HPM通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系退休教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）
助理編輯：黃俊瑋（和平高中）
編輯小組：蘇意雯（台北市立教育大學）蘇俊鴻（北一女中）
葉吉海（陽明高中）陳彥宏（成功高中）
王文珮（青溪國中）
英家銘（台北醫學大學）
創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng

第十八卷 第五期　目錄（2015年5月）

數學史與特色課程的邂逅

黃俊瑋
台北市立和平高中

一、本校數學特色課程介紹

因應十二年國教上路，本屆高中一年級的課程裡，「跑班式」的選修特色課程也正式上路實施，提供學生們傳統學科外，更多元而豐富的課程選擇，本校（台北市立和平高中）**103** 學年度共開設了十九門特色課程，將全校學生分成兩個班群，在星期二與星期三的下午進行跑班選修課程。其中，數學科所開設的課程名稱為「少年 π 的數學奇幻漂流」。

本校數學科特色課程的設計上，先將數學教師們分成六組，並將一整學年上下學期的數學特色課程內容，區分成六大主題，由各組教師分別設計出六週的特色課程。高一上下學期的數學特色課程，各包含三大主題，並由三位老師分別開課。其中，本學期數學選修特色課程的第一個主題為「邏輯與集合」、第二個主題為「多面體與幾何學」，第三個主題則是「數學遊戲」。

本學期筆者有幸負責第二個主題的六週課程，為了展現有別於其它學校的「特色」，除了課程內容圍繞在「多面體與幾何學」此一核心外，也進一步嘗試融入數學與歷史、數學與文化、數學與美學、數學與文學、數學普及讀物、數學電影等元素，以設計出六週，共 **12** 節的特色課程。由於上述各項元素的融入，也使得本「數學」課程的內容，充滿濃濃的歷史味與人文味。

在洪萬生**(1999)**的〈數學史與數學的教與學〉一文中曾提到，以下數學史「融入」數學教室的一些「**know-how**」，供有心採用的教師參考：

(1)歷史「花絮」（**snippets**），譬如數學家的遺聞軼事、數學問題的起源以及古今

方法的簡單對比等等。

(2)學生以歷史文獻為本的研究專案（**project work**），譬如下列專題『一次方程式：歷史的回顧』、『任意角三等分』、『何謂代數學？』以及『歐幾里得 **vs.** 劉徽』等等，都可以讓學生組成小組，寫出專案研究報告。

(3)數學史的原始文獻（**primary sources**），譬如【幾何原本】與【九章算術】的研讀與討論等等。

(4)練習題（**worksheets**），其設計通常圍繞著簡短的歷史選粹（**historical extracts**），伴隨著歷史背景的說明，再輔以了解數學知識內容的問題、所涉數學議題的討論、今昔解法或處理的比較，以及這些選粹中的題解（**solving problems**）或它們所引發的類似題解。

(5)可立即供 **2-3** 堂課使用的「歷史套裝」（**historical packages**），譬如『古代數碼與數系』，『古埃及算術』，『 與圓周長』，『巴比倫的二次方程解法』以及『九章算術的分數計算』等等。

(6)恰當地使用歷史上出現的謬誤（**errors**）、另類概念（**alternative conceptions**）、觀點的改變（**change of perspective**）、隱含假設的修訂（**revision of implicit assumptions**）以及直觀論證（**intuitive arguments**）等等。

(7)歷史上的問題，譬如古希臘三大作圖題，**Goldbach** 猜測，不同文明所提供的畢氏定理證明，以及引出解析數論的質數定理等等。

(8)歷史上曾經出現的畫圖工具（**mechanical instruments**）。

(9)回到過去的數學實驗活動，譬如使用古代的記號、方法及論證，來學習數學。

(10)編劇本，譬如『柏拉圖 **vs.** 孔子』、『歐幾里得 **vs.** 劉徽』及『伽羅瓦的悲劇一生』等等。

(11)電影及其它視覺工具，譬如英國空中大學（**Open University**）所發行的數學史教學影片等等。

(12)戶外數學古蹟的教學活動。

(13) WWW 網路的使用。

本課程的設計上，也適當地融入了上述若干方式，同時，課程內容以「數學通識」為主要導向，旨在讓學生跳脫傳統「考試的數學」，並體會數學多元而有趣的各個面向。因此，課程所涉及的面向廣泛，但不包含太多艱深的數學問題，多數的主題與內容皆屬探索性，並以引發學生對數學的興趣與學習動機作為主要導向，淺嚐輒止。表一是筆者本學期所開數學特色課程的內容綱要，在此提供讀者乃至各位現場教師們參考與指教：

表一　特色課程內容綱要

週　次	課程內容綱要
第一週	柏拉圖與克卜勒的天空
	1.正多面體介紹 ・歷史源起：歐基里得《幾何原本》與五個柏拉圖立體**(**正多面體**)** ・正 **4**、**6**、**8**、**12**、**20** 面體簡介 ・正多面體模型實物展示、**GSP** 正多面體動畫展示 ・簡易說明「恰有五個正多面體」

	2.阿基米德與阿基米德多面體 ・阿基米德多面體展示與介紹(**13** 個) ・阿基米德、羊皮書與胃痛問題介紹 **3.**上帝是數學家嗎？ ・古希臘與中世紀的自然哲學觀－大自然的數學設計 ・克卜勒的天體模型
第二週	進擊的數學巨人**-** 歐拉
	1.多面體的點線面 ・正多面體的點線面數量－分組討論與發表 ・正多面體的對偶性 ・其它重要多面體的點線面數量－分組討論與發表 **2.**歐拉多面體公式 ・觀察與猜測「歐拉多面體公式」 ・歐拉簡介與最美的數學式－歐拉公式 **3.**數學小說與數學電影介紹
第三週	正多面體展開圖與數學美學
	1.正多面體的展開圖 ・介紹正多面體的展開圖 ・**GSP** 動畫展示正多面體展開圖 ・正六面體與正八面體展開圖：分組討論與發表 **2.**多面體模型製作教學 ・展開圖、色紙、吸管、幾何板、其它方式 **3.**數學與美學交會 ・數學與藝術 ・數學中的美學 ・艾雪鑲嵌藝術
第四週	電影欣賞
	1.電影欣賞 **-** 博士熱愛的算式 **2.**影片中相關數學的討論與總結
第五週	幾何學的歷史巡禮
	1.西方 ・《幾何原本》中的幾何學系統 ・阿基米德的墓碑怎麼刻**?** **2.**東方 ・古代中國重要典籍介紹 ・《九章算術》中的平面與立體幾何學 ・劉徽的數學巧思 ・日本－和算的數學風貌－遺題繼承、算額與圓理。 **3.**畢氏定理證明舉隅 **4.**東西數學文化的比較
第六週	多面體成果發表與評量
	1.作品介紹、展示與創作理念說明 **2.**同學們就作品本身、創作理念與創意進行互評 **3.**票選最喜歡的作品以及最有創意的作品

