是創造自己的故事（**Ikiru towa, Jibun no Monogatari wo Tsukurukoto**）
作者：小川洋子（**Yoko Ogawa**）、河合隼雄（**Kayoko Kawai**）
譯者：王蘊潔
出版社：時報文化出版公司，台北市
出版資料：精裝本，**157** 頁
國際書碼：**ISBN 978-957-13-5744-7**

在《博士熱愛的算式》及其電影版叫好又叫座之後，小川洋子開始積極介入數學普及與數學教育相關議題。在 **2005** 年，她應邀與河合隼雄（**1928-2007**）對談，後來此一對話錄出版，中文譯版名為《活著，就是創造自己的故事》。

河合大學時代曾就讀京都大學數學系，後來，成為日本首位容格派的心理分析學者兼心理諮商師。但是，他相當擅長從心理學角度出發，針對日本古典文學、教育、宗教、社會問題等廣泛問題提出建言。

本書有兩章，第一章是「靈魂之所在」，第二章是「活著，就是創造自己的故事」，與中譯本題銜相同。這第一章共有五節，依序是

1. 友情誕生時；
2. 在數字的引導下；
3. 變成永恆的時刻；
4. 小孩子的力量；
5. 虛構故事的功效。

其中，河合隼雄採用對話方式，引導小川洋子說明她創作這部小說的心路歷程。最值得注意的，是她如何「在數字的引導下」，設定故事中的博士只有八十分鐘的記憶這個點子。原來她發現「江夏的背號 **28** 是完全數，就想到可以把棒球和數學結合起來。」由於「江夏只有在阪神隊時才是 28 號，在南海和廣島時都不是。」所以，她「想讓博士只知道背號仍是完全數時代的江夏，所以就設定他的記憶停止在江夏被球隊釋出交換的那一年，之後的記憶就無法再累積……」。還有，她「希望博士內心只記住投球完美的江夏，所以就結合記憶的問題。」

至於 只有八十分鐘記憶的博士，又如何與管家和根號溝通呢與相處？這或許是很多讀者共同的疑惑。其實，小川自己承認「**在一開始寫得很小心，努力避免因為記憶只有八十分鐘而出現矛盾**」，但是，她「**漸漸發現，無論是八十分鐘，還是一天，都無關緊要了。他們三個人的關係變得那麼濃烈，記憶只能維持八十分鐘這件事對他們來說，已不再是負面因素了。**」

本書的「後記」由小川洋子執筆，或許是因為河合隼雄謝世於 **2007** 年。於是，小川洋子利用相當長的篇幅，說出她對河合隼雄之深刻懷念。其中，她也提及河合隼雄在他的《心的棲止木》中所討論的「敘事醫學」（**narrative based medicine**）**--** 敘事與醫學的一個新興學門，目前在培養美國大學醫學院有關「醫學倫理」的課程中，頗受重視。不過，小川卻非常感性地指出：她與河合的對談，幫助她「發現了自己身為作家的位置。」

最後，有關小川如何為故事中的少年取名為根號的緣起，請讓我引述如下。首先，她承認這純屬偶然：

> **因為是以數學為主題的小說，所以，我打算為他取一個數學符號的名字，翻開參考書，從西格瑪、洛格、正弦函數、餘弦函數、正切函數中挑選讀起來比較好聽的名字。**

然後，

> **因為他的綽號叫根號，所以塑造一個和根號很相似，頭頂平平的孩子。因為他很在意自己的頭形，所以整天帶著棒球帽。根號這個符號可以讓數字遮風避雨，所以他必定是個善良的孩子，遇到他人有難，就會出手相助……雖然根號小說中的重要人物，但其實我是靠這種且看且走的方式逐漸描繪出輪廓。我完全沒想到，根號這個名字同時帶有「根」和「道路」的意思，和博士之間建立了擁有同根的友情，在大人封閉的境界中開出一條路。**

另一方面，小川後來也發現：根號這個角色

> **從作者手上起飛，在故事中自由自在地悠遊，背著作者，偷偷地設計了小秘密。讀者中有人注意到這個秘密，根號和讀者把作者拋在一旁，悄悄地互使眼色。這種想像讓我感到幸福。自己並不是絕對的創造者，而是對故事的奉獻者，這種想法更讓我自在。無論怎麼掙扎，故事的器量都遠遠大於作者腦袋裡擠出來的內容。根號並不是我創造的角色，我只是跪在自己想撰寫的故事前，把根號這個名字從容器中釋放出來。或許正因為書中的角色到達了作者伸手不可及之處，才能有所成長。**

顯然，作者所塑造的角色有了自主的生命，讓讀者可以與他合謀，而創造出閱讀的各種可能性 – 這其實是推動閱讀者必須面對的「必然後果」，無人絕對沒有資格規定讀者非要怎麼想不可！傑出的小說都有此一特色，優秀的數學小說當然也不例外，有時候它的角色（**character**）之自主性（**autonomy**）會因為本身就是數學概念的「加持」，而顯得更為深刻。