

HPM 通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系退休教授）
 主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）
 助理編輯：黃俊瑋（和平高中）
 編輯小組：蘇意雯（台北市立教育大學）蘇俊鴻（北一女中）
 葉吉海（陽明高中）陳彥宏（成功高中）
 王文珮（青溪國中）
 英家銘（台北醫學大學）
 創刊日：1998年10月5日 每月5日出刊
 網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horng>

第十九卷第十一期 目錄 (2016年11月)

- ▣ 一題多解之趣—以一個學科能力測驗問題為例
- ▣ 數學式邏輯思考的意義

一題多解之趣—以一個學科能力測驗問題為例

黃俊瑋

台北市和平高中

管漢程、陳財發、曾傳硯

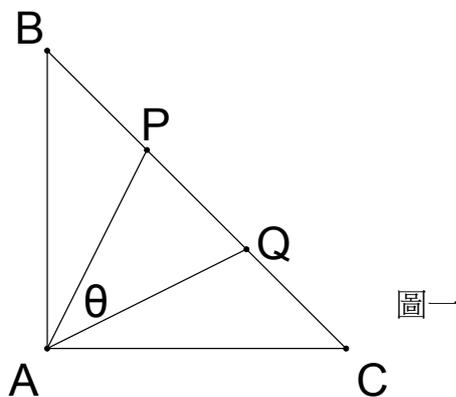
台北市和平高中三年級學生¹

一、前言

當學生對於課程相關單元與基礎知識，有了一定的熟悉後，筆者總喜歡在課堂上，拋出一題多解的議題，讓他們集思廣益，構思不同的解法。特別是已經學完高一、高二相關課程，準備複習的高三學生而言，可以利用這個機會對於高中課程進行統整。

即使筆者準備了許多口袋解法，但時常，會有學生構想出新的創意。本文以 93 年學年數學學科能力測驗的一道填充題為例：

設 $\triangle ABC$ 為一等腰直角三角形， $\angle BAC = 90^\circ$ 。若 P 、 Q 為斜邊 \overline{BC} 的三等分點，則 $\tan \angle PAQ = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(化為最簡分數)



¹ 本文中提到的方法，多數由管漢程同學想出，另外，陳財發同學與曾傳硯同學亦有貢獻。

筆者分享在班上集思廣益，以及學生們所想出的各種解法，當中，也包含筆者未曾想到的方法。

二、各種解法

由於剛複習完三角單元，因此，多數學生自然會想到利用餘弦定理來處理本問題。

方法 1：餘弦定理

首先，設邊長為 a ，斜邊為 $\sqrt{2}a$ ，過 P, Q 向 \overline{AC} 作垂線，交於 D, E 。利用相似形比例關係，知 $\overline{PD} = \frac{2}{3}a, \overline{AD} = \frac{1}{3}a, \overline{QE} = \frac{1}{3}a, \overline{AE} = \frac{2}{3}a$ 。如此，可求出 $\overline{PA} = \frac{\sqrt{5}}{3}a, \overline{QA} = \frac{\sqrt{5}}{3}a$ 。

$$\text{再由餘弦定理知：} \cos \theta = \frac{(\frac{\sqrt{5}}{3}a)^2 + (\frac{\sqrt{5}}{3}a)^2 - (\frac{\sqrt{2}}{3}a)^2}{2(\frac{\sqrt{5}}{3}a)(\frac{\sqrt{5}}{3}a)} = \frac{4}{5}$$