二、特色課程評量與學生成果展

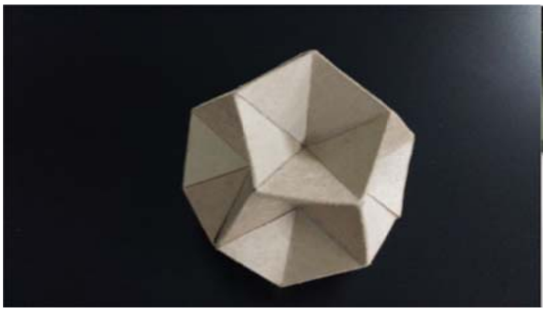
除了課程的內容多元化，本課程的評量也跳脫傳統紙筆測驗式、解題式的考試，而以課堂學習單、分組合作、上課發表以及數學作品發表等方式進行評量方。本特色課程的評量包含前五週各有一份學習單，依據學生上課表現、在學習單上填寫的情況以及相關問題的回答情況，進行評量。除了個人的學習單與上課表現之外，課程中也透過分組合作學習的方式，讓學生們合作利用幾何智慧片，製作各種正多面體與阿基米德多面體的模型，並進一步討論、計算立體圖形的「頂點」、「稜線」與面的個數，進而引導同學們歸納、猜測與發現歐拉多面體公式。此外，也透過分組的方式，讓同學們集思廣益，討論正六面體與正八面體的所有展開圖，並依據各組學生討論的結果與分類情況進行評量。

最後一週，則是同學們的成果發表時間，成果發表的內容並不特別限制，除了多面體模型的製作與設計外，只要與數學相關的作品皆可，學生們可以天馬行空地與藝術、文學等其它元素結合。然而，多數同學仍以多面體模型的製作為主，其中又以吸管或展開圖為大宗，少部份同學則結合上課提到的內容，製作莫比爾斯環、平面鑲嵌畫作，或者創作數學詩等。

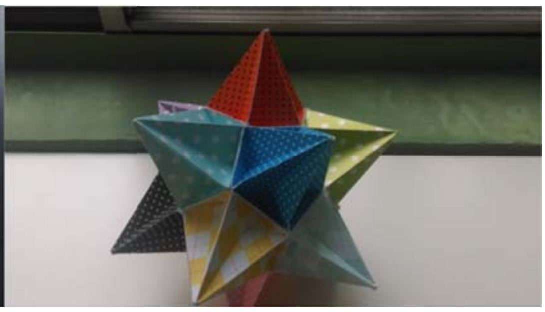
上台發表的同學，除了展示作品，也發表自己的創作理念與相關心得感想。至於成果發表的評分，則是採取互評的方式，每位同學針對其他同學上台展示的的作品本身、創作理念、數學元素以及創意四個部份進評分，並且票選出最有創意的作品與最喜歡的作品，另行表揚。以下茲列部份學生的作品供讀者們參考：

(一) 多面體模型製作

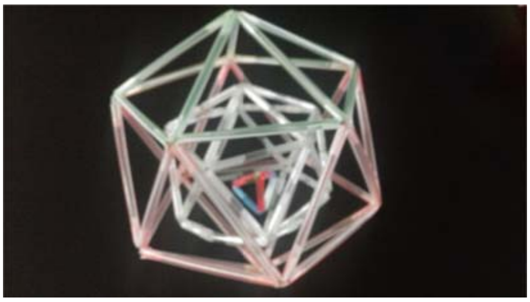
多數同學是以多面體模型創作為主，他們主要是以多面體的展開圖為基礎設計作品（如圖一與圖二），或是利用吸管為邊，連結多面體的各個頂點（如圖三），其中，圖三作品的靈感，主要來自課堂中所介紹，克卜勒早期的天體模型，他認為太陽系的行星的軌道，與五個正多面體有關，參見圖四。

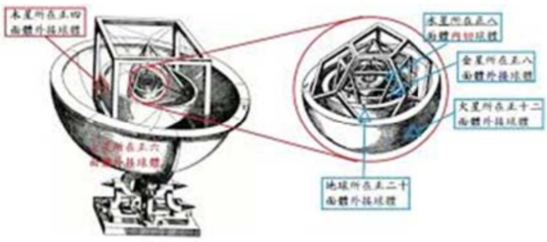


圖一　正十二面體相關模型



圖二　超級正二十面體模型





圖三吸管製作正多面體模型　　　　　　　圖四　克卜勒的天體模型

(二) 莫比爾斯環與平面鑲嵌畫作

本課程的數學與藝術相關單元裡，提到了莫比爾斯環，因此，有同學成果發表時，實際展示、說明如何製作出莫比爾斯環（參見圖五）。另外，課程中也提到了艾雪的平面鑲嵌藝術作品，成果展時，亦有同學創作出一幅「女生與鳥」為主題的平面鑲嵌畫作（如圖六所示）。

圖五 示範如何製作莫比爾斯環

圖六　平面鑲嵌畫作

(三) 數學與文學的邂逅

除了上述多面體模型以及數學藝術相關作品之外，成果發表時，有兩位同學將數學與文學結合，創作了數學詩，其中，一年九班的畢同學創作的數學詩如下：

三人同行古來稀　　五束梅花廿一枝
妻子團圓只半月　　比百零五便得知

詩裡的古來稀所指之數為「七十」，半月是「十五」，「妻子」的諧音為「七」。眼尖的讀者或許發現，上述的數字十分眼熟，而畢同學的創作靈感，正是取自古代中國算書中，一道很有名的數學問題－物不知數問題－亦即一般人較熟悉韓信點兵問題。列為算經十

書的《孫子算經》裡，有一道問題為：「今有物不知其數，三三數之賸（剩）二，五五數之賸（剩）三，七七數之賸（剩）二，問物幾何？」對應此問題的術文如下：

> 三三數之賸二，置一百四十；五五數之賸三，置六十三；七七數之賸二，置三十。併之得二百三十三。以二百一十減之，即得。凡三三數之賸一，則置七十，五五數之賸一，則置二十一，七七數之賸一，則置十五。一百六以上，以一百五減之，即得。

此解法的過程亦即以三三數之餘數乘七十；以五五數之餘數乘二十一；以七七數之餘數乘一十五。三者之和，若不大於一零五則為其數，否則減去一零五或其倍數。如此便得所求數。原詩便是以此零感進行創作。

