HPM通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系退休教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）
助理編輯：黃俊瑋（和平高中）
編輯小組：蘇意雯（台北市立教育大學）蘇俊鴻（北一女中）
葉吉海（陽明高中）陳彥宏（成功高中）
王文珮（青溪國中）
英家銘（台北醫學大學）
創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng

第十九卷 第十期 目錄（2016年10月）

機率論發展的第二樂章

蘇惠玉
台北市立西松高中

一、問題的承接：期望值

筆者在之前的文章〈機率初步〉（請參考＜翰林我的網 **http://www.worldone.com.tw/index.do**＞）中，提到了在機率發展之初，數學家們從休閒娛樂與賭博遊戲去摸索機率的意義。其中最先的突破來自於巴斯卡（**Blaise Pascal, 1623–1662**）與費馬（**Pierre de Fermat, 1601–1665**），他們為了解決迪默勒提出的問題，藉由書信往來討論得到一點進展。在 **1652** 前後，法國貴族安東尼‧哥保德‧迪‧默勒（**Antoine Gombaud, Chevalier de Méré , 1607 – 1684**）爵士寫信給巴斯卡，提出了兩個問題：

(1) 骰子問題（**Problem of Dice**）：兩枚骰子要擲多少次才能使出現兩個 **6** 點的機率不小於 **50%?**
（**2**）點數問題（**Problem of Points**）：在賭博被打斷時如何公正地分配賭注。

其中第二個問題事實上就是期望值的問題。巴斯卡為了研究這個問題的通解，進一步寫了《論算術三角》（*Treatise on the Arithmetical Triangle*）這一篇論文，應用這個算術三角形，或是我們稱的巴斯卡三角形，他得到這個問題的一般解法：

> 假設第一人缺 **r** 分後獲勝，第二人缺 **s** 分後獲勝，其中 **r, s** 不小於 **1**，如果整場比賽就此停止，賭注的分配應為第一人得到全部賭金的比例為 $\sum_{k=0}^{s-1} C_k^n : 2^n$，此時 **n=r+s-1**，為剩餘局數的最大值。

舉例來說，假設問題數據為：「**A**、**B** 兩人每人各出 **32** 個金幣為賭注，約定先贏 **3** 分者

勝，若 A 已先得 1 分，B 得 0 分的時候比賽中斷無法繼續，應如何分配賭注才公平？」在所有共 2^4=16 種的結果中，A 獲勝共有 $C_0^4+C_1^4+C_2^4$=11 種，因此 A 應獲得全部賭金的比例為 11：16 來分配，也就是說 A 獲得賭金的期望值為 $\frac{11}{16}$×64=44 個金幣。事實上 A、B 獲勝的所有情形，可以 $(A+B)^4$ 的二項展開式來看所有 A 或 B 獲勝的情形。

巴斯卡這種以某種形式來計算一個特定事件之價值的概念，成為後續數學家研究機率論的基礎。1655 年，荷蘭數學家以及笛卡兒的朋友海更斯（Christiaan Huygens, 1629 – 1695）第一次造訪巴黎，在這趟旅程中，他讀到了巴斯卡與費馬關於機率方面的討論與作品，開始對機率產生興趣，並於 1657 年出版《論機率博弈的計算》（*De Ratiociniis in Ludo Aleae*）一書，成了有系統地論述機率這個主題的第一本出版作品。這本書輕薄短小，僅有 14 個命題與 5 個給讀者的練習題，命題中包含了對迪默勒兩個問題的解法與解法背後理論的詳細說明。他把巴斯卡與費馬的想法綜合起來，並延伸到 3 人或更多玩家的情形。海更斯的策略徑路雖然也是從每個結果「出現機會均等」的概念出發，不過，他的核心工具不是我們現在有的機率概念，而是「預期結果」這個期望值的想法。他在計算像賭博這種牽涉到機率的遊戲時，正式提出期望值的概念：

> **雖然在一個純粹的機會遊戲中，結果是不確定的，但是一位玩家贏或輸的機會取決於一個特定的值。**

用現代的術語來說，這個特定的值就是期望值，也就是，一個人如果進行許多次賭博遊戲，他可以贏得的平均賭金。

海更斯在這本書的第一命題就是：「能以相等機會贏得 a 或 b 的量對我的價值就是 $\frac{a+b}{2}$」。讓我們以現代術語解釋他對這個命題的證明。因為機會均等，如果第一人贏，他得到 a，如果對手贏，他得到 b，因為這個博弈要公平，因此，這個機會的「價值」就是 $\frac{1}{2}\times a+\frac{1}{2}\times b=\frac{a+b}{2}$。海更斯在第 3 命題中將這個概念推廣到一般情形：

有 p 次機會贏得 a，有 q 次機會贏得 b，機會都是同樣的，對我的價值是 $\frac{pa+qb}{p+q}$。

也就是說，在共玩了 p+q 次情形下，贏得 a 的機率為 $\frac{p}{p+q}$，贏得 b 的機率為 $\frac{q}{p+q}$，因此，期望值為 $\frac{p}{p+q}\times a+\frac{q}{p+q}\times b=\frac{pa+qb}{p+q}$。在證明時，海更斯透過類比，將此問題類比於 p+q 個人排成一個圓圈參與這個博奕遊戲，每個人投入相同的賭金 x，並且每人獲勝的機會相等。如果一個確定的玩家獲勝，他將全部賭金分給左邊的 q−1 人每人 b，右邊的 p 人每人 a，剩下的自己保留，因為自己保留的餘額要等於 b，即

$(p+q)x-(q-1)b+pa=b$，因此 $x=\dfrac{pa+qb}{p+q}$，亦即這個機會的「價值」為 $\dfrac{pa+qb}{p+q}$。

在海更斯的書中有一點基本信念屹立不搖，他認為每個公平博弈的玩家只願意拿出經過計算的公平賭金，也就是期望值來冒險，而不願意出更多的賭金。不過，每個人願意為一個賭博的機會付出多少代價並不一定，例如買樂透，很多人雖然明知中獎的期望值遠低於買一張彩卷的價錢，他們還是買了，為的就是中頭彩的那點微乎其微的期望。人類的期望與慾念又該怎麼衡量計算？

二、焦點的轉變：觀察次數

迪默勒的第一個問題為：「兩枚骰子要擲多少次才能使出現兩個 **6** 點的機率不小於 **50%?**」這個問題將機率論研究的焦點轉向試驗次數。雖然在海更斯的這本書中，針對這個問題，他曾分析與給出比巴斯卡更一般的一種解法。他將問題轉換成以期望值的概念來回答，亦即「兩枚骰子要擲多少次，才能使一個人在那麼多次投擲中出現兩個 **6** 點時可以贏得 **a** 而願意出 $\frac{1}{2}a$？」接著他計算了分別投擲 **1** 次、**2** 次、**4** 次、**8** 次、**16** 次、**24** 次與 **25** 次，結果表明到 **24** 次時玩家賭 $\frac{1}{2}a$ 稍微不利，而投擲 **25** 次時玩家又占了便宜，亦即投擲的次數至少要 **25** 次，才能使兩枚骰子都出現 **6** 的機率超過 $\frac{1}{2}$。海更斯的這本著作一直到 **18** 世紀初期，都是機率論的唯一入門教材。以此為基礎，**1713** 年，瑞士數學家伯努利（**Jacob Bernoulli, 1654 – 1705**）死後 **8** 年，他的《猜度術》（***Ars Conjectandi***）一書終於出版，機率的研究進路開始慢慢地轉變了。