$$\text{故可得 } \tan \theta = \frac{3}{4}$$

既然要求出 $\tan \theta$ ，因此，筆者提示學生，作輔助線造出直角三角形，利用 $\tan \theta$ 的定義與基本的勾股定理求長來處理。

方法 2，回歸定義 $\tan \theta$ 與勾股定理

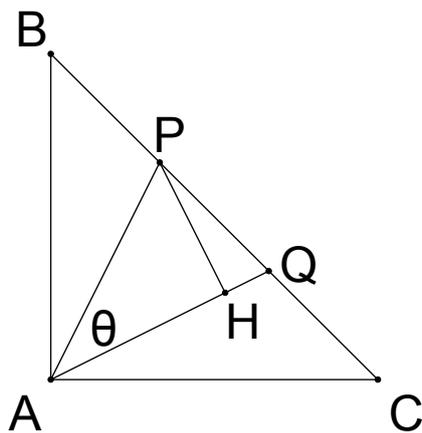
考慮等腰三角形 APQ ，設 \overline{PA} 邊上的高為 \overline{PH} （如圖二），則 $\tan \theta = \frac{\overline{PH}}{\overline{AH}}$

為了方便計算，假設邊長為 $3a$ ，斜邊長為 $3\sqrt{2}a$ ，可求出 $\overline{PA} = \sqrt{5}a, \overline{QA} = \sqrt{5}a$ ，以及 $\overline{PQ} = \sqrt{2}a$ 。

設 $\overline{AH} = x, \overline{QH} = (\sqrt{5}a - x)$ ，在 $\triangle PAH$ 與 $\triangle PAQ$ 中，分別利用勾股定理可得：

$$(\sqrt{5}a)^2 - x^2 = h^2 = (\sqrt{2}a)^2 - (\sqrt{5}a - x)^2, \text{ 即 } 5a^2 - x^2 = 2a^2 - (5a^2 - 2\sqrt{5}ax + x^2)$$

$$\text{解此方程式可得 } x = \frac{4}{\sqrt{5}}a, \text{ 可求得 } h = \frac{3}{\sqrt{5}}a, \text{ 可得 } \tan \theta = \frac{\overline{PH}}{\overline{AH}} = \frac{h}{x} = \frac{3}{4}。$$



圖二

方法 3：倍角公式

接著，倍角公式也是學生們想到的方法。同樣先設邊長為 a ，斜邊為 $\sqrt{2}a$ ，先求出等腰直角 $\triangle ABC$ 斜邊上的高為 $\overline{AH} = \frac{1}{2}\sqrt{2}a$ ，又由題意易知 $\overline{PH} = \frac{1}{6}\sqrt{2}a$

$$\text{故 } \tan \frac{\theta}{2} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}a}{\frac{1}{6}\sqrt{2}a} = \frac{1}{3}, \text{ 由倍角公式可得 } \tan \theta = \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{3}{4}$$

方法 4：利用三角形面積

利用三角形面積關係，是解三角形時常用的策略，首先，同方法 2，假設邊長為 $3a$ ，斜邊長為 $3\sqrt{2}a$ ，求出 $\overline{PA} = \sqrt{5}a, \overline{QA} = \sqrt{5}a$ 後，由三角形面積關係與三角形面積公式可知：

$$\Delta APQ = \frac{1}{2} \overline{PA} \overline{QA} \sin \theta = \frac{1}{3} \Delta ABC, \text{ 即 } \Delta APQ = \frac{1}{2} \sqrt{5}a \sqrt{5}a \sin \theta = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} 3a \cdot 3a \right), \text{ 可得 } \sin \theta = \frac{3}{5},$$

$$\text{故可得 } \tan \theta = \frac{3}{4}$$

方法 5：坐標化與向量

由於筆者平常時亦多次提醒，坐標化是求解幾何問題的重要方法，特別是求長、求角時，可引入向量等工具，因此，學生們很快便透過坐標化的方式解此問題。

由於 $\angle BAC = 90^\circ$ ，這裡令 A 為原點，為了計算上的方便，將設三頂點設為 $A(0,0), B(0,3), C(3,0)$ 。(事實上，原問題欲求角度，不受邊長比例縮放影響，否則設為 $A(0,0), B(0,a), C(a,0)$ 較具一般性)

