

HPM 通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系退休教授）
 主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）
 助理編輯：黃俊璋（和平高中）
 編輯小組：蘇意雯（台北市立教育大學）蘇俊鴻（北一女中）
 葉吉海（陽明高中）陳彥宏（成功高中）
 王文珮（青溪國中）
 英家銘（台北醫學大學）
 創刊日：1998 年 10 月 5 日 每月 5 日出刊
 網址：http://math.ntnu.edu.tw/~horng

第十八卷第十一期 目錄 (2015 年 11 月)

- ▣ 天文學中的數學模型 (I) —
古希臘時期與托勒密的天文模型
- ▣ 推薦賴以威的《超展開數學教室》

天文學中的數學模型 (I) —

古希臘時期與托勒密的天文模型

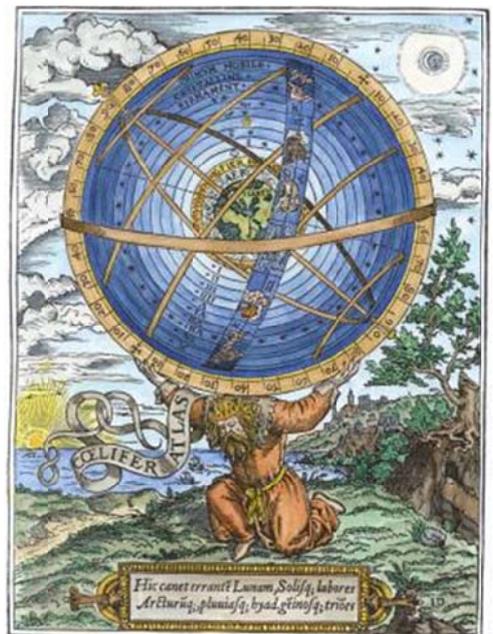
蘇惠玉

台北市立西松高中

古希臘的宇宙天文觀

自古幾何學的發展就源自於人類對量天與測地的需求。尤其是對天的研究，因為人類對曆法的需求，必須確定四季、節氣之分，與日蝕、月蝕之時間等等問題，無論在哪個地域文明與年代，天文學都是當時當地的顯學之一。古文明的巴比倫人能從簡單的觀測中發現像是日昇、日落，月亮的變化還有四季之分；不過即使是古希臘文明泰斗的畢氏學派，也只能用一些簡單的算術與代數來計算與研究這些觀測結果，並沒有建立一個能將各種天文現象結合在一起的模型，直到柏拉圖學派天文學的研究才有些微的進展。

在此之前，先說明一下古希臘人的宇宙天文觀。當時普遍認為宇宙是由兩個同心球體構成的，一個是位居中心的地球，另一個是恆星附著其上的天球。在他們的觀點裡，地球是靜止不動的，他們堅持的理由是因為他們「看到」從高塔上丟一顆石頭下來，石頭垂直落下，而不是掉在塔的西邊；如果地球在動，我們看到天上的飛鳥應該是倒退著飛的，可是並沒有這種現象，因此地球是靜止的（他們那時候還沒有石頭、飛鳥等會跟著動的慣性定律觀念）！在這種根深蒂固的前提下，他們認為天上星體的運動就是天球帶著這些星體繞著地球轉動所引起的，天球上除了固定不動的恆星之外，還有鬆散連結在



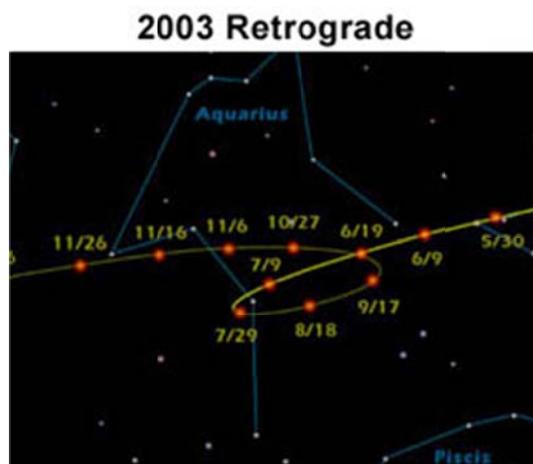
圖一：William Cuninghame 的木刻版畫 *The cosmographical glasse*, 1559，描繪大力神亞特拉斯 (Atlas) 撐起整個宇宙，這個宇宙觀從西元前 3 世紀一直延續到 17 世紀。