在早期由博奕遊戲中發展出來的機率論，數學家們以某種有效的途徑來計算機率與期望值，以決定遊戲的勝負。這些機率是先於經驗（***apriori***）而確定的。因為一顆骰子有六個面，假設材質均勻，數學上正六面體的幾何性質告訴我們，不管在骰子投擲的過程或是形狀上，沒有哪一面特別有利或不利出現，因此，每一面正面朝上的機會相等，亦即機率為 $\frac{1}{6}$。但是事實上，我們在投擲骰子的過程中，可能 **300** 次裡 **6** 點出現 **30** 次或 **80** 次並不一定，那麼，我們要投擲多少次才能確保時觀察的結果「足夠接近」$\frac{1}{6}$？再者，在很多實際問題中，影響事件出現的因素並不是那麼單一或者是單純地「機會均等」。尤其在 **18** 世紀法國大革命以及 **19** 世紀的工業革命之後，人類社會變得複雜了，許多問題因應而生，像是國家財政、人口與醫療問題、保險、工業製程等等，需要快速有效地解決。然而，影響這些事情的因素太過複雜，譬如，我們怎麼確定該為一份保單支付多少保險費用才合理？海更斯的期望值概念告訴我們，期望值應該等於機率×報酬，但是，要是牽涉到複雜的人類社會行為之機率，又該如何衡量？這個時候只能從容易收集的觀察結果著手。

身為著名數學家族成員之一的雅各·伯努利曾出版多篇關於機率的論文，在他多年的研究中，他試圖在無法列舉出所有可能情形下量化風險。他開始提議，從許多次相同情形下的觀察所得結果來推算機率，用句心理學的行話來說，就是「後驗」(***posteriori***）地計算機率。「觀察特定情形的次數越多，就越能更好地預測未來」，這是我們都知道的常識，但是如何數學地證明它？伯努利在他臨終前終於給出證明，他不僅說明了隨著觀察次數的增加，可以使我們在任意誤差範圍內，估算事件的實際機率，還說明了如何準確地計算出確保估算結果在真實機率附近的一個給定區間 -- 以現代的術語來說就是信賴區間 – 內的觀察次數。這個方法被收入在《猜度術》的最後一卷第四卷中，它就是我們熟知的伯努利版本的大數法則（**law of large numbers**）。

《猜度術》的第四卷名為「論機率原則在政治、倫理與經濟學的應用」(**On the use and applications of the doctrine in politics, Ethics, and Economics**)，伯努利在機率論研究裡引入「合乎道德的必然性」(**moral certainty**)，亦即近乎確定會發生的這一概念。他規定如果事件發生的機率不小於 **0.999**，那這個事件就是近乎必然發生。伯努利的目標就是想要知道需觀察多少次，才能得到觀察所得機率之近乎必然性。伯努利版本的大數法則是這樣的：

假設在一般情形下，N 次觀察中有 X 次成功，$p=\frac{r}{r+s}$ 為事件真正的成功率，給定一個任意小的正分數 ε，和一個任意大的正數 c，總能找到整數 N（根據 c 而得），使得 $\frac{X}{N}$ 與 p 的差距不超過 ε 的機率，比該差距大於 ε 的機率乘以 c 還要大，即

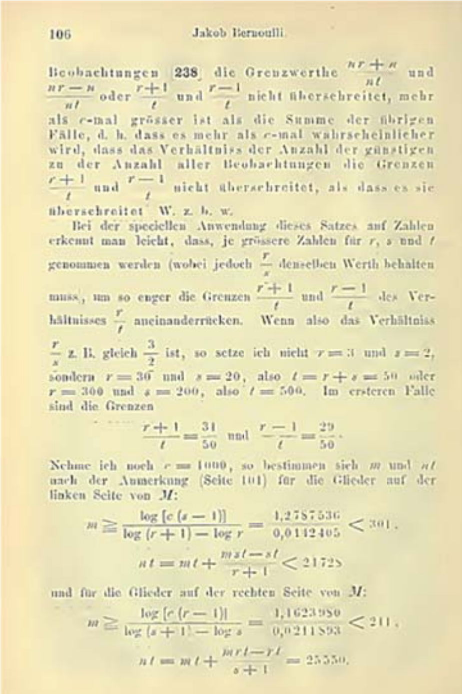
$$P(|\frac{X}{N}-p|\le\varepsilon)>c\cdot P(|\frac{X}{N}-p|>\varepsilon)$$

換句話說，觀察所得機率 $\frac{X}{N}$ 與真正機率 **p** 接近的機率，遠遠大於不接近的機率。一般我們會將伯努利的這個式子改寫成：

對任意給定的一個很小的正數 ε 與任意大的正數 c，存在正整數 N 使得

$$P(|\frac{X}{N}-p|>\varepsilon)<\frac{1}{c+1}$$

這個式子牽涉到 $(r+s)^N$ 展開式中某些項的和，伯努利詳細地分析二項展開式中的每一項，不僅找到證明方式，也確定了 **N** 的找法。我們略去細節不談，直接跳到結論。在伯努利自己的例子中，當 **r=30**，**s=20** 時（例如籃子中有 **30** 個白球，**20** 個紅球，觀察取到白球的次數），對於 ***c*=1000**（至少要使得差距很微小時的機率小於 **0.001**），所決定的最小 **N** 為 **25550**。



106 Jakob Bernoulli.

Beobachtungen [238] die Grenzwerthe $\frac{nr+n}{nt}$ und $\frac{nr-n}{nt}$ oder $\frac{r+1}{t}$ und $\frac{r-1}{t}$ nicht überschreitet, mehr als c-mal grösser ist als die Summe der übrigen Fälle, d. h. dass es mehr als c-mal wahrscheinlicher wird, dass das Verhältniss der Anzahl der günstigen zu der Anzahl aller Beobachtungen die Grenzen $\frac{r+1}{t}$ und $\frac{r-1}{t}$ nicht überschreitet, als dass es sie überschreitet. W. z. b. w.