另一位同學為一年九班的楊同學，她的創作靈感，與課程中介紹的數學史內容有關，課程中曾提到，中國數學家程大位的《算法統宗》一書裡的部份內容，是將數學問題設計成詩歌的方式呈現。而這位同學創作的詩，便是模仿《算法統宗》的方式，將數學問題融入這首詩裡，將數學與文學結合。而她也提到：「數學詩兼具文學的感性和數學的理性，看似衝突卻絲毫不減它的魅力。數學好國文不好的人可以寫寫看，說不定可以增加作文能力。國文好數學不好的人也可以寫寫看，或許在創作過程中，愛上數學的樂趣。國文好、數學好的人更要寫數學詩，這種人才不寫實在太浪費了啊！」而她的作品如下：

森林有樹一百二，各種數目皆不同。
木麻黃植六十棵，養蠶桑為其四成。
其他香香是檀樹，蝶舞蜂飛樂無窮。
一天一天又一天，枝葉繁盛樹蔭濃。
取桑餵蠶餘八棵，尚有檀數一十二。
桑檀剩餘之總和，二成即為木麻黃。
試問伐木多少棵，請君細細述因由。

這首詩背後，隱藏了一道數學問題，問題的解法與答案，則留待有興趣的讀者自行研究探討。

她在本詩的創作理念中提到：「寫完這首不太像詩的詩後，心中真的只有一個感想，那就是古代數學家實在是太神啦!一開始還很有自信的決定要押韻，沒想到超級困難。」她也進行說明，寫這首詩除了文學與數學的目的外，更是為了喚起大家的環保意識：「一開始想寫這個主題主要是因為家附近都是山，但卻因為人的私慾，使得樹愈來愈少，希望可以藉由這首詩來喚起大家心中美麗高尚的環保意識。」

三、課程成果評鑑與學生回饋

（一）課程成果評鑑

在最後一週的課程裡，筆者總共回收了 **2** 個班級共 **45** 位學生的課程回饋表，

回饋表的部份包含對本課程各個主題滿意度的量化評分，以及說明本課程最喜歡的部份、最不喜歡的部份與相關原因，也請同學們簡述本課程最大的收穫。

首先，量化評分的部份主要採七點量表，滿分為 **7** 分，相關統計結果可參見表二。表中可看出，各個單元都呈現出正向的回饋，滿意度都超過 **5** 分，除了最低分的成果發表（**5.34**）之外，其它主題平均皆超過 **5.5**。歷史相關各主題部份，則略高於 **5.5** 分。若再深入探究相關質性資料後可發現，學生的評價呈現兩極化的結果，一部份學生喜歡數學史相關元素，另有一部份學生則否。另外，從統計結果也可看出學生最喜歡的主題為「影片欣賞－博士熱愛的算式」，滿意度高達 **6.55**，而「正多面體製作」以及「數學普及讀物與數學電影介紹」則以 **6.11** 次之。綜合來看，量化資料顯示，絕大多數學生對本特色課程的滿意度以及喜歡度，皆屬正面。

表二　數學特色課程學生滿意度

週次	主題	學生評鑑（滿分７分）
第一週	五個正多面體與阿基米德多面體的介紹與展示	**(5.68)**
	柏拉圖與克卜勒的天空－多面體的歷史發展	**(5.59)**
第二週	正多面體製作 多面體的點線面與歐拉多面體公式 進擊的數學巨人－最美的數學式 數學普及讀物與數學電影介紹	**(6.11)** **(5.89)** **(6)** **(6.11)**
第三週	多面體的展開圖討論與製作 數學與美學的交會	**(5.95)** **(5.98)**
第四週	影片欣賞－博士熱愛的算式	**(6.55)**
第五週	古代中國的幾何學 日本數學文化中的幾何學 畢氏定理與各種證明 西方幾何原本中的幾何學	**(5.61)** **(5.55)** **(5.55)** **(5.57)**
第六週	成果發表與創作分享	**(5.34)**

（二）學生回饋

除了上述簡單的量化資料化，針對學生們所回答的相關回饋可歸納發現，他們認為本課程最大的收穫，主要包含以下四個面向：**1.**數學史與文化相關面向、**2.**引發學習興趣與動機，以及數學的有趣面向、**3.**數學的多元面向、**4.**數學知識面向。至於同學們回答最喜歡的部份主要包含：電影欣賞、歷史發展、數學人物、數學普及讀物介紹、正多面體知識、多面體模型製作以及最美的數學式等。至於不喜歡的部份，有 **20** 位同學回答都喜歡，沒有不喜歡的單元，另有 **12** 同學所回答不喜歡的部份，皆與歷史有關，再探究這些同學不喜歡的原因，多數是因為本來就不喜歡歷史或是對歷史沒興趣，因而對課程中歷史相關面向不感興趣。另外，也有一些同學因為本身不喜歡勞作或幾何模型製作，又或者從小不擅長思考空間立體圖形，因而不喜歡成果發表與動手作幾何模型的部份。

以下簡單整理並列舉學生所填答，認為本課程最大的收穫：

1. 數學史與文化相關面向

「了由數學的由來歷史」(2305)

「對數學的發展歷史有更深的了解」(1507)

「在這裡得到日常生活或歷史中都存在著數學」(3107)

「了解正多面體和其發展史」(1004)

「了解了數學的歷史及由來，以及其他我所不知的數學問題及廣擴的數學世界」(1806)

「有學到比之前更深層的東西，也對數學有更廣泛的了解。接觸到各個國家對數學的不同見解、過程及發現。」(0907)

「認識了數學有趣的一面，認識多面體，了解數學的歷史」(1409)

「能學到歐拉很值得開心，開闊我的視野」(2106)

2. 引發學習興趣、動機以及數學的有趣面向

「了解數學的樂趣及如何在日常生活中培養對數的喜愛及感受，都可從推薦的畫去了解。」(3107)

「認識了數學有趣的一面」(1409)

「覺得數學變得更美好，又燃起了我對數學的熱血。使我更加看清數學的世界，不僅僅是拿著筆在紙上揮揮書寫，解一些題目，而是可以跨到很多領域的如歷史、人文等。」(1511)

「滿有趣的，讓我覺得數學沒這麼單調。多面體、莫比爾斯環，那真的很酷，而且讓我學到一種多面體有很多拼種法」(2710)

「覺得有趣，不再用為考試的心情上數學課」(1004)

「從課堂中也學到許多有關數學的趣事」(3010)

「覺得數學變有趣了，了解幾何學提升對數學的興趣」(1705)

「我發現數學不是只是課本上無聊的東西，而是悠關生死的重要課題」(3204)