此時，由分點公式或相似三角形，易知斜邊上的三等分點的坐標為 $P(1,2), Q(2,1)$ ，因此， $\overline{AP} = (1,2), \overline{AQ} = (2,1)$ ，由向量的夾角公式可得 $\cos \theta = \frac{4}{5}$ ，可得 $\tan \theta = \frac{3}{4}$ 。

坐標化後，亦可以求得直線 AP 與直線 AQ 的方程式，再利用直線的法向量求夾角

的 $\cos \theta$ 。或可利用正射影公式、直線方程式求交點等方式，求得所需求長度，再求解 $\tan \theta$ 。

方法 6：坐標化與旋轉矩陣

除了利用向量夾角公式外，利用平面上的線性變換所學過的旋轉矩陣，亦可解此問題。同上，假設出三頂點 $A(0,0), B(0,3), C(3,0)$ ，並求出 $P(1,2), Q(2,1)$ 後，觀察將 $P(1,2)$ 以原點為中心，旋轉 θ 角後，可得 $Q(2,1)$ 。

$$\text{利用旋轉矩陣，可知} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{可得方程式} \begin{cases} \cos \theta - 2 \sin \theta = 2 \\ \sin \theta + 2 \cos \theta = 1 \end{cases}, \text{可解得} \cos \theta = \frac{4}{5}, \sin \theta = \frac{3}{5}, \text{故可得} \tan \theta = \frac{3}{4}。$$

方法 7：坐標化與旋轉矩陣

利用複數乘法的幾何意義，與方法 6 有異曲同工之妙。

首先，將三角形置於複數平面上，如此可假設 $A(0), B(3i), C(3)$ ，並可求出 $P(1+2i), Q(2+i)$ ，將 $P(1+2i)$ 乘上複數 $\cos \theta + i \sin \theta$ 後，相當於將 $P(1+2i)$ 以原點為中心旋轉 θ 角至 $Q(2+i)$ ，因此 $(1+2i)(\cos \theta + i \sin \theta) = 2+i$ 。

$$\text{乘開分別比較實部與虛部後，可得方程式} \begin{cases} \cos \theta - 2 \sin \theta = 2 \\ \sin \theta + 2 \cos \theta = 1 \end{cases}$$

$$\text{可解得} \cos \theta = \frac{4}{5}, \sin \theta = \frac{3}{5}, \text{故可得} \tan \theta = \frac{3}{4}。$$

方法 8：向量夾角公式

求夾角自然會想到向量的夾角公式，首先，由向量的分點公式易知

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} + \frac{2}{3} \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AQ} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}, \text{先求出：}$$

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = \left(\frac{1}{3} \overrightarrow{AC} + \frac{2}{3} \overrightarrow{AB}\right) \cdot \left(\frac{2}{3} \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}\right) = \frac{2}{9} |\overrightarrow{AC}|^2 + \frac{2}{9} |\overrightarrow{AB}|^2 = \frac{4}{9} |\overrightarrow{AC}|^2$$

$$|\overrightarrow{AP}|^2 = \left(\frac{1}{3} \overrightarrow{AC} + \frac{2}{3} \overrightarrow{AB}\right) \cdot \left(\frac{1}{3} \overrightarrow{AC} + \frac{2}{3} \overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{9} |\overrightarrow{AC}|^2 + \frac{4}{9} |\overrightarrow{AB}|^2 = \frac{5}{9} |\overrightarrow{AC}|^2, \text{故} |\overrightarrow{AP}| = \frac{\sqrt{5}}{3} |\overrightarrow{AC}|$$

$$|\overrightarrow{AQ}|^2 = \left(\frac{2}{3} \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}\right) \cdot \left(\frac{2}{3} \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}\right) = \frac{4}{9} |\overrightarrow{AC}|^2 + \frac{1}{9} |\overrightarrow{AB}|^2 = \frac{5}{9} |\overrightarrow{AC}|^2, \text{故} |\overrightarrow{AQ}| = \frac{\sqrt{5}}{3} |\overrightarrow{AC}|$$