天球上的「漫遊星」，也就是行星。行星的英文 planet 這個單字，來自希臘字 *planetes*，原本的意思就是漫遊。當時認為的有七大行星：日、月、金星、水星、木星、火星與土星。從地球上看到這些行星的運動與測量它們的位置，看的是這些行星在天球上的投影，利用投影與恆星的相對位置來決定觀測值。此篇以下所提皆為在天球上的投影。

當時經由觀測已經知道太陽的軌道並不跟天球的赤道重合，而是有個夾角。他們將太陽軌道所在的平面稱為黃道面（*ecliptic plane*），將上面的恆星位置分成十二的星座，即我們所熟知的魔蠍、水瓶、牡羊、雙魚等等的十二星座，稱為黃道帶，太陽軌道通過黃道帶，稱為黃道。太陽軌道與天球赤道的交點為春分與秋分點，而黃道與天球的交點即為夏至與冬至（見右圖一）。

這種想法繼續藉著亞里斯多德（*Aristotle, 384 BC - 322 BC*）結合形上學與物理學的理論而鞏固。亞里斯多德認為整個宇宙由月亮分成兩個截然不同的區域，月亮上面的天界是純粹不朽，永恆不變的，因此那些行星的運動是完美物體的自然運動，即是周而復始，永不改變速率的等速圓周運動。同時他還認為有一種隱藏在恆星背後的原動力來引起這種圓周運動。而人類生存的地球是多樣與變動的，所有的物質變化與運動都有其「目的」，是朝上飛還是往下落，而人類追求的最終目的就是性靈的提升，提升到眾神所在永恆不變的天界中。亞里斯多德的這種同時兼顧到心靈與現實的理論，在宗教威權的加持下變得不容挑戰，一直主宰著天文學的觀點長達數百年。

柏拉圖（*Plato, 427 BC - 347 BC*）在許多觀點上皆與亞里斯多德不同。他承襲畢氏學派的看法，認為只有通過數學才能理解現實世界與超越自然存在的理想化世界。他主張我們不必理會可見天空的各種變化，真正的天文學是研究數學天空中真實星體的運動定律，即以數學來「整理外觀」。在辛普利修斯（*Simplicius of Cilicia, 約 490 – 約 560*）的《評亞里斯多德的《論天體（*On Aristotle, On the Heavens*）》中，藉由柏拉圖之口，向希臘時期的天文研究提出一個挑戰：「應該假定行星是作什麼樣的等速且規律的圓周運動，才能使這些星球所呈現與被觀察所得的運動得以保持？」當時的天文觀測的最大的問題就是行星逆行問題。所謂行星逆行現象即是在地球的觀測者看到行星的運動方向有一段時間會由順行改向逆行，然後再回到順行的現象，如下圖二為火星在 2003 年出現的逆行現象。首先回應這個問題的是他的學生歐多克斯。

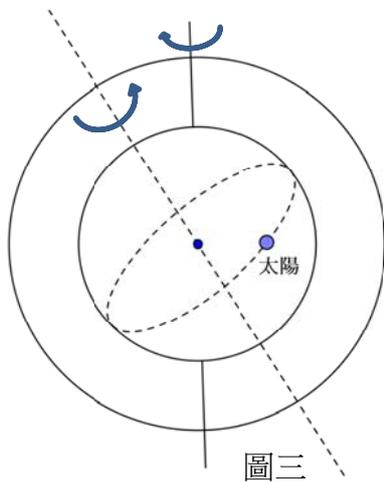


圖二，圖片來源： NASA/JPL-Caltech：

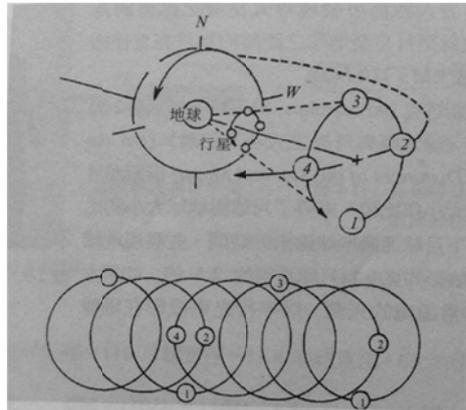
<http://mars.jpl.nasa.gov/allaboutmars/nightsky/retrograde/>