Bei der speciellen Anwendung dieses Satzes auf Zahlen erkennt man leicht, dass, je grössere Zahlen für r, s und t genommen werden (wobei jedoch $\frac{r}{s}$ denselben Werth behalten muss), um so enger die Grenzen $\frac{r+1}{t}$ und $\frac{r-1}{t}$ des Verhältnisses $\frac{r}{t}$ aneinanderrücken. Wenn also das Verhältniss $\frac{r}{s}$ z. B. gleich $\frac{3}{2}$ ist, so setze ich nicht $r=3$ und $s=2$, sondern $r=30$ und $s=20$, also $t=r+s=50$ oder $r=300$ und $s=200$, also $t=500$. Im ersteren Falle sind die Grenzen

$$\frac{r+1}{t}=\frac{31}{50} \text{ und } \frac{r-1}{t}=\frac{29}{50}.$$

Nehme ich noch $c=1000$, so bestimmen sich m und nt nach der Anmerkung (Seite 101) für die Glieder auf der linken Seite von M:

$$m \geqq \frac{\log[c(s-1)]}{\log(r+1)-\log r}=\frac{1,2787536}{0,0142405}<301,$$

$$nt=mt+\frac{mst-st}{r+1}<24728$$

und für die Glieder auf der rechten Seite von M:

$$m \geqq \frac{\log[c(r-1)]}{\log(s+1)-\log s}=\frac{1,4623980}{0,0211893}<211,$$

$$nt=mt+\frac{mrt-rt}{s+1}=25550.$$

伯努利《猜度術》書影，他利用兩組不等式決定出 N 的最小值。此為 1899 年出版的版本

「觀察次數不能小於 **25550**」，這個數字對當時的伯努利而言，幾乎是個天文數字，它甚至超過伯努利的故鄉瑞士巴賽爾（**Basel**）當時的人口總數，幾乎不可能完成。伯努利心理應該有感覺這個數字遠大於實際所需的數字，因此，他並沒有如標題所允諾的將政治或經濟學上的應用寫入書中，甚至直到臨終前也不肯將此書出版。儘管如此，這條由伯努利開啟的新的研究徑路，在當時整個社會環境的需求刺激下，將機率論研究的焦點，順利地轉移到利用觀察結果來估算機率，緊接著，就是棣美弗登場了。

三、知識的延拓：機率分佈曲線

棣美弗（**Abraham de Moivre, 1667 – 1754**）出生於法國巴黎近郊，於 **1688** 遷居英國，雖然曾被選入英國皇家學會，但是，他從未有機會在大學任教，只能靠當家庭教師，以及為賭徒或投機商人解決博奕遊戲或年金保險中的問題來謀生。他於 **1718** 年出版主要著作《機會學說》（***The Doctrine of Chances***），此書還於 **1738** 年及 **1756** 年兩度再版。棣美弗在本書中針對當時流行的各種賭博遊戲，給出數學化的一般法則，以及這些法則的應用。譬如，對於迪默勒的第一個問題，他就提出更一般性的問題與解法，出現在《機會學說》的第二部分的問題三：

> 在一次試驗中，假設某件事發生的機率是 a，不發生的機率是 b，試問需要做多少次試驗才能使該事件有可能發生，或者需要做多少次試驗才能確保事件發生與否沒有差別？

棣美弗在解法中假設 **x** 是所需的試驗次數，那麼，這個事件 **x** 次都不發生的機率為

$\frac{b^x}{(a+b)^x}$；因為要使發生與否沒有差別，亦即

$$\frac{b^x}{(a+b)^x}=\frac{1}{2}\text{，}(a+b)^x=2b^x\quad\text{，}(\frac{a+b}{b})^x=2$$

對兩邊取自然對數，[1]可得 $x=\frac{\ln 2}{\ln(a+b)-\ln b}$ 。棣美弗接著說，若 $a:b=1:q$ ，那麼，可將原來的方程式 $(\frac{a+b}{b})^x=2$ 改寫成 $(1+\frac{1}{q})^x=2$ ，取自然對數之後可得 $x\ln(1+\frac{1}{q})=\ln 2$ 。

當然在迪默勒的問題中，我們現在可以直接用數據代入來計算。**2** 顆骰子都擲出 **6** 點與其他情況的比是 **1∶35**，因此丟擲 **x** 次使兩顆都出現六點的機率為 $\frac{1}{2}$，即 $1-(\frac{35}{36})^x=\frac{1}{2}$，也就是 $(\frac{35}{36})^x=\frac{1}{2}$ ，接著我們就可兩邊直接取以 **10** 為底的常用對數後計算得出 **x**。但是棣美弗想要解決更一般的情形，在 **q** 未定的情形下，他只能藉著無窮級數（冪級數）將 $\ln(1+\frac{1}{q})$ 展開來計算它的值，即

$$\ln(1+\frac{1}{q})=\frac{1}{q}-\frac{1}{2q^2}+\frac{1}{3q^3}-\frac{1}{4q^4}+\ldots$$

接著他說：「如果 **q** 無限大，或是相比於 **1** 而言是個很大的數，那麼只要取展開式的第 **1** 項就夠了。」[2]故可得 $\frac{x}{q}=\ln 2$ **=0.693…**，取 $x=0.7q$ 。因此在迪默勒的問題中他只要簡單的取 **q=35**，即可得 **x=24.5** 次，因此若要使機率不小於 **50%**，至少要拋擲 **25** 次。這個簡潔算法得出的結果與海更斯繁雜的計算過程得到的完全相同。

棣美弗對機率研究的目標與伯努利相同，即想要藉由觀察結果或是試驗來估算事件的真正機率。他跟伯努利一樣清楚知道，計算機率的方法有賴於對二項展開係數的計算與研究。他於 **1773** 年寫下一篇有關二項展開式各項和的近似方法的論文，並收入於《機會學說》二、三版中。他說：

> **……在很多次的試驗下，事件發生的比率可能與真實應該要有的情況有所不同；假設事件發生與否的可能性相同，在 3000 次試驗之後，有可能成功 2000 次失敗 1000 次的情形不會發生，但是也有可能發生，因此一旦發生之後，他們與相等比例差異甚大的比率關係也應該被接受。因此從試驗中獲取結論的思維應該會更好一些。**[3]

在這個近似方法的論述過程中，他首次提到我們現在所謂的二項分布的常態近似這個概

---

[1] 自然對數為以 e=2.718….為底的對數，以 $\ln x$ 與常用對數作區別。
[2] 參考 1756 年版的《機會學說》P.37。
[3] 參考 1756 年版的《機會學說》P.242。

念。

假設事件發生與否的機會均等，棣美弗知道在 $(a+b)^n$ 中，當 $a=b=\frac{1}{2}$ 時，成功次數分別為 **0, 1, 2, …, k, …, n** 次的比率分別為 $C_k^n : 2^n$。當 **n** 為足夠大的偶數時，他先考慮中間項，即事件有 $m=\frac{n}{2}$ 次成功時的比率，藉由無窮級數與對數的運算，棣美弗知道二項展開中間項 **E** 與總和 2^n 的比值為 $\frac{2}{\sqrt{2\pi n}}$。接著，他再處理從中間項算起的第 **t** 項，再次利用無窮級數與對數運算，他得到

$$P(X=\frac{n}{2}+t) \approx P(x=\frac{n}{2})e^{-(\frac{2t^2}{n})} = \frac{2}{\sqrt{2\pi n}}e^{-(\frac{2t^2}{n})}$$