「很輕鬆很好玩，沒有考試的壓力，而且成果評定是作品發表，這樣就不會因為數學能力沒那麼而低分。」(1003)

「自己拆解和組裝多面體，滿有趣的，看了很多非正多面體的多面體，很酷」(0410)

3. 數學的多元面向

「在這裡得到日常生活或歷史中都存在著數學」(3107)

「了解數學的根本，至今不只是考試，而是一門與生活息息相關的學問」(2305)

「知道數學可不和不同方面的東西結合，例如:文學、藝術…等，覺得很有趣。找回一點對數學的喜歡。」(0809)

「能看到數學在不同的方面展現出來，數學可以應用在生活上很多的地方」(2607)

「瞭解數學的多元樣貌」(2407)

「使我更加看清數學的世界，不僅僅是拿著筆在紙上揮揮書寫，解一些題目，而是可以跨到很多領域的如歷史、人文等。」(1511)

「『數學變活了!!!』的震撼」 (1104)

4. 數學知識面向

「學到很多有關幾何的知識，收獲良多，數學的應用極為廣」(3404)

「學到從不同角度去看多面體，每次看都不太一樣，像萬花筒」**(2106)**
「收穫：能自己做出立體的東西，了解一些公式的由來。」**(0703)**
「學到以前不知道的課外知識，用 **PPT** 上數學課還滿好玩的」**(0306)**
「認識很多新的知識 尤其是最美的數學式。分組有互動，討論，比起一般上課參與感更多了。「$e^{i\pi}+1=0$」謝謝老師給的優美算式」**(2611)**
「原來數學有很多知識是我不知道的，有很多原來材料之外的知識:各種多面體、數學名人等，很豐富」**(0711)**
「對多面體了解更多了，而且也認識了日本文化的幾何學」**(1311)**
「我在這門課上學到了許多公式，也試著自己組裝了模型，也學到了許多名人」**(2712)**
「是可以自己做一個用吸管的模型，和用色紙摺的模型，也看到了別的同學介紹了數學詩和四四圖、三三圖」**(2712)**
「吸收了很多以前不會學到的東西，真的收穫很多」**(2608)**

至於學生最喜歡的部份，則可歸納出以下向度，茲列舉學生相關回饋：

1. 歷史部份
「最喜歡歷史發展的介紹，能了解數學從過去到現在的變化。」**(2305)**
「最喜歡第五週的部份，可以認識到不同地方的數學史。**(3404)**
「喜歡柏拉圖與克卜勒的天空**-**多面體的歷史發展**:**很漂亮的天空」**(2407)**
「一些公式、數學的歷史。因為我個人喜歡聽故事，又對數學很有興趣，…覺得很新鮮」**(2008)**
「喜歡**:**古數學，有一種神秘色彩」**(1509)**
「多面體的歷史發考，因為對數學歷史有興」**(2608)**
「古中國的幾何學：感覺中國跟數學沒什麼關係，但它們在一起時卻衝突的很美認識數學詩和創造了一首有點智障的數學詩。」**(0709)**

2. 影片與數學普及讀物
「最 **like** 影片欣賞，因為覺得這是令[另]一種學習的方式很特別。」**(1507)**
「博士熱愛的算式，有許多有趣的劇情，和深奧的意義。」**(1806)**
「影片欣賞+多面體的展開圖討論與模型製作。」**(1511)**
「看電影，既有故事又有數學，而且還滿有趣的。」**(2710)**
「最喜歡看電影的部份,因為可以用很輕鬆的方式學數學,而且裡面的內容都頗有趣，學了可以向別人炫耀。」**(3010)**
「數學普及讀物與數學電影介紹是我最喜歡的，因為從生活樂趣中去體悟數學是很好的，猶[由]其是放下心態時。」**(3107)**
「數學讀物與電影。」**(1705)**
「看過小說後再看影片，有另一種感覺。」**(1409)**

3. 正多面體
「最喜歡**:**正多面體展開圖，因為很有挑戰性。」**(2205)**
「最喜歡操作，能不用背的方式，而是用自己實作來了解多面體的 **V**、**F**、**E**」**(0703)**
「自己拆解和組裝多面體，滿有趣的，看了很多非正多面體的多面體，很酷。」**(0410)**

四、結語

數學對於多數學生而言，是最抽象、困難卻又無法逃避的科目，而數學特色課程，正可彌補一般數學正課上的不足，透過講述、分組合作、模型製作、電影欣賞乃至成果發表等更多元的教學方式，融入多樣化的教材，讓學生體會數學的有趣、有用的多元面向，也可從數學史與數學文化的角度切入，豐富並開拓更寬廣的數學新視野。相較起數學正課的「硬」，數學特色課程的「溫柔」與通識取向，更能引發學生的學習動機，並拉近學生們與數學之間的距離。而「數學與美」更是本課程的核心議題，除了欣賞幾何之美，欣賞數學的藝術層面外，本課程也緊扣著數學家票選出的五個最美數學式。

從學生對數學特色課程的回饋來看，絕大多數學生持正向與肯定的態度，一方面領會數學的多元性，並能引發他們對數學的興趣，拉近與數學之間的距離。學生認為，他們最大的收穫，主要包含：**1.**數學史與文化相關面向、**2.**引發學習興趣與動機，以及數學的有趣面向、**3.**數學的多元面向、**4.**數學知識面向。而他們最喜歡的主題主要為：電影欣賞、歷史發展、數學人物、數學普及讀物介紹、正多面體知識、多面體模型製作以及最美的數學式等。

本學年的特色課程只是開端，十二年國教政策與課程趨勢目標下，未來所需開設的特色選修課程勢必持續增加，甚至將進一步尋求跨校際合作的機會，學生們亦將有機會體驗其它學校的「特色」與不同專長教師的課程。本課程第一次施作，仍有諸多不足與改善空間，而未來相關課程的設計與調整上，亦期盼能加入更多與閱讀相關的元素，寓數學於閱讀。當然，數學史融入課程包含許多不同面向與層次，除了說故事，引發學習動機與興趣的功能外，尚有認知上的意義與啟迪思想等目的，本課程也期盼能發揮啟發學生數學思想的作用，並賦予學生們更自由而寬廣的數學視野。

1. 為節省影印成本，本通訊將減少紙版的的發行，請讀者盡量改訂 PDF 電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail 至　suhy1022@gmail.com
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請 e-mail 至 suhy1022@gmail.com
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng/letter/hpmletter.htm