最後，再利用向量的夾角公式可得：

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ}}{|\overrightarrow{AP}| |\overrightarrow{AQ}|} = \frac{\frac{4}{9} |\overrightarrow{AC}|^2}{\left(\frac{\sqrt{5}}{3} |\overrightarrow{AC}|\right) \left(\frac{\sqrt{5}}{3} |\overrightarrow{AC}|\right)} = \frac{4}{5}$$

$$\text{故可得} \tan \theta = \frac{3}{4}。$$

方法 9：差角公式

設 $\angle QAC = \alpha$ 坐標化後，易知直線 AP 的斜率為 $\tan(\theta + \alpha) = 2$ ，直線 AQ 的斜率為

$$\tan \alpha = \frac{1}{2}。因此，\tan \theta = \frac{\tan(\theta + \alpha) - \tan \alpha}{1 + \tan(\theta + \alpha) \tan \alpha} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3}{4}。$$

倘若學生對 $\tan \theta$ 不熟悉，假設 $\angle QAC = \alpha$ 後，可利用相似形比例關係，求得

$$\overline{PD} = \frac{2}{3}a, \overline{AD} = \frac{1}{3}a, \overline{QE} = \frac{1}{3}a, \overline{AE} = \frac{2}{3}a, 如此，可求出 \overline{PA} = \frac{\sqrt{5}}{3}a, \overline{QA} = \frac{\sqrt{5}}{3}a$$

即 $\sin(\theta + \alpha) = \frac{2}{\sqrt{5}}, \cos(\theta + \alpha) = \frac{1}{\sqrt{5}}, \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ，再由正弦的差角公式

$$\sin[(\theta + \alpha) - \alpha] = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{3}{5}, 即 \sin \theta = \frac{3}{5}, 可得 \tan \theta = \frac{3}{4}。$$

此外，設 $\angle QAC = \alpha$ 後可知 $\theta = 90^\circ - 2\alpha$ ，所以，求得 $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ 之後，

亦可利用 $\sin \theta = \sin(90^\circ - 2\alpha) = \cos 2\alpha$ ，求解出 $\sin \theta = \frac{3}{5}$ ，可得 $\tan \theta = \frac{3}{4}$ 。

方法 10：正弦定理

除了餘弦定理之外，筆者亦請同學試試能不能利用正弦定理或加入三角形外接圓的方式求解。幾天後，由管漢程同學想到這個方法：

首先，對於任意等腰三角形，設底邊為 a ，兩側邊長為 b ，高為 h ，外接圓半徑為 R ，由勾股定理可知 $R^2 = (h - R)^2 + x^2$ ，展開得 $R^2 = (h^2 - 2hR + R^2) + (b^2 - h^2)$ ，整理得 $2hR = b^2$ ，

於是 $R = \frac{b^2}{2h}$ 。

回到原問題，為方便計算設邊長為 $3\sqrt{2}$ ，斜邊長為 6，利用正弦定理：

$$R_{\triangle APQ} : R_{\triangle ABC} = \frac{2}{\sin \theta} : \frac{6}{\sin 90^\circ} = \frac{(\sqrt{10})^2}{2 \cdot 3} : 3$$

利用內項相乘等於外項相乘，得 $\frac{6}{\sin \theta} = 10$ ，即 $\sin \theta = \frac{3}{5}$ ，可得 $\tan \theta = \frac{3}{4}$ 。

除了上述這些方法外，尚有若干方法，但由於解題過程較迂迴，或本質上與上述這些方法雷同，所以筆者不多談就此打住。

三、延伸問題與推廣

透過一題多解的方式解決了原問題外，事實上，可以再深入思考的是，如何將本問題再進一步延拓與相關延伸。筆者提供幾個修改與延拓的方向與大家分享：

1. 將斜邊任意 n 等分

若將斜邊三等分改為對斜邊任意 n 等分，亦可作類似處理，求任兩等分點與頂點之間的夾角。

民國 100 某高中一道數學教師甄試考題與此延伸問題有關：

已知一個直角三角形 $\triangle ABC$ ， BC 為斜邊，斜邊長為 a ，斜邊上的高為 h ， O 為斜邊上的中點，今將斜邊 n ($n > 1$ ， n 為奇數) 等分，若 P 、 Q 為其中兩個等分點，且 $\overline{PQ} = \frac{a}{n}$ ， O 點介於 P 、 Q 之間，設 $\angle PAQ = \alpha$ 。則 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \tan \alpha = \frac{4h}{a}$