托勒密之前的天體模型

歐多克斯 (Eudoxus of Cnidus, 408 BC - 355 BC) 對行星逆行的解決方法由亞里斯多德與辛普利丘保存下來。他對原本的 2 球模型做了許多修改，不過仍然謹守柏拉圖的要求，只用圓周運動。在他的模型中，所有天體被放在一組互相關聯的球的球面上，以地球為中心，但是各自繞不同的軸旋轉，由於這些軸互相牽制的結果，就產生了由地球上觀測所看到的行星逆行。例如他以二個球來說明太陽的運動，如下圖三，太陽在內球，旋轉軸與外球夾 α 角，外球繞中心軸旋轉，兩球旋轉運動的疊加就形成了我們觀察到的太陽運動。如果要解釋行星逆行，在歐多克斯的模型中則需要用到 4 個同心球。在《千古之謎—幾何、天文與物理學二千年》這本書中，簡單清楚地以圖例的方式說明了歐多克斯模型的運作方式，見下圖四。儘管如此，歐多克斯認為這些球只是用來輔助計算的模型而已，並不是實實在在的實體，並不能解釋所有觀察到的自然現象，例如在模型中所有星體與地球的距離固定，因此無法解釋為何行星在逆行時會顯得特別明亮。

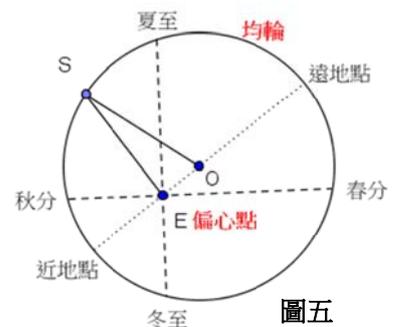


圖三



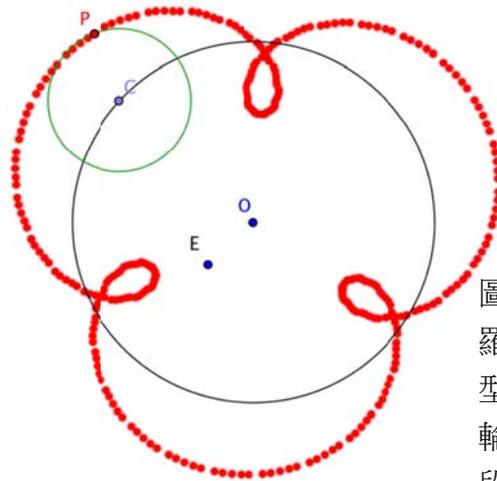
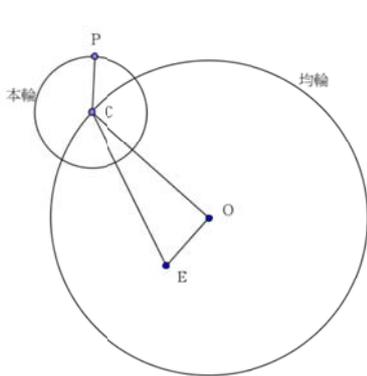
圖四

約在歐多克斯後的 150 年，阿波羅尼斯 (Apollonius of Perga, 約 262 BC - 約 190 BC) 試著對柏拉圖的那個問題提出新的解決方案。雖然我們對阿波羅尼斯的瞭解僅侷限在他對圓錐曲線方面的輝煌成就，然而他在天體運行模型方面提出的理論，確實影響了後世的天文學家。早在巴比倫人的時代，人們經由簡單的觀測就已經知道一年四季的四個節點春分、秋分、夏至與冬至間的時間並不等長，歐多克斯以地球為中心的等速圓周運動並沒辦法解答這個問題，以及上述所提行星逆行時的亮度問題。阿波羅尼斯提出的解決方案就是在圓周運動中加入偏心點的觀念。他把行星繞地球運行的軌道稱為均輪，其圓心在距地球一段固定距離的地方，如右圖五為太陽的運行軌道，由圖就可簡單看出由春分到夏至的時間，與由夏至至秋分的時間長短並不相同。要運用這個模型首先要知道 \overline{OE} 或 \overline{OE} 與 \overline{OS} 的比值，那麼就需要觀測太陽每日的位置，並解三角形以求得 $\angle OES$ 的度數。事實上三角學就是由此得到發展的契機。