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。懇請各位老師惠賜高見！

「高斯」消去法之前

蘇惠玉
台北市立西松高中

算術與代數

對於現代的我們來說，不管年代為何，只要接受過數學教育的人，應該都做過雞兔同籠的問題吧。舉例來說：「在一籠子裡雞與兔共 **30** 頭，牠們的腳合起來共 **82** 隻腳，問雞與兔各有幾隻？」常有學生會說這個問題不合理，誰會把雞跟兔子關在一起啊？如果不管現實問題，想一想我們拿這個問題來學習甚麼？在國小階段還沒學習符號代數之前，這個問題僅能以算術的形式作答，像是先假設不管兔與雞，每隻 **2** 條腿，那麼應該有 **30×2=60** 隻腳，這樣還有 **22** 隻腳，因為每隻兔子比雞多 **2** 隻腳，因此兔子共有 **22÷2=11** 隻，雞有 **19** 雞。數學老師利用這個問題來培養學生的數學感，在還沒學習用符號代數解聯立方程組之前，從題目中觀察數字的關係，並用簡單的方法加以解決，這個就是數學素養。

數學發展的動力源自於解決人類生活問題的需求，以及人類對智力的挑戰。在早期數學文件的紀錄中，我們可以看見許多古人們如何解決問題的痕跡，這些痕跡彷彿帶領我們穿越時空，讓我們在那個時代的氛圍下理解當時人們的努力，如何以所知的數學知識解決問題，努力地傳播這些知識，並讓數學知識源源不絕地往前進展。在許許多多的文本中，本文將焦點著重在解聯立方程組的方法，在課本學到所謂的「高斯消去法」的方法之前，解聯立方程組的方法與概念，經過甚麼樣的演變呢？本文嘗試藉由這些數學史的歷史材料，讓讀者能夠體會與欣賞一個數學概念的演變過程，理解數學知識活動是活生生的有機體，數學概念不是靜靜不動等著被發現的礦物。

在沒有代數符號的表徵方法之前，這些現在被我們歸類為解聯立方程組的問題，靠著對數字的算術運算技巧，古代數學家們依然可以解決問題並將數學的發展進一步延續下去。在西元 **2000** 多年前的巴比倫楔形泥板中，其中有一塊是解聯立方程組的教學講義，[1]這塊泥板的作者隨時提醒學生要將數字「記住在你的腦袋裡（**may your head hold!**）」。它上面的題目是這樣說的：

我有一塊地的租金是每 1 bur 收 4 gur；另一塊地租金每 1 bur 收 3 gur；第一塊田的租金比第二塊田的租金多 8;20，兩塊地的面積和為 30’。我的田地面積各是多少？

首先，面積單位 **1 bur=30’ sar**，容積單位 **1 gur=5’ sila**；再者，巴比倫人用的是 **60** 進位制，題目中的租金差指的是 **8;20 sila**，即 **8×60+20=500 sila**，面積和 **30'**，意即 **30×60=1800 sar**。若我們以當時的單位，現代的符號來表達這個題目，即是解聯立方程組

$$\begin{cases} x+y=30' \\ \dfrac{2}{3}x-\dfrac{1}{2}y=8;20 \end{cases}$$

。記住，他們當時沒有符號，當然就不會有現代我們用的代入或加減

[1] 楔形泥板編號 **VAT 8389**，現存於柏林的 **the Museum of the Ancient Near East**，下面的問題出自此泥板的第一個問題。

消去法。在這片泥板上記載的方法告訴我們，巴比倫人用嘗試錯誤與數字的比例關係解決這個問題：
因為一塊地每 **30' sar** 租金 **20 sila**；另一塊地每 **30' sar** 租金 **15 sila**，因此先假設 **2** 塊田地面積都是 **15 sar**，那麼它們的租金分別為 **10' sila** 與 **7;30 sila**，兩者差為 **2;30**，與題目所要求的還差 **5;50**；接下來要進行轉移，要從第二塊田地「轉移」多少面積到第一塊呢？因為第一塊田 **1 sar** 要 $\frac{2}{3}$ **sila**，亦即 **0;40 sila** 租金；第二塊田 **1 sar** 要 $\frac{1}{2}$ **sila**，亦即 **0;30 sila** 租金，若第二塊少 **1 sar** 到第一塊田，彼此租金差就會增加 **0;40+0;30=1;10**，用此除 **5;50** 得 **5**，因此只要從第二田轉 **5 sar** 即可，即第一田的面積為 **20 sar**，第二塊田的面積為 **10 sar**。這個方法後來發展變成解此類應用問題的試位法與雙設法，成為代數符號發明之前解含二個未知數方程式的主流方法。

古代算術方法在丟番圖（**Diophantus of Alexandria,** 約 **200 –** 約 **284**）的《算術（***Arithmetica***）》達到一個新的高峰。這本書本來共有 **13** 卷，後來遺失後再發現只找到 **10** 卷。有關這本書最出名的一個「事件」，即是費馬在他擁有的 **1621** 年出版的譯本裡，在第二卷問題 **8** 旁邊的留白處寫下的有關費馬最後定理的備註。這本書有許多關於解方程式與聯立方程組的問題，其中第一卷為解確定方程組（**determinate equations**）。譬如第一卷的問題 **19**：

> **找出四個數使得任三數的和與第四數的差為一給定值。**
> **必要條件：所有這些給定值的一半要比任何給定值大。**
> **假設第一、二、三數的和與第四數的差為 20 單位；第二、三、四數的和與第一數的差為 30 單位；第三、四、一數的和與第二數的差為 40 單位；第四、一、二數的和與第三數的差為 50 單位。**

在《算術》中使用的方法是這樣的：
假設這四個數的和為 **2 αριθμός** （$x_1+x_2+x_3+x_4=2X$），[2]
由第一個條件得四個數的和比第四個數的 **2** 倍多 **20**（$x_1+x_2+x_3+x_4-2x_4=20$）；
因此可得第四個數為 **1** 個 **αριθμός** 減去 **10**（$x_4=X-10$）；
同理可得第一個數為 **1** 個 **αριθμός** 減去 **15**（$x_1=X-15$）；
同理可得第二個數為 **1** 個 **αριθμός** 減去 **20**（$x_2=X-20$）；
同理可得第三個數為 **1** 個 **αριθμός** 減去 **25**（$x_3=X-25$）；
因此可得 **X=35**，此四個數為 **20, 15, 10, 25**。
事實上，若依現代代數符號來解題，我們可能輕易地以假設四個未知數來解決這個聯立方程組問題，但是從上述的解題過程中可以發現，丟番圖僅假設一個未知數就解決此問題。在沒有那麼便利的代數符號表徵的情況下，數學家們反而更透徹地看清數量之間的關係，僅憑藉簡單的算術運算就能解決問題。

---

[2] **αριθμός** 這個字的希臘字母直接對照英文字母為 **arithmos**，有 **number** 之意，丟番圖用它來表示為題意而設的一個未知數。