以 **t** 為變數，機率函數 $f(t)=P(X=\frac{n}{2}+t)=\frac{2}{\sqrt{2\pi n}}e^{-(\frac{2t^2}{n})}$ 的圖形會形成一條曲線，這條曲線會近似於我們現在所謂的常態分布曲線。

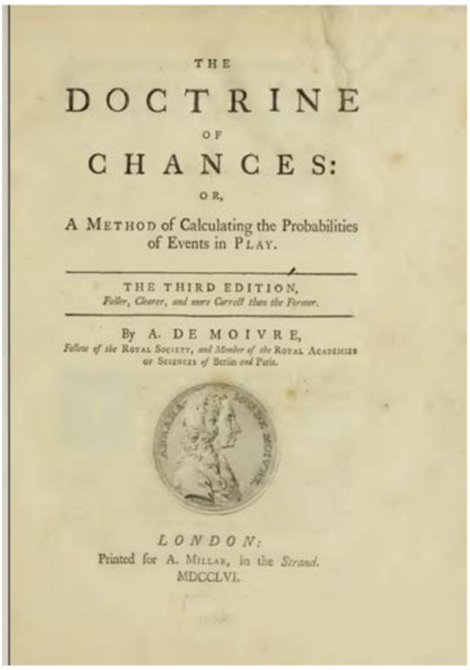
棣美弗接著改善伯努利對於觀測次數的計算方法。為了計算從中間項算起某段區間內的比率和，亦即計算 $\sum_{t=0}^{k} P(X=\frac{n}{2}+t)$ 的值，利用積分的技巧，他將其近似於 $\frac{2}{\sqrt{2\pi n}}\int_0^k e^{-\frac{2t^2}{n}}dt$，再由冪級數展開後逐項積分來估計這個值，他發現當 $k=\frac{1}{2}\sqrt{n}$ 時（這個值就是成功機率為 $\frac{1}{2}$ 的二項分布之標準差），展開的冪級數收斂速度相當快，得以讓他推知這個和近似於 **0.341344**，亦即發生頻率介於 $\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{n}$ 與 $\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{n}$ 的機率為 **0.682688**。他說：

> **為了將此方法應用到各個特殊的例子中，必須根據試驗次數的平方根來估計事件發生與否的頻率；這個平方根……將成為我們調控估計結果的模數（modulus）。**[4]

接著，他將自己的方法推廣到更一般的情形：近似計算 $(a+b)^n$ 展開式中的各項係數，其中 $a \neq b$，亦即發生與否不均等的情形。利用這個方法，他可以計算出在伯努利要試驗 **25550** 次的例子裡，用他的方法僅需 **6498** 次即可。

---

[4] 參考 1756 年版的《機會學說》頁 248。

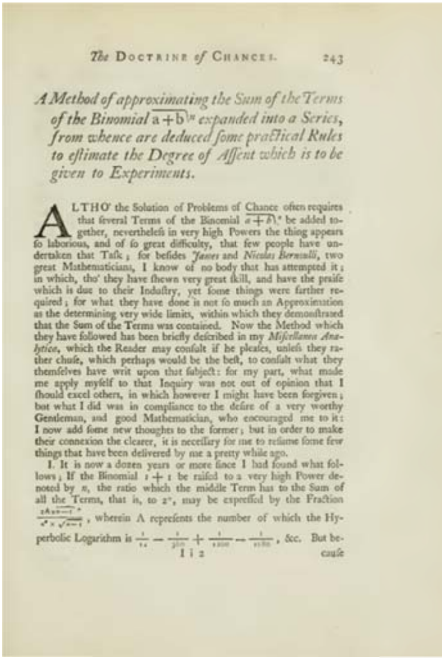


THE
DOCTRINE
OF
CHANCES:
OR,
A METHOD of Calculating the Probabilities of Events in PLAY.

THE THIRD EDITION,
Fuller, Clearer, and more Correct than the Former.

By A. DE MOIVRE,
Fellow of the ROYAL SOCIETY, *and Member of the* ROYAL ACADEMIES OF SCIENCES *of Berlin and Paris.*

LONDON:
Printed for A. MILLAR, in the *Strand.*
MDCCLVI.



The DOCTRINE *of* CHANCES. 243

A Method of approximating the Sum of the Terms of the Binomial $\overline{a+b}|^n$ expanded into a Series, from whence are deduced some practical Rules to eſtimate the Degree of Aſſent which is to be given to Experiments.

ALTHO' the Solution of Problems of Chance often requires that ſeveral Terms of the Binomial $\overline{a+b}|^n$ be added together, nevertheleſs in very high Powers the thing appears ſo laborious, and of ſo great difficulty, that few people have undertaken that Taſk; for beſides *James* and *Nicolas Bernoulli*, two great Mathematicians, I know of no body that has attempted it; in which, tho' they have ſhewn very great ſkill, and have the praiſe which is due to their Induſtry, yet ſome things were farther required; for what they have done is not ſo much an Approximation as the determining very wide limits, within which they demonſtrated that the Sum of the Terms was contained. Now the Method which they have followed has been briefly deſcribed in my *Miſcellanea Analytica*, which the Reader may conſult if he pleaſes, unleſs they rather chuſe, which perhaps would be the beſt, to conſult what they themſelves have writ upon that ſubject: for my part, what made me apply myſelf to that Inquiry was not out of opinion that I ſhould excel others, in which however I might have been forgiven; but what I did was in compliance to the deſire of a very worthy Gentleman, and good Mathematician, who encouraged me to it: I now add ſome new thoughts to the former; but in order to make their connexion the clearer, it is neceſſary for me to reſume ſome few things that have been delivered by me a pretty while ago.

I. It is now a dozen years or more ſince I had found what follows; If the Binomial $1+1$ be raiſed to a very high Power denoted by n, the ratio which the middle Term has to the Sum of all the Terms, that is, to 2^n, may be expreſſed by the Fraction $\frac{2A \times \overline{n-1}|^n}{n^n \times \sqrt{n-1}}$, wherein A repreſents the number of which the Hyperbolic Logarithm is $\frac{1}{12} - \frac{1}{360} + \frac{1}{1260} - \frac{1}{1680}$, &c. But be-

I i 2 cauſe

De Moivre, *The Doctrine of Chances* (1756) 書影

雖然棣美弗的計算結果實際上比伯努利精確得多，但是，他並沒有進一步好好的利用，尤其是他的機率分布曲線。對他而言，這條曲線僅是二項分布的機率近似分布，並沒有就此曲線本身進一步研究。不過，他的著作與方法，也確實讓機率論的研究，得以更貼近當時高度發展中的社會需求，並為隨後綻放光彩的拉普拉斯（**Pierre-Simon Laplace, 1749 – 1827**）與高斯（**Johann Carl Friedrich Gauss, 1777 – 1855**）的機率論研究打下良好的基礎，讓機率論得以順利地整合統計學的研究，讓統計學站穩腳步發展成一門新興的學問。

參考文獻

De Moivre, *The Doctrine of Chances*（1756）

Biography of Jacob Bernoulli:
http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Bernoulli_Jacob.html