2. 延拓到一般的直角三角形

設 $\triangle ABC$ 為一直角三角形， $\angle BAC = 90^\circ$ 。若 P 、 Q 為斜邊 \overline{BC} 的三等分點，求 $\tan \angle PAQ$ 。同樣地，此問題可再推廣到將斜邊任意 n 等分點，並求任兩等分點之間夾角。

3. 延拓到一般的等腰三角形，對非相等邊之邊長作三等分，或任意 n 等分，並求任兩等分點之間夾角。

4. 延拓到任意的三角形，對任一邊作三等分，或任意 n 等分，並求任兩等分點之間夾角。

四、結語

在此，筆者首先引述蔡聰明教授在《數學拾貝》這本書中所提到，與一題多解有關的想法：

表面上看起來簡單的一個問題，居然有這麼多種解法，從綜合幾何，無窮級數，坐標法，向量法到線性代數等等。

有的方法比較淺顯，應用有限；有的方法較深刻，並且應用廣泛。平面幾何的方法像手工藝，線性代數的方法是機器文明。

我們做一個問題，就是要透過問題來熟悉並掌握背後所涉及各種概念與方法，用具體的問題來貫穿數學，掌握抽象。

面對中學幾何問題時，從最基本的而重要的畢氏定理，再包含高中階段的正弦定理、餘弦定理、面積公式、換角公式、和差角公式、倍角公式、向量、直角座標幾何、矩陣、極座標、複數的幾何意義等等概念，都是解決問題的重要方向與工具。

而一題多解一方面有助於學生複習、統整（高中）單元相關的內容，並且也是筆者認為解數學問題相當有趣好玩的數學活動。學會如從不同角度分析數學問題，利用不同的工具與思路攻克問題，適當地翻轉圖形、巧添輔助線，除了有助於熟悉學過的數學課程，同時也可激發不同的觀點與創意，並能享受解題的樂趣。

總之，筆者平常解決了一個難題後（特別是幾何問題），總是會再試著從不同的觀點切入，找尋其他不同的方法，過程中幫助自己更深入了解問題，並且將該問題與各個不同單元或領域連結，無形中數學能力也獲得了提升。因此，冀望將此經驗應用於數學課堂上，並分享給學生，分享給對數學學習有興趣的讀者們。

1. 為節省影印成本，本通訊將減少紙版的發行，請讀者盡量改訂 PDF 電子檔。要訂閱請將您的大名、地址、e-mail 至 suhy1022@gmail.com
2. 本通訊若需影印僅認教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請 e-mail 至 suhy1022@gmail.com
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/hpmlatter.htm>
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本：陳昭蓉（東京 Boston Consulting Group）