中國的方程術

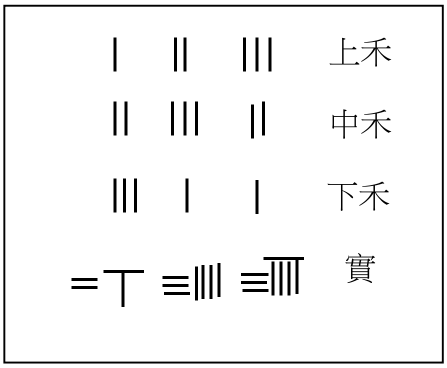
同樣在沒有現代代數符號表徵的條件下，古代中國卻發展出一套近似於現代我們所學高斯消去法的程序性演算法，用來解線性聯立方程組。成書於西漢（西元前 **202** 年~西元 **8** 年）中葉的《九章算術》一書共九卷，包括二百四十六個問題與解法。在所有有關《九章算術》的註解中，最為重要的即是魏晉人士劉徽所做的注。本書第八卷「方程」中提出的「方程術」即為中國算法解線性方程組的方法。劉徽在注解中寫道：

> **程，課程也。群物總雜，各列有數，總言其實。令每行為率，二物者再程，三物者三程，皆如物數程之。並列為行，故謂之方程。行左右無所同存，且為有所據而言耳。**

在中算中，所謂的「程」有計量、考核之意，「方程」的本義就是「並而程之」，也就是把諸物之間的各數量關係並列起來，考核其度量標準。每一行為一個數量關係，有幾個未知數就需要幾個數量關係，將這些關係一行一行並列起來進行計算，因此稱為「方程」，在中國古代算學中以此名詞來稱呼線性聯立方程組。以第一問為例：

> **今有上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，實三十九斗；上禾二秉，中禾三秉，下禾一秉，實三十四斗；上禾一秉，中禾二秉，下禾三秉，實二十六斗。問上、中、下禾實一秉各幾何？**

這個問題是要測量穀物之產量，取上、中、下禾若干，捆脫去外殼成米計算產量。若以現代代數符號解答，設上禾一秉去殼成米 **x** 斗，中禾一秉去殼成米 **y** 斗，下禾一秉去殼成米 **z** 斗，由數量關係列出的方程組為 $\begin{cases} 3x+2y+z=39 \\ 2x+3y+z=34 \\ x+2y+3z=26 \end{cases}$。在《九章算術》的方程術中所用的解法，除了數字用算籌（小木棍）擺放的形式表示之外，計算過程就如同現今高中數學所教授的高斯消去法一般：



先將條件以算籌排列成行（如右圖），
先利用「遍乘」將中行與左行的每一個係數乘以右行的第一個係數，再進行「直除」，一直與右行相減直到中行與左行第一個係數為 **0**；再針對中行剩下的中禾係數重複剛才的遍乘與直除，讓左行剩下一個未知數。先以現代符號將程序表示如下：

$$\begin{cases} 3x+2y+z=39\ldots\ldots(1) \\ 2x+3y+z=34\ldots\ldots(2) \\ x+2y+3z=26\ldots\ldots(3) \end{cases} \xRightarrow{\mathbf{(2)\times 3,\ (3)\times 3}} \begin{cases} 3x+2y+z=39 \\ 6x+9y+3z=102 \\ 3x+6y+9z=78 \end{cases} \xRightarrow{\mathbf{(2)\times 3-(1)\times 2,\ (3)\times 3-(1)}} \begin{cases} 3x+2y+z=39 \\ \quad 5y+z=24\ldots(4) \\ \quad 4y+8z=39\ldots(5) \end{cases}$$

(5)×5−(4) ×4 **[(4)×4−(6)]÷5** **[(1)×4−(6)−(7)×2]÷3**

$$\begin{cases}3x+2y+z=39....(1)\\ \quad 5y+z=24....(4)\\ \quad\quad 4z=11.....(6)\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}3x+2y+z=39....(1)\\ \quad 4y \quad =17....(7)\\ \quad\quad 4z=11.....(6)\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}4x \quad\quad =37\\ \quad 4y \quad =17\\ \quad\quad 4z=11\end{cases}$$

接著將**(4)×4−(6)**後再除以 **5**，得到 **4** 秉中禾之實 **17**，接著**(1)×4−(6)− (7)×2** 後再除以 **3**，得 **4** 秉上禾之實 **37**，最後皆除以 **4** 即可得上禾、中禾、下禾 **1** 秉之實。

由於中國傳統算法以算籌的擺弄代替筆算的特性，即使在沒有西方後來發展的符號代數表徵形式條件下，依然可以發展出一套程序性的計算步驟以解決聯立方程組的問題。不過也因為問題單純與算籌擺弄不能過於複雜的限制，讓這一套方法的發展無疾而終。反觀西方解聯立方程組的技術，在符號代數發明之後，配合數學與其他學科發展之需求，得以繼續獲得更多數學家灌溉養分，持續進展。

代數表徵方程組與消去法

韋達（**F. Viète, 1540~1603**）在 **1591** 年出版《解析技術引論》（***In Artem Analyticem Isagoge*, *Introduction to Analytic Art***)後，將以代數符號表徵方程式的觀念正式引入歐洲，不過關於解聯立方程組的方法並沒有受到太多的重視與改進，在 **1550** 年到 **1660** 年間出版的 **107** 本代數書籍中，只有 **4** 本有提到聯立線性方程組，例如 **J. Peletier du Mans** 於 **1554** 於出版的 ***L'Algebre***，以及 **J. Borrel** 於 **1560** 年出版的 ***Logistica***。**1660** 年之後的著作以影響力的深遠而論，首推牛頓（**Sir Isaac Newton, 1643 – 1727**）的《通用算術（***Universal Arithmetick***）》一書。