Biography of Huygens:
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Huygens.html

Katz, V. J.（**2004**），李文林等譯，《數學史通論》（***A History of Mathematics*, second edition**），北京：高等教育出版社。

W. Berlinghoff and F. Gouvêa（**2008**），洪萬生等譯，《溫柔的數學史》，台北：博雅書屋。

Kline, M.（**1995**），張祖貴譯，《西方文化中的數學》，台北：九章出版社。

筆者按：本篇文章首次刊登於翰林出版社之網站＜**WorldOne** 翰林我的網＞

淺談朝鮮算學家洪正夏及其著作《九一集》

陳怡彣

台師大數學系碩士班研究生

一、前言

自十七世紀中葉開始，傳統數學知識與西方數學的交流衝擊，帶給朝鮮數學家新的研究方向與開始，其中算學家洪正夏 **(1684-1727)** 之著作《九一集》不僅包含宋、元數學，更奠基於《算學啟蒙》、《楊輝算法》與《算法統宗》這些中世紀重要的東亞算學著作。**1713** 年更以戶曹中的最低階官員會士之姿被遴選與清朝來使進行一場數學對話，年方 **30** 歲的洪正夏，何德何能得此殊榮？箇中源由不禁令人發想，洪氏對於朝鮮數學之貢獻亦值得深究。

二、背景介紹

在歷史的洪流中，很長的一段時間，韓國都視中國為宗主國，不僅在政治、經濟、文化上進行交流，算學知識亦如是。只是，論及文化的交流，韓國對中國當然是「傳入」遠大於「輸出」，韓國數學可謂是建立在中國算學的基礎之上。但文化的交流是種刺激，也可能引發崩解，而朝鮮數學的崩解可能始自於外敵入侵，日本與女真人。韓國算學知識的重建，始自 **1660** 年金始振 **(1618-1667)** 重新出版中國元朝朱世傑的《算學啟蒙》**(1299)**，此書加上《楊輝算法》 **(1274-1275)** 與《詳明算法》**(1373)**，成為朝鮮算學知識的主要來源。**17** 世紀，《算法統宗》**(1592)** 亦引入朝鮮境內，催動並影響朝鮮數學界。藉由這些知識的傳播，傳統數學的復甦在朝鮮成功萌芽。

反觀大陸的另一側，同一時期，中國清朝採用新的曆法系統—時憲曆 **(1645)**，此曆法奠基於西方數學與天文學。同一年，時憲曆亦被引入朝鮮，迫使朝鮮的天文學家與數學家必須認識與熟悉此系統。**17** 世紀晚期，《西洋新法曆書》與《天學初函》**(1623)** 接連引入朝鮮學界。**18** 世紀中葉，一本兼容傳統數學與西方知識的清朝數學著作《數理精蘊》**(1723)** 也被帶入朝鮮。綜上所述，在歷史的淵源下，**18** 世紀之朝鮮數學發展有兩面向，一方是傳統理論，一方是西方系統，兩者並行，也帶給學子激盪的火花。

三、洪正夏與《九一集》

自朝鮮統治之始，政府制定法律，招募適合之能人進入政府機關，其中不乏數學人才。機關當中其一為戶曹，主要負責家戶之業務與財務。其中，甄選人才可分為兩部分，一部分是測驗方式，一部分為考試資格。測驗方式主要是透過選自《算學啟蒙》、《楊輝算法》與《算法統宗》之試題進行篩選，這個過程稱之為「籌學取才」。另一方面，考生的資格也有所限制，必須來自於中人階級，那是介於一般平民與兩班貴族間的中間層級。另一個政府機關為觀象監，主要為雜科應試。也正因為兩者之工作內容南轅北轍，戶曹與觀象監兩機關之間，似乎並無任何有意義之對話產生。

從史料來看，《籌學入閣案》是至今唯一能從中窺探洪正夏之文獻，此書記載自 **15** 世紀至 **1888** 年，通過籌學應試的 **1626** 名數學家。從此文獻中，我們還原洪正夏族系，推測其曾祖父 — 洪仁南，應是為兩班貴族；另一方面，自洪正夏之祖父 — 洪敘疇 **(1628-？)** 與兄弟洪敘九 **(1609-？)** 分別於 **1646** 年及 **1632** 年通過籌學取才算起，至洪宜敬 **(1874-？)** 與洪宜敏 **(1877-？)** 兄弟於 **1888** 年通過應試截止，洪氏一家記載 **98** 人通過試驗，可謂家學淵源厚實。再者，洪氏一族亦是朝鮮相關文獻記載中，人數最龐大的家族。

從文獻中可見，洪正夏於 **1706** 年通過籌學取才，**1706** 年為從九品會士，**1718** 年升正九品訓導，**1720** 年升從六品教授。綜觀朝鮮的中人算學家，也並非人人皆有著作，除卻洪正夏所著之《九一集》之外，還有慶善徵 **(1616-？)** 所著《默思集算法》以及李尚爀 **(1810-？)** 所著之《算術管見》**(1855)** 與《翼算》**(1868)**。他們三人並稱三大中人算學家，更特別的，是此三人間看似不同時代、未有交集，卻是有著姻親羈絆。再者，由於朝鮮階級明顯劃分，中人階級之交友、通婚亦是同等級，形成一封閉之官僚系統，所以，這三人間有姻親關係似乎並非不可置信，箇中因素可見一斑。

洪正夏事蹟中，最廣為人知的事，莫過於被朝廷欽點與清朝來使進行一場「數學對話」：**1713** 年，朝鮮的洪正夏與劉壽錫對上來自清國的何國柱與阿齊圖。在這場國與國的較勁中，洪氏角色可謂吃重，但為何被「圈定」卻是令人深思。畢竟，當年洪氏年方 **30**，官位也不過是戶曹中最低階的會士而已，為何能被選上，如因能力突出，那又如何被認定？他的「著作」應該是一種見證，或許可從 **1713** 年他早已完成《九一集》猜測。

洪氏之著作《九一集》分為九卷，有兩種版本流通。第一種版本為 **1868** 年由洪正夏之後人洪永錫 **(1814-？)** 再版之書冊，於書側內亦標示為「五世孫男永錫校字」。值得一提的是，此版包括南秉吉 **(1820-1869)** 作序，李尚爀作後記，相當特別。南秉吉出身為兩班士大夫階級，家世顯赫，做過許多大官，包含與「國立大學」成均館有關的成均館大司成、同知成均館事，與天文曆算有關的「國立天文台長」觀象監提調，以及「部長級」的刑曹判書、禮曹判書與吏曹判書。李尚爀於 **1831** 年通過天文學國家考試，**1832** 年通過籌學取才，繼而於觀象監任職。這兩人的合作，對於彼此在天文學與數學上的交流及互動，也是朝鮮數學史上的稀有組合。