基隆市：許文璋（銘傳國中）

台北市：英家銘（台北醫學大學）楊淑芬（松山高中）杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中）

蘇俊鴻（北一女中）陳啟文（中山女高）蘇惠玉（西松高中）蕭文俊（中崙高中）

郭慶章（建國中學）李秀卿（景美女中）王錫熙（三民國中）謝佩珍、葉和文（百齡高中）

彭良禎、鄭宜瑾（師大附中）郭守德（大安高工）張瑄芳（永春高中）張美玲（景興國中）

文宏元（金歐女中）林裕意（開平中學）林壽福、吳如皓（興雅國中）傅聖國（健康國小）

李素幸（雙園國中）程麗娟（民生國中）林美杏（中正國中）朱廣忠（建成國中）吳宛柔（東湖國中）王裕仁、蘇之凡（木柵高工）

新北市：顏志成（新莊高中）陳鳳珠（中正國中）黃清揚（福和國中）董芳成（海山高中）孫梅茵

（海山高工）周宗奎（清水中學）莊嘉玲（林口高中）王鼎勳、吳建任（樹林中學）陳玉芬

（明德高中）羅春暉（二重國小）賴素貞（瑞芳高工）楊淑玲（義學國中）林建宏（丹鳳國中）

莊耀仁（溪崑國中）、廖傑成（錦和高中）

宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中）吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）林宜靜（羅東高中）

桃園市：許雪珍、葉吉海（陽明高中）王文珮（青溪國中）陳威南（平鎮中學）

洪宜亭、郭志輝（內壢高中）鐘啟哲（武漢國中）徐梅芳（新坡國中）程和欽（大園國際高中）、

鍾秀瓏（東安國中）陳春廷（楊光國民中小學）王瑜君（桃園國中）

新竹市：李俊坤（新竹高中）、洪正川（新竹高商）

新竹縣：陳夢綺、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）

苗栗縣：廖淑芳（照南國中）

台中市：阮錫琦（西苑高中）、林芳羽（大里高中）、洪秀敏（豐原高中）、李傑霖、賴信志、陳姿研（台中女中）、莊佳維（成功國中）、李建勳（萬和國中）

彰化市：林典蔚（彰化高中）

南投縣：洪誌陽（普台高中）

嘉義市：謝三寶（嘉義高工）郭夢瑤（嘉義高中）

台南市：林倉億（台南一中）黃哲男、洪士薰、廖婉雅（台南女中）劉天祥、邱靜如（台南二中）張靖宜（後甲國中）李奕瑩（建興國中）、李建宗（北門高工）林旻志（歸仁國中）、劉雅茵（台南科學園區實驗中學）

高雄市：廖惠儀（大仁國中）歐士福（前金國中）林義強（高雄女中）

屏東縣：陳冠良（枋寮高中）楊瓊茹（屏東高中）黃俊才（中正國中）

澎湖縣：何嘉祥 林玉芬（馬公高中）

金門：楊玉星（金城中學）張復凱（金門高中）馬祖：王連發（馬祖高中）

數學式邏輯思考的意義

洪萬生

台灣師範大學數學系退休教授



在日本的數學普及書寫中，永野裕之的著作風格一直都相當獨特。比方說吧，他的《天哪！數學原來可以這樣學》及《喚醒你與生俱來的數學力》，就結合了學校數學的解題技能與數學普及的博雅素養，大大地豐富了我們對數學普及敘事進路的另類想像。

在《數學式邏輯思考的建議》(数学的ロジカルシンキング)中，作者永野裕之除了延續前兩書的風格之外，還特別強調「數學式邏輯思考」對於網路時代的重要性。這種思考在溝通、解題以及充當概念工具等三個面向上，都不可或缺。儘管作者注意到這些問題時，主要是由於他身處日本這個特別的文化環境所激發，然而，邏輯思考卻已成為全球性浪潮席捲下，人際溝通的必要條件。這是普世的認知，絕對不只是日本社會的特定需求。

至於「邏輯思考」所以加上「數學式」這個形容詞，是因為作者認為「要培養邏輯思考所代表的兩種能力，亦即『(1)溝通能力』和『(2)問題解決能力』時，最合適的工具就是數學。」這也難怪，作者就讀中學後期時，曾經非常狂熱地投入數學學習，他深知數學知識活動的實作，是嚴格邏輯思考訓練的不二法門。這尤其在他創辦(個別指導補習班)「永野數學塾」之後，體驗更加深刻。事實上，早在《喚醒你與生俱來的數學力》中，他就曾向那些逃避數學的(高中)文組學生喊話，指出邏輯思考能力是不分文組或理組，所有人都應該具備的一種能力。這是因為誠如上一段指出，這是一個早已邁向國際資訊化社會的時代，「當一群成長環境不同、想法不同的人聚在一起，試圖解決各種以往未曾碰過的問題時，自然而然必須具備理解他人想法、用自己的想法說服別人的表