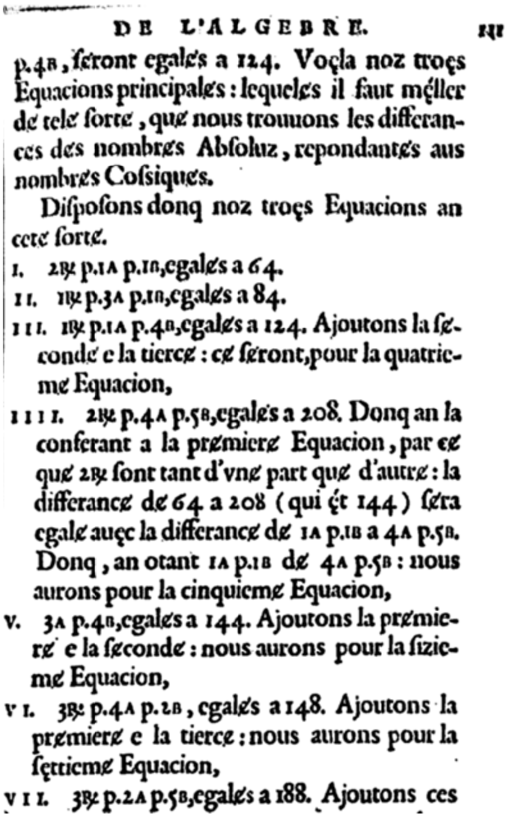
牛頓於 **1669** 年接任英國劍橋大學的盧卡斯講座教授（**Lucasian Professor of Mathematics**）時的工作之一，即是對大學生講授代數學，他的上課講義先後於 **1707** 與 **1720** 年以拉丁文與英文出版。在 **1720** 年的英文版本中，牛頓敘述了如何解聯立方程組的策略，基本上跟我們現在解方程組的概念是一樣的，即消滅未知數，他在**"Of the Transformation of two or more Equations into one, in order to exterminate the unknown Quantities"**這一節中說到：

> ......方程式（如果超過兩個時，倆倆一起）是如此的相關，每一次的操作中可以消滅未知量中的一個，從而造出一個新的方程式。….你們將會學到，用一個方程式可以消去一個未知量，因此，當方程式的個數和未知量的個數一樣多時，所有的方程式最後可以消滅成只剩一個，且此式只有一個未知量。

牛頓的方程組並不侷限在線性方程組，他介紹的卻是解方程組的核心策略：減少變數的方法，他用了所謂的加減消去法，稱之為「**taking off equal Thing out of equal Thing**」，

譬如$\begin{cases}2x=y+5\\ x=y+2\end{cases}$，兩式相減，得 **x=3**；或是「**adding Equals to Equals**」，譬如

$\begin{cases} ax - by = ab - az \\ bx + by = b^2 + az \end{cases}$，兩式相加得 $ax + bx = ab + b^2$，最後解得 **x**。牛頓使用的消減未知量的方法還有一種，稱為等價消去（**equality of values**），譬如在 $\begin{cases} ax - 2by = ab \\ xy = b^2 \end{cases}$ 的例子中，由第一式可得 $y = \dfrac{ax - ab}{2b}$，第二式得 $y = \dfrac{b^2}{x}$，因此 $\dfrac{ax - ab}{2b} = \dfrac{b^2}{x}$，整理得 **x** 的二次方程式 $x^2 - bx - \dfrac{2b^3}{a} = 0$ 後解得 **x**。


DE L'ALGEBRE. 111

p.4B, séront egalés a 124. Voęla noz troęs Equacions principalés: lequelés il faut méller dé telé sorté, qué nous trouuons les differances dés nombrés Absoluz, repondantés aus nombrés Cosiques.

Disposons donq noz troęs Equacions an cete sorté.

I. 2ℛ p.1A p.1B, egalés a 64.

II. 1ℛ p.3A p.1B, egalés a 84.

III. 1ℛ p.1A p.4B, egalés a 124. Ajoutons la séconde e la tiercé: cé séront, pour la quatriemé Equacion,

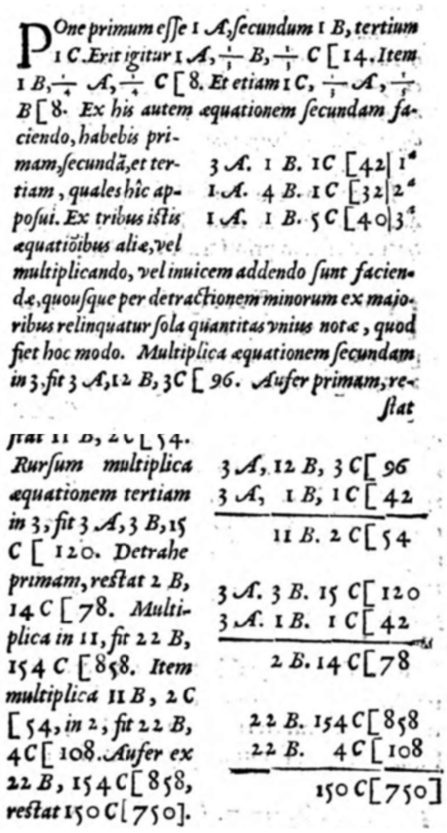
IIII. 2ℛ p.4A p.5B, egalés a 208. Donq an la conferant a la prémieré Equacion, par cé qué 2ℛ sont tant d'vné part qué d'autré: la differancé dé 64 a 208 (qui ęt 144) séra egalé auęc la differancé dé 1A p.1B a 4A p.5B. Donq, an otant 1A p.1B dé 4A p.5B: nous aurons pour la cinquiemé Equacion,

V. 3A p.4B, egalés a 144. Ajoutons la prémieré e la séconde: nous aurons pour la siziemé Equacion,

VI. 3ℛ p.4A p.2B, egalés a 148. Ajoutons la prémieré e la tiercé: nous aurons pour la settiemé Equacion,

VII. 3ℛ p.2A p.5B, egalés a 188. Ajoutons ces

J. Peletier du Mans, *L'Algebre*,


Pone primum esse 1 A, secundum 1 B, tertium 1 C. Erit igitur 1 A, 1/3 B, 1/3 C [14. Item 1 B, 1/4 A, 1/4 C [8. Et etiam 1 C, 1/5 A, 1/5 B [8. Ex his autem æquationem secundam faciendo, habebis primam, secundã, et tertiam, quales hîc apposui. Ex tribus istis æquatiõibus aliæ, vel multiplicando, vel inuicem addendo sunt faciendæ, quousque per detractionem minorum ex maioribus relinquatur sola quantitas vnius notæ, quod fiet hoc modo. Multiplica æquationem secundam in 3, fit 3 A, 12 B, 3 C [96. Aufer primam, restat 11 B, 2 C [54.

3 A. 1 B. 1 C [42| 1ª
1 A. 4 B. 1 C [32| 2ª
1 A. 1 B. 5 C [40| 3ª

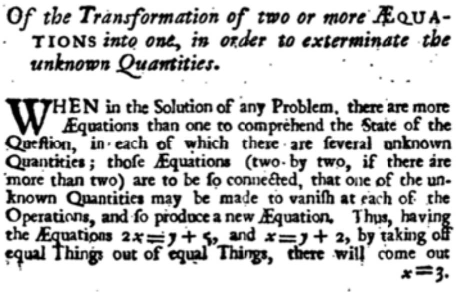
Rursum multiplica æquationem tertiam in 3, fit 3 A, 3 B, 15 C [120. Detrahe primam, restat 2 B, 14 C [78. Multiplica in 11, fit 22 B, 154 C [858. Item multiplica 11 B, 2 C [54, in 2, fit 22 B, 4 C [108. Aufer ex 22 B, 154 C [858, restat 150 C [750].