在後記中，李尚爀提及他自己的父親對於《九一集》之讚賞，甚至推薦給南秉吉藉以學習宋、元數學與清朝數學之源流。南秉吉亦十分賞識此書並鼓勵再版。在前序中，南秉吉提及他對洪正夏之數學竟是根基於《算學啟蒙》、《算法統宗》與《益古演段》，而感到驚奇。很明顯的是，南秉吉對於《益古演段》的錯誤引用，應更正為《楊輝算法》才是。但他們兩者皆抱怨《九一集》超過兩個世紀以來的無法廣為流通，也對洪正夏之數學相對於何國柱之高深，深表讚許。

第二種版本並未包括任何前序與後記。甚至我們也無從得知誰是原始版本的傳寫者，只知與第一個版本相同，亦分為九卷。兩種版本間之比較，在「卷之一」至「卷之八」

間皆相同，都以凡例與雜錄為主體。其中，雜錄包含天文學上的基礎知識、中國度量衡、律呂與清朝來使間的數學對話。這些記載在第二版本中，則被安排在最前面的章節。在第一種版本中，「卷之九」則記載對話過程、李尚爀之後記、初步的提醒與基礎知識。其中，它對於初步的提醒始於三七分與賈憲三角形是相當不尋常的，我們無從解釋。或許可從洪永錫乃是洪正夏之直系血親，對於內容之變更不易可見一斑。這或許有助於理解為何第二種版本會變更內容的順序。

本文中論及《九一集》內容，是以第二種版本為例介紹其架構，「卷之一」共有五門，分別是「縱橫乘除門」 **(19 問)** 、「異乘同除門」 **(8 問)** 、「田畝形段門」 **(29 問)** 、「折變互差門」 **(16 問)** 與「商功修築門」 **(8 問)** 。其中，「縱橫乘除門」涉及整數的乘除運算，「異乘同除門」與「田畝形段門」類似中國《九章算術》之〈粟米〉中的「今有術」，至於「田畝形段門」與「商功修築門」則分別對應《九章算術》中的〈方田〉與〈商功〉。「卷之二」共有「貴賤差分門」 **(22 問)** 、「差等均配門」 **(18 問)** 與「貴賤反率門」 **(3 問)** ，論其內容都涉及《九章算術》之〈衰分〉，且問題是更多樣化且複雜。

「卷之三」共有「之分齊同門」 **(6 問)** 、「物不知總門」**(13 問)** 與 「盈不足術門」 **(13 問)** ，其中，「之分齊同門」涉及分數的乘除運算，「物不知總門」**(即孫子問題)**中的十三題，只有前六題可歸納至《孫子算經》中的「物不知總」題，其他七題都是「河婦蕩杯」的類型題，而「盈不足術門」則是談論盈虧問題。「卷之四」共有「方程正負門」**(14 問)** 、「毬隻解隱門」 **(9 問)** 、「罐瓶堆垛門」 **(19 問)** 與「倉囤積粟門」 **(26 問)** ，在「方程正負門」的「法曰」中，作者以算籌記數「列所問數」亦在演算過程中，列出化簡之算籌圖示，方便讀者按圖索驥，而其他三門涉及體積計算、容積計算與堆垛問題。

接著，進入「卷之五」，包含「句股互隱門」 **(78 問)** 與「望海島術門」 **(6 問)** ，其中「句股互隱門」總共列出 **78** 個問題，為全書各門之冠，並且題問複雜者，書中亦提供籌算圖示來協助解題，或許我們可猜測洪正夏對此類型題目之偏愛，配以同一卷之「望海島術門」，不難猜測作者相信「望海島術」是「勾股術」之延拓。最後，「卷之六」、「卷之七」與「卷之八」 分別是「開方各術門」的上、中、下，所各包含的題目分別有 **58**、**66** 和 **42** 題，皆是為解方程類型的題目。至於「卷之九」以「雜錄」題名，說明它的內容不好歸類到前面各門之中。

四、結論

《九一集》乃洪正夏集畢生心血之作，從書中可見他已通曉朱世傑之《算學啟蒙》、楊輝之《楊輝算法》以及程大位之《算法統宗》，並根據此這些經典建造屬於自己的數學架構，對比中人階級內，著有傳世集冊之人稀少，如此表現，不愧與慶善徵、李尚爀並稱為三大中人算學家。其中，得自南秉吉與李尚爀之推崇，更是令人想一窺其奧妙。輔以 **1713** 年的清使來訪，洪氏之姿令人讚賞的同時，也思其才華之豐沛，畢竟如何在國與國之間的「交流」不失去顏面，此人必為可敬、可讚之輩，卻沒有想到竟然是一名

30 出頭的低階官員擔此大任，如此增添其傳奇性，也更讓人對洪氏與《九一集》燃起熊熊的好奇心，想一探究竟。

參考文獻

洪萬生 (2002)，〈十八世紀東算與中算的一段對話：洪正夏 vs.何國柱〉，《漢學研究》20 卷 2 期，頁 57-80。

英家銘 (2012)，〈朝鮮兩班算家南秉吉與其算學著作〉，《中華科技史學會學刊》17 期，頁 24-37。

Hong Sung Sa , Hong Young Hee , Lee Seung On (2014), "Mathematical Structures of Joseon mathematician Hong JeongHa", *Journal for History of Mathematics* , 27(1) , pp. 1-12

1. 為節省影印成本，本通訊將減少紙版的的發行，請讀者盡量改訂 PDF 電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail 至 suhy1022@gmail.com
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請 e-mail 至 suhy1022@gmail.com
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng/letter/hpmletter.htm
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本：陳昭蓉 (東京 Boston Consulting Group)
基隆市：許文璋（銘傳國中）
台北市：英家銘（台北醫學大學）楊淑芬（松山高中）杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中）蘇俊鴻（北一女中）陳啟文（中山女高）蘇惠玉（西松高中）蕭文俊（中崙高中）郭慶章（建國中學）李秀卿（景美女中）王錫熙（三民國中）謝佩珍、葉和文（百齡高中）彭良禎、鄭宜瑾（師大附中）郭守德（大安高工）張瑄芳（永春高中）張美玲（景興國中）文宏元（金歐女中）林裕意（開平中學）林壽福、吳如皓 (興雅國中) 傅聖國（健康國小）李素幸（雙園國中）程麗娟（民生國中）林美杏（中正國中）朱賡忠（建成國中）
新北市：顏志成（新莊高中） 陳鳳珠（中正國中）黃清揚（福和國中）董芳成（海山高中）孫梅茵（海山高工）周宗奎（清水中學）莊嘉玲（林口高中）王鼎勳、吳建任（樹林中學）陳玉芬（明德高中）羅春暉 (二重國小) 賴素貞（瑞芳高工）楊淑玲（義學國中）林建宏 （丹鳳國中）莊耀仁（溪崑國中）、廖傑成（錦和高中）
宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中）吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）林宜靜（羅東高中）
桃園縣：許雪珍、葉吉海（陽明高中）王文珮（青溪國中） 陳威南（平鎮中學）洪宜亭、郭志輝（內壢高中） 鐘啟哲（武漢國中）徐梅芳（新坡國中） 程和欽 (大園國際高中)、鍾秀瓏（東安國中）陳春廷（楊光國民中小學）王瑜君（桃園國中）
新竹市：李俊坤（新竹高中）、洪正川（新竹高商）
新竹縣：陳夢綺、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）
苗栗縣：廖淑芳 (照南國中)
台中市：阮錫琦（西苑高中）、林芳羽（大里高中）、洪秀敏（豐原高中）、李傑霖、賴信志、陳姿研（台中女中）、莊佳維（成功國中）、李建勳（萬和國中）
彰化市：林典蔚（彰化高中）
南投縣：洪誌陽（普台高中）
嘉義市：謝三寶（嘉義高工）郭夢瑤（嘉義高中）
台南市：林倉億（台南一中）黃哲男、洪士薰、廖婉雅（台南女中）劉天祥、邱靜如（台南二中）張靖宜（後甲國中）李奕瑩（建興國中）、李建宗（北門高工）林旻志（歸仁國中）、劉雅茵（台南科學園區實驗中學）
高雄市：廖惠儀（大仁國中）歐士福（前金國中）林義強（高雄女中）
屏東縣：陳冠良（枋寮高中）楊瓊茹（屏東高中）黃俊才（中正國中）
澎湖縣：何嘉祥 林玉芬（馬公高中）
金門：楊玉星（金城中學）張復凱（金門高中） 馬祖：王連發（馬祖高中）