圖五

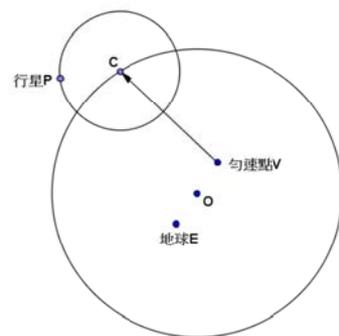
除了偏心點這個模型之外，阿波羅尼斯還發現亦可由另一個幾何模型來解釋行星運動，即是行星運行本輪的概念。他將行星設想在一個稱為本輪的小圓上運動，這個小圓的圓心沿著原本以地球為中心的圓作圓周運動。亦即本輪的圓心繞地球一周時，行星同時也在自轉。阿波羅尼斯發現如果將這兩種模式結合在一起，將可解釋更複雜的行星運動，如下圖六，行星 P 在以 C 為圓心的本輪上運動，而 C 繞著以 O 為中心的均輪旋轉，O 在距離地球 E 一固定距離的地方，如果 OE 距離恰當，且本輪的半徑與行星運行速度也適合時，將可用來解釋行星的逆行運動。如果能夠確定各個所需參數值，例如 PC 與 OE 的長度與角度，就可由三角學求出該行星在任一時刻的位置。



圖六：以 GeoGebra 模擬阿波羅尼斯的偏心點與本輪模型，此圖行星運行的速度為本輪速度的 3 倍，可以看出在某段時間行星運行的方向從順行到逆行再到順行。

托勒密的本輪勻速點模型

雖然阿波羅尼斯這個簡單的模型看起來好像可以解釋行星逆行，然而事情並不是這麼簡單滴！行星逆行並不是單一弧形或單一不規則軌跡，也沒有足夠的觀測數據來做檢測或修正與推廣。因此之後有一段時間，有天文或數學家例如希帕克斯（Hipparchus of Rhodes, 190 BC - 120 BC）鼓吹天文研究應轉向有系統地收集及執行觀測。在問題還沒完全解決的情況下，托勒密（Claudius Ptolemy, 約 85 - 約 165）辛苦地進行了 14 年的實地觀測，以及花費大把時間做枯燥的大量計算，最後將他畢生對天文學的研究寫成《大成（Almagest）》一書。這本書完整地包含了當時希臘人對宇宙的模型和描述，他將之前有關天文學的知識成果彙集在這一本書中，可以說是希臘天文學集大成之作。在這本托勒密的最早期作品中，他詳細地陳述了想要描述太陽、月亮以及其他行星運行時所需的數學原理，利用這些數學原理與觀測值做出正弦表、恆星表。在托勒密的行星運行模型中，最主要的觀念就是偏心勻速點（equant）的引入。他修正歐多克斯與阿波羅尼斯的偏心點與本輪模型，如圖七，行星 P 在以 C 為中心的本輪上作圓周運動，C 在以 O 為圓心的均輪上運動，使得向徑 \overline{VC} 則以勻速點 V 為中心以固定角度變化作等速率圓周運動，地球則在圓心另一邊。



圖七

托勒密以數學的精確性來呈現這一套系統，而非物理原因，藉由數學嚴密的幾何與代數運算讓他這套系統免於受人質疑，再加上可以藉由不斷增加的本輪或是修改勻速點，讓這套系統符合實地觀測值。因為「正確」，加上地心說與完美永恆的圓周運動符合當時形上學與宗教權威所倡導的一切學說，因此直到克卜勒(Johannes Kepler, 1571 - 1630)之前，前後總共十三個世紀，托勒密的天體運行模型主導了整個天文學的研究領域，後世的天文學家們僅做一些技術上的修正，或是增加圓的個數而已。譬如對三角學發展有卓越貢獻的雷喬蒙塔努斯(Regiomontanus, Johannes Müller von Königsberg, 早期翻譯作玉山若干)於1472年出版他的老師佩爾巴赫(Georg von Peurbach, 1423-1461)天文學課程的講義《新行星理論(*Theoricae Novae Planetarum*)》，在此書中解釋了托勒密這套偏心勻速點與本輪的模型，成為當時大學天文學課程最受歡迎的教科書，下圖八左為此書1534年出版的一個版本中的圖。雷喬蒙塔努斯在他老師忽然逝世之後，接手老師的工作，出版有關托勒密《大成》這本書的翻譯工作，於1496年出版《托勒密大成之概要(*Epitome of Ptolemy's Almagest*)》一書，下圖八之右為此書的扉頁插圖，在畫的左邊為托勒密，正讀著《大成》這一本書，右邊即為雷喬蒙塔努斯，認真聽著托勒密的講解，並指向托勒密作品中所描述的井然有序的的天體模型。這本書同樣暢銷且影響深遠，哥白尼與克卜勒對托勒密體系的理解皆出自此書。