3 A, 12 B, 3 C [96
3 A, 1 B, 1 C [42
11 B. 2 C [54

3 A. 3 B. 15 C [120
3 A. 1 B. 1 C [42
2 B. 14 C [78

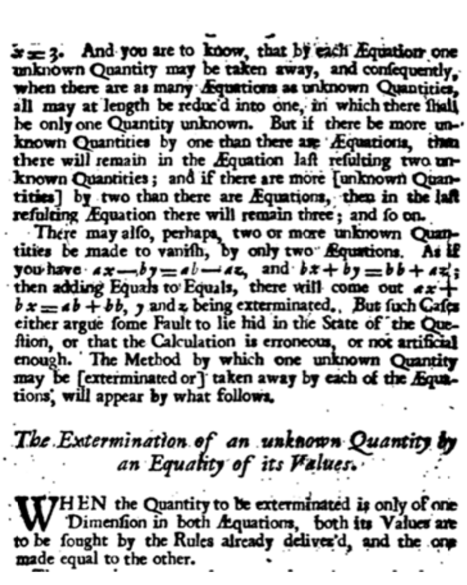
22 B. 154 C [858
22 B. 4 C [108
150 C [750]

J. Borrel, *Logistica*, 1560


Of the Transformation of two or more ÆQUATIONS into one, in order to exterminate the unknown Quantities.

WHEN in the Solution of any Problem, there are more Æquations than one to comprehend the State of the Question, in each of which there are several unknown Quantities; those Æquations (two by two, if there are more than two) are to be so connected, that one of the unknown Quantities may be made to vanish at each of the Operations, and so produce a new Æquation. Thus, having the Æquations $2x = y + 5$, and $x = y + 2$, by taking off equal Things out of equal Things, there will come out $x = 3$.

I. Newton, *Universal Arithmetick*,


$x = 3$. And you are to know, that by each Æquation one unknown Quantity may be taken away, and consequently, when there are as many Æquations as unknown Quantities, all may at length be reduc'd into one, in which there shall be only one Quantity unknown. But if there be more unknown Quantities by one than there are Æquations, then there will remain in the Æquation last resulting two unknown Quantities; and if there are more [unknown Quantities] by two than there are Æquations, then in the last resulting Æquation there will remain three; and so on.

There may also, perhaps, two or more unknown Quantities be made to vanish, by only two Æquations. As if you have $ax - by = ab - az$, and $bx + by = bb + az$; then adding Equals to Equals, there will come out $ax + bx = ab + bb$, y and z being exterminated. But such Cases either argue some Fault to lie hid in the State of the Question, or that the Calculation is erroneous, or not artificial enough. The Method by which one unknown Quantity may be [exterminated or] taken away by each of the Æquations, will appear by what follows.

The Extermination of an unknown Quantity by an Equality of its Values.

WHEN the Quantity to be exterminated is only of one Dimension in both Æquations, both its Values are to be sought by the Rules already deliver'd, and the one made equal to the other.

牛頓解方程組的方法持續影響到 **18** 與 **19** 世紀初的代數學習，在整個 **18** 世紀的代數教科書中，可以看到牛頓用詞與策略的影響，牛頓用了拉丁文的 ***extermino***，以及後來英文版的 **exterminate** 來形容消滅未知量的動作，這個用詞持續出現在後世的代數教科書中，直到拉克洛瓦（**Sylvestre François Lacroix, 1765 – 1843**）在 **1804** 年出版的《代數原本（***Elemens d'algèbre***》中稱「這種消去一個未知數的方法，就叫消去法（**elimination**）」，這本法文作品於 **1818** 年翻譯成英文後在美國出版，「消去法」就成了美國，乃至今日代數書中的固定說辭。

結語

解聯立方程組的需求在高斯的年代達到前所未有的高峰。當時無論是天文觀測或是大地測量，都需要處理大量的觀測數據並進行預測，因此解線性聯立方程組的技巧變成減少大量計算工作的重點需求。高斯為了精簡計算過程，將按照順序，不需要寫下未知數符號的方程式以數字表列，更有效率地組織計算工作，大幅削減了當時教科書中所提供方法的計算量。作為解線性聯立方程組的一種方法，高斯消去法在矩陣、演算法以及計算機科學等新概念、新學科等的新血加入後，持續地蓬勃發展。一個數學概念與技巧的產生，不是只有一位數學家，即使是偉大如高斯一人的功勞，通常都是經由許多世代，許多數學家共同灌溉的成果，高斯消去法就是一個很好的典範例。

在沒有代數符號幫我們運算之前，人們習慣觀察數量的關係，並利用這些關係簡單的解決問題，這種算術解法在代數符號超強的抽象化與一般化能力面前，好像顯得非常的小兒科上不了臺面。然而當我們這些普通人出社會之後，碰到需要聯立方程組問題的機率會有多大呢？到時候又有多少人會用代數方程組來解決問題呢？說到底，學校數學的學習者有 **80%**會成為一般公民，這些公民培養他們的數學感才應該是重要的數學教育課題，這些數學感是學校畢業之後可以帶著走的能力，而不是考完試後馬上拋在腦後的無意義的代數操弄。然而對於與人類未來生活品質息息相關的 **20%**的學生呢？符號化的數學是一項強大的工具，能讓我們用一般化，甚至可程序化的方法更簡便地處理複雜的問題。以高斯消去法為例，除了學習基本的高斯消去法技巧之外，透過瞭解它的發展過程去學習它所整合在一起的各個面向的概念與學問，數學的學習才會變得更加完整，讓人在冷冰冰的知識學習之外，增加一點人文的溫暖在裡面，因此培養出來的學生未來才會真正考慮人類的福祉，不至於變成瘋狂科學家或自負自大、眼光淺短的大人。

參考文獻

Newton, I. *Universal Arithmetick: OR TREATISE of ARITHMMETICAL Composition and Resolution*. London, 1720

Høyurp, J. （2002）, *Lengths, Widths, Surfaces: A Portrait of Old Babylonian Algebra and Its Kin*. New York: Springer.

Heath, T. L. （1910）, DIOPHANTUS OF ALEXANDRIA. London: Cambridge University Press

Grcar, J. （2013）,〈高斯消去法與她的數學家們〉，蘇惠玉譯，收錄於《數理人文》創刊號。

編註：本文原稿刊登於翰林我的網【高中數學趣味閱讀素材】單元