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。懇請各位老師惠賜高見！

《爺爺的證明題》的筆法與哲思

陳弘傑、陳冠斌、洪麗雯
台灣大學哲學系二年級

一、小說筆法

虛構與真實，要談這個問題，作者的意圖絕對不能被忽略，那作者對於這部作品想傳達的意涵究竟做了何種解釋呢？在本小說一開始的前記中，作者提到：「數學在虛構的世界中，就像在我們現實的世界中一樣，實實在在永遠為真」。虛構世界指的就是作者創造的，屬於拉維、維傑、法官、尼可等人的世界。很有趣吧？虛構的小說，卻被作者當作窗口，帶領我們通往確定的真理。具有確定性的真理，卻存在於虛構的世界。

空間：另一個有趣的現象，是小說中空間的意義。關於這個問題，必須分成兩個層次來談，因為小說的構成有兩部分「小說人物讀的故事」與「我們讀的故事」。舉例來說，《幾何原本》是小說人物讀的故事，而整本小說則是我們讀的故事。但這兩者並不衝突，因為就像例子中的《幾何原本》，透過小說人物的眼睛，我們依然可以讀它。簡單來說，身為讀者的我們同時具有全知的第三人稱視角，與全然主觀第一人稱視角。所以，出現在第一人稱視角中的空間，與出現在第三人稱視角中的空間，其意義會有關聯，但是，基本上是不同的。

不過，再談兩個視角中空間的含義前，我們必須先瞭解，何謂空間？直觀上，我們身處的這個世界就是一個大的空間。但這不是我們要的，也不是作者要的，甚至，這樣的空間也不是歐幾里得要的。那麼，歐幾里得需要什麼要的空間？顯然，歐幾里得需要「確立的空間」。為什麼？因為當空間是被精確定義時，歐式幾何學就是一個確定性的真理，而且能夠很好的解決現實生活中的許多問題。透過確定空間，歐幾里得是可以推出真理的。因此，我們可以做如下的推導：如果歐式幾何學是真理的話，則源自於確定的空間。在小說中，這個「確立的空間」被不斷的發揚，最終串起了整篇小說。

我們先看看這個確定的空間，發生在第一視角的含義。第一視角其實就是本書的主人翁：拉維。本書的書名是爺爺的證明題，意謂著拉維的爺爺在尋找真理。但在故事的另一條線（拉維的人生）中，拉維也在尋找屬於自己的真理。那麼，什麼是拉維找尋的真理呢？拉維尋找的真理，就是 **1919** 年關於爺爺遭遇的真相。這是在整個故事中，拉維不斷尋找的真理。有趣的是，拉維閱讀爺爺故事的地方在哪？圖書館，有時是在圖書館的小房間。如果我們把圖書館與小房間所有的物品抽掉，僅檢視其架構，會發現一件事：圖書館與小房間都是立體的幾何圖形，而且是固定的立體圖形。換句話說：圖書館與小房間都是「確立的空間」。而拉維透過在這樣的空間中，閱讀資料，找尋真理，而他最後也真的瞭解了爺爺的遭遇。透過確立的空間，真理被找到了。

在第三人稱視角，即讀者全知的視角中，也有相同的例子。例如：尼可在教授「關

於無限的想像」這門課時，他是在哪裡教的？教室。教就是一個確立的空間。再來，故事的另一條線，爺爺（維傑）與法官，他們倆都在追尋真理。維傑追求的是數學的確定性，法官追求的是信仰的確定性。在書末，兩人追尋的答案，最終合而為一：「真理存不存在，我不知道，但只要我們相信就夠了」。這句超越真理的真理，是在哪得來的？答案是監獄的小房間。法官與維傑在報章的文字中，辯駁著真理，體會真理，確定真理。這個屬於兩人真理之路，一直發生在監獄的牢房，而牢房又是一個確立的空間。所以，這又再度應證「真理源自於確定的空間」。

不管是歐幾里得的《幾何原本》、爺爺的證明題、尼可的教學，亞丁的煩惱。他們都在找尋一個確定的真理，就連作者本身也是。所以，整個小說的主旨，其實一直圍繞著「什麼是確定的真理」發展，與此同時，這些確定的真理卻又扣著確定的空間。「唯有確定性才能導出確定性」，這個歐幾里得、維傑與作者一直強調的道理，其實小說自身早已無意識的，透過故事的敘事不斷不斷的提醒我們。

但是，在一開始提到的虛構與真實，顯然與整篇小說散發出的意旨有很大的差別。我要問的是，真的是這樣嗎？我認為，答案是在問題的反面。小說的內容或許是虛構的，但這樣的虛構是與真實世界發生的史實比較後得出的結論。然而，小說中各個人物進行的邏輯推導、歐式幾何學、非歐幾何學，不管放在哪個時空，它們都必然為真，而這意味著它們都具有確定性。由此可知，這部小說是一體兩面的：虛構的內容佐以真實的定理。我們需要虛構的故事幫助我們理解真理，但是沒有那些永遠不變的定理，我們的大腦意識不可能碰觸得到真理。「爺爺的證明題」的意義就在於此，就算最後證明的概念會被不經思考的普通人詬病，但它必然是一個偉大的證明，因為它的故事、它的編排、它的自身，早已是符合確定性推理的最佳典範。