圖八

托勒密的天文體系是個龐大、複雜的系統，為了計算月亮、太陽及五大行星的運動，就必須引進 77 個圓才行。儘管如此，在經過幾個世紀之後，許多原本可以忽略的小誤差經過幾百年的累積後變得不容忽視了。譬如在月球理論中需要對觀測值做遠超過實際所需的修正以及地月距離的誤差；對於行星位置或日月蝕的預測出現了大誤差，使得航海技術沒有精確的天文星表以供依據；甚至對於春分日期的推算到 16 世紀初時已整整誤差了 10 天，迫使天主教會不得不推行曆法的改革。然而當時的天文學家大都因為沒有完善的天文觀測環境與缺乏精確的數學基礎而拒絕，其中之一就是哥白尼。我們將在

下一篇中再來詳細看看哥白尼與克卜勒天體理論中的故事。

參考文獻：

Katz, V. (1998), *A History of Mathematics: An Introduction (2 edition)*. Boston: Pearson Education, Inc.

Ptolemy's *Almagest*, in *Greek Mathematics Volume II: From Aristarchus to Pappus*, with an English translation by Ivor Thomas. Cambridge: Harvard University Press.

Ptolemy's *Almagest*, in *Great Books of The Western World Volume 15*, translated by R. Catesby Taliaferro. Chicago: Encyclopaedia Britannica, INC.

Ptolemy's *Almagest*, translated by G. J. Toomer (1984), London: Gerald Duckworth & Co. Ltd.

項武義、張海潮、姚珩 (2010), 《千古之謎—幾何、天文與物理兩千年》。台北：商務印書館。

張海潮、沈貽婷 (2015), 《古代天文學中的幾何方法》。台北：三民出版社。

霍金編/導讀 (2004), 張卜天等譯, 《站在巨人肩上》。台北：大塊文化。

Kline, M. (1995), 《西方文化中的數學》。台北：九章出版社。

The biography of Claudius Ptolemy, article by J J O'Connor and E F Robertson,
<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Ptolemy.html>

1. 為節省影印成本，本通訊將減少紙版的發行，請讀者盡量改訂 PDF 電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail 至 suhy1022@gmail.com
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請 e-mail 至 suhy1022@gmail.com
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/hpmlatter.htm>

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。懇請各位老師惠賜高見！

推薦賴以威的《超展開數學教室》

洪萬生

台灣師範大學數學系退休教授

書名：超展開數學教室

作者：賴以威

繪圖：NIN

出版社：臉譜出版社，台北市

出版年：2015

出版資料：平裝本，285 頁

國際書碼：ISBN 978-986-235-4346



這是一本頗有創意的數學普及作品。作者賴以威運用小說敘事來引進數學概念/理論及其應用，是一項頗具膽識的書寫挑戰，同時，作者所運用的語言及其表情，也總是洋溢著青春與「直白」風格，對於年輕的讀者一定有著極大的吸引力，非常值得推崇與肯定。

本書除了〈尾聲：超展開數學教室〉番外篇之外，共有二十四篇，分成三大部份。第一部份標題是「不上數學的數學課」，共有 10 篇；第二部份標題是「你想對數學說什麼」，共有 8 篇，至於第三部份，則有 6 篇，標題是「用數學搶救老師大作戰」。

作者賴以威所據以敘事的數學主題，多半有關高中數學(含統計)、離散數學(discrete mathematics)，以及優選(或最佳化)理論(optimization theory)。作者在每一篇最後都添加了一個專欄「可以聽我再說一些話嗎？」，補充說明該篇相關的數學理論或概念，比如說，第 1 章是「最佳化問題」、第 5 章是「數列」、第 10 章是「排隊理論」、第 14 章是「統計」、第 20 章是「樹狀圖」等等。不過，作者最鍾愛的題材，則主要是優選(最佳化)理論的應用。

此外，在每一篇的前面，漫畫家 NIN 也應邀繪製了一頁的漫畫。這些漫畫通常是將各篇一開頭的幾段對話，以漫畫再呈現一次，顯然意在吸引漫畫世代的讀者之閱讀興趣。還有，為了將本書的六位角色(一位老師+五位學生)帶出場，作者也運用漫畫來進行「人物介紹」，再加上六頁有關這位老師的成長背景，以及他所面臨的課輔班數學代課老師之處境。