二、從理性到感性

維傑爺爺曾說所有值得相信的和依靠的知識，都必須建立在理性上。理性在中表達著理智智能的性；英文的理性（**reason**）則含有推理演繹的意思，邏輯的嚴謹，每個推論步驟都充分解釋，彷彿在腦內建構一個大樓，一磚一瓦經過自己思考理解最後承認之後，再往上建造下一個部分，如此細膩的建構知識，當我們猛然後退，發覺這磚瓦早已建構成一個知識大廈了，如同幾何原本一般，還有我們現今的科學都是在這基礎上達成。我們認為的理性，就是指事情必須要有因果關係，沒有原因的相信，很難被承認為理性，維傑對上帝的疑惑就從這理展開，充滿懷疑精神的維傑質疑著對某些人視為理所當然的信仰，相信上帝的理由是什麼？從理性途徑要如何觸及上帝？然而質疑，必須質疑到什麼地步才算真正的理性呢？倘若停止懷疑，我們自己設了一個懷疑的終點，「到這裡我就信了」，是否就是不夠理性呢？言下之意，把上帝當作萬物的第一因，是否為不理性。

這就讓我想到一位經驗主義哲學家，英國的休姆，休姆生在非常注重理性的 **18** 世紀，對知識的建構他走了一個非常重視理性推理和經驗分析的路徑，不輕信任何東西，追求真正讓人值得相信和依靠的知識，然而在此堅持上，他得出無法取得知識的結論。

因為他發現，如果用理性的方式仔細檢視，人取得知識的方式，發現知識的基石 — 也就是因果關係其實並不理性，休姆認為因果關係，不過是人類習慣性的聯想，我們不管如何地觀察因，不管如何地分析果，兩者之間的「關係」是觀察不到的，寫就是說，那個關係是我們想像出來的，邏輯系統數學系統，看似一個非常具有規則、直觀、理所當然的程度讓康德認為這是人天生就如此思考，然我們常常直觀反射做出的判斷被我們當作真理，原因是因為，每次我們以直觀做出這個命題，都不會被他人所否認，譬如我從小到大都認為肚子餓的時候肚子會叫，我是由於常常在感到肚子餓時發現肚子會叫，才會做出這樣的命題，又由於我沒有被否認，甚至大家都做一樣的命題，漸漸的我們就把他當作真理，我們會說，我「知道」肚子餓肚子會叫；而不是我們「相信」。似乎，在大家都這麼想時，我們就如此自然地把感性而來的東西，當作理性一般相信著了。舉一個更為尖銳的例子，一個敘述不能和他的否證相容，這個問題是古典邏輯學中視為理所當然的，這似乎比一個線段的沒有寬度還要直觀，但是，這個問題在更嚴格的所謂「理性」中卻被質疑。

倘若堅守純然的理性，只會步入無限後退的窘境。反過來說，如果我們願意容忍思考可以存在感性，那多感性可以接受呢？超弦理論與上帝存在相比，超弦理論更為「理性」嗎？這個問題可能是另一個要用感性來解決的問題了。

不論是理性或感性，其實只是一種維持信念的方式，然而事實是不管你用哪種途徑，你都無法證明真正的信念的基礎，於宗教上就是上帝的存在，於科學上就是因果律的存在，所謂不證自明的命題，只不過就是思考的終點，所以，我們質疑他人所信，其實也只是兩股感性的碰撞罷了，兩個感性的人討論著自己的信念，琢磨自己理性的敏銳度與知性的廣度，這個過程才是最可貴的。

三、從公理到信仰

本書的核心旨要從書名就能窺知一二：爺爺的證明題：上帝存在嗎？全書乃是對「信仰」的質疑與反思，帶領讀者發現「信仰」的另一面貌。貫串全書的一個重要概念即是「公理」，公理的概念源自歐幾里得，所謂公理必須是簡單、不證自明的基本定理，也是知識的根基以及出發點，意即「最初的真理」。透過公理，人們 (至少數學家一定是如此) 才能建構出知識、判定一項知識是否為真，若沒有公理，一切知識的確定性似乎就變得相當飄渺無依。

主角的爺爺，維傑・薩尼認為宗教乃是人類情感或文化需求下而生的產物，然後信奉者設法找出正當的論證而使宗教或信仰更加合理，此一過程是完全不「公理化」的，因此他反對上帝的存在，而僅相信數學方法是唯一解釋世界的真理；聽到此一理論的泰勒法官，簡直不可置信並且氣炸了，但也因為維傑・薩尼的無神論刺激，他才意識到自己對信仰的強烈執著與忠誠，也因而發現了信仰的另一層面。故事到了最後，法官被數學家的公理給說服，重新建構起信仰，數學家卻發現「不可能出錯」的歐幾里得第五設

準竟然出錯了，數學世界和對數學的信任似乎一夕之間搖搖欲墜，究竟什麼才是真實？如何才能找到確定性以描述這個世界？

維傑‧薩尼最初對宗教的看法以及泰勒法官最後對信仰的重新認識不禁令人想到康德。康德提出的「二律背反」即是源自源於人類理性追求無條件的東西的自然傾向，康德以前有許許多多的哲學家，用各式各樣的方法證明上帝存在，人人看來都有其道理；同時，也有許多哲學家用各種方式反駁上帝並不存在，也都看起來很有道理，那麼，究竟上帝存在不存在？康德最後提出二律背反的解決辦法：把無條件者不看作認識的對象，而視之為道德信仰的目標。也就是說，「上帝是用信的，而不是證出來的」，即便去認真探究上帝究竟存不存在、並用各種方法去證實祂存或不存在，這樣的「存在」或「不存在」終究只是建構在吾人的腦海中罷了。（好比小華現在用各種方法證明小明並不存在、這世上並沒有小明這個人，儘管論證過程看起來再合理，那僅是「在小華的認知中小明不存在」而已，並不影響小明真實存在於這世上的這個事實）本書末段，法官問牧師是否質疑過上帝的存在，牧師對法官的回答就呼應了康德的理論：「**不可能有證據，接受上帝只能從我們的信仰中達成。信仰是一個出發點，而你無法證明一個出發點，因為，嗯，它只是一個出發點嘛！**」、「**一個人並不是藉由相信上帝來榮耀祂，而是過自己的生活來體現祂所代表的一切**」。

信仰只是一個出發點，一切都是由信仰衍生出來的，因為信仰所以人好好過生活、好好填滿我們的生命，因為信仰而接受事實，因此不需要找到上帝存在的事實。這一點用在維傑‧薩尼身上也是相同的，維傑‧薩尼雖是個無神論者，但他對數學的情感難道不是一種信仰嗎？維傑‧薩尼最後發現連歐幾里得的第五設準都可能為假，這世上似乎沒有什麼是真實的了，雖感到失望，卻仍然會為數學而興奮，卻仍決定繼續執著於這個可能全為假的東西、生存於這個可能毫無真實的世界，這不正是信仰的一種嗎？

信仰，不論信的是什麼，都只是一個起點而已，不須以「公理」框限住祂，所謂的絕對確定性或絕對真理，似乎是渺小而有限的人類永遠無法企及的遙遠而無限的東西。本書中有一大堆數學過程和證明，然而這都只是作者欲帶出主旨的過程而已，最終帶領讀者去重新思考「理性」和「信仰」的另一面貌。

洪萬生按：這篇文章是陳弘傑、陳冠斌、洪麗雯選修台大 2016 年春季班「數學與文化」通識課程的期末報告，現在徵得他們的同意，特此刊載。