正如前述，在本書所運用的六個角色中，除了教師雲方之外，還有五位學生：班對欣好與積木(富家之子)、阿叉(籃球校隊隊員)、商商(擅長文科，簡直像個活字典)，以及數學天才孝和。孝和在課輔班現身，看起來是一件很奇怪的安排，不過，反正他愛蹺課，到處「插花」，所以，作者對此一角色的安排與設定，也不見得就是那麼突兀。

另一方面，此一天才學生需要「一位擁有數學腦的數學狂熱份子」雲方老師，在情節上才會顯得平衡。雲方「喜歡將一切事物都用數學語言表示。在他眼裡，方程式不只出現在考卷跟習題中，每道式子就是一句話，是為了描述某個現象而存在。兩天時，他會算出最佳撐傘方式；如果有女生問他怎樣穿搭最美，他會認真利用黃金比例幫對方計算；他甚至以為要是在展望台上跟女孩子聊『假如展望台高 250 公尺，我可以看到 56

公里以外的景色噢」，女孩子就會因此傾心於他。」

除了雲方 vs. 孝和的「對決」之外，本書情節的張力也來自「最喜歡數學的老師 vs. 最不喜歡數學的學生，這是場矛與盾的對決。」不過，學生除了在每章一開始抗拒數學之外，被雲方老師帶入教學脈絡之中，好像對數學知識的如何呈現都沒有激出太多火花，進而透過「對話」的機會，讓課堂的（數學）討論空間變得更加活絡。這種現象顯然由於各篇主題單元缺乏（連貫的）結構所致，因此，後篇的故事情節，也就無法呼應前篇所引進的數學知識。總之，由於單元選擇的考量，作者甚少交互引用相關數學知識，誠然是美中不足。

基於上一段的評論，作者與讀者應該都同意我的前提，那就是：我將本書視為一本數學小說。一旦歸類為數學小說（mathematical fiction），那麼，敘事情節（plot）就必須同時兼顧小說角色（character）之設定與數學知識活動的特性，如此，讀者閱讀時只要移情投射到某位角色，就會不知不覺地跟著做數學，從而數學小說也發揮了數學普及作品的功能。

總之，我對本書的編寫有如下建議，謹供作者與讀者參考借鏡。

首先，就各章本身內容而言，作者未曾讓各個角色有較多的討論甚至彼此詰問的空間，這使得一些數學知識的出現或呈現，變成比較單向的說明，而無法豐富故事的情節。不過，這涉及角色的設定，因為除了孝和之外，其餘四位學生好像都不會隨時引發與數學有關的好奇心，尤其是商商，她的「一般」好奇心未曾積極介入，徒然錯失了她這一股帶動情節的力量，實在有一點可惜。

還有，由於本書的敘事主題是課輔班菜鳥教師，如何陪伴這些學生挨過每天的第八節課，儘管有期末教師的續聘評鑑張力，雲方也只能隨興地尋找數學話題切入，而無法有系統地組織課輔數學的內容結構。這在一方面，當然讓讀者看不到學生的課業是否越來越「進步」，另一方面，這也使得作者在敘事時，缺少了數學知識結構的邏輯必然驅力，使得小說情節與數學知識的結合，比較無法發揮數學小說的敘事功能，也令人不無遺憾。此外，各章專欄「可以聽我再說一些話嗎？」的內容可以再補充加強，尤其涉及各該章敘事情節時，更應多加解說，提醒讀者注意其脈絡意義，從而有助於他們理解這些概念及其應用。

其實，作者可以將本書之主題限定為 — 比如說 — 最佳化理論及其相關之應用，在內容的深度上循序漸進地安排，如此，以作者在最佳化理論方面的深刻涵養，相信他一定可以在小說敘事與數學普及關懷之間，找到更容易操作的平衡點。

再次，本書賣點是數學應用，作者別出心裁，尤其設計了蠻多極富創意的例子，令人欽佩與感動 — 我尤其喜歡第一篇有關司乃爾折射定律之應用。不過，數學讓吾人卸下心防，吸引吾人興致盎然地參與其知識活動，乃是因為它也可以是令人好奇的遊戲（game）— 數學魔術之風行，就是最佳例證。因此，除了數學的「有用面向」之外，如果科普作家也能納入它的「有趣面向」，那麼，它所能吸引的讀者群，當更為全面才是。

最後，有關本書的編輯，我總覺得頁面清爽不足，其中數學式子或圖形以人工書寫或繪製當然無妨，不過，頁面的配置如能推敲出一個更賞心悅目的比例，讀者如我想必會更加喜愛才是。