達能力，以及任何情況下都能將問題抽絲剝繭、解疑釋結的能力。」因此，為了鍛鍊邏輯力，他大聲疾呼：所有人都必須學習數學。

這些也足以解釋作者在本書中，為何會以數學為例，來說明邏輯思考如何有助於溝通、如何有助於解題，乃至於如何運用數學這個十分有力的工具。顯然由於這些相關數學內容與方法的解說，讓本書除了可以定位為一般人的知識普及讀物之外，也適合作為高中數學特色課程或是大學數學通識的絕佳參考書籍。以下，我將大略介紹本書內容，並藉以推薦本書給愛好數學普及的讀者。

對於一般讀者來說，本書第一章內容最具有邏輯思考的一般性參考價值。譬如說吧，本章的主題如整理與分類、圖表的恰當使用、PM 矩陣、Will-Skill 矩陣與 SWOT 矩陣如何解讀，以及簡報力之提升要件等等，對於企業公司主管或一般上班族，都是不可或缺的邏輯思考素養。當然，如何深刻感受冰冷數字的「意在言外」，更是不容忽視的數學素養，而這若能從數學課堂就開始培養，當然是更理想的學習策略。

在本書第二章中，與一般讀者非常相關的主題，就是第三節的「必要條件與充分條件」(necessary and sufficient condition)。一般的數學命題主要依賴這兩個條件來建立，只是目前「邏輯」單元已經從高中數學課程刪除，因此，在課堂上或許分配不到應有的教學時間 – 這是升學評量使然，不能責怪老師。然而，針對邏輯思考能力之提升，在口語或書寫中，學會正確的表達或釐清至為重要。誠如作者所指出，如果無法正確掌握這種邏輯思考，那麼，給定「若 A 則 B。所以為了 B，你必須做到 A。」與「若 A 則 B。所以為了 B，你只能選擇 A。」如何判斷這兩者等價但卻都是無效的推論，恐怕就「理未易明」了。

在本書第二章第三節中，作者還針對命題 (proposition)，介紹如何活用必要條件與充分條件，來準確判斷其真偽的方法。為了進一步說明這些方法，作者在本章第五節引進「否(定)命題」與「對偶命題」的概念，利用邏輯推論的等價性 (equivalence)，提醒我們「碰到難辨真偽的命題，試著用對偶去思考。」不過，他也非常明白地指出：在日常語言中，「即使『若 P 則 Q』為真，P 與 Q 之間也不見得存在因果關係。」因此，對偶命題的邏輯思考，還是要明辨，小心使用才好。

本書所有這些有關邏輯推論的說明，對於我們精確運用語言或文字助益甚大，只是當我們以數學為演示例 (demonstration) 時，要是缺乏 (與一般文字論述) 連結之提醒，大概就難以想像數學訓練可以提升或強化邏輯思考能力吧。因此，在本書第三章中，作者引進了許多相關的數學問題，一點也不令人感到意外。

第三章的數學問題之相關主題依序是概算(費米推論法)、賽局理論(game theory)、圖論(graph theory)，以及統計學(標準差、(統計)相關及迴歸分析)。顯然，作者是運用這些問題的求解過程，來說明數學如何被充當成一種邏輯思考工具來使用。譬如說吧，在概算主題(第三章第一節)上，作者所討論的問題就有：

- 地球以外有多少外星文明？
- 東京有多少人孔蓋？
- 芝加哥有多少位鋼琴調音師？
- 日本人一年有多少葡萄酒消費量？

至於如何概算這些問題？作者則是採用所謂的「費米推論法」，其中數學當然是主要的工具。此外，相親派對問題就是基於圖論來建立模式（pattern），而得以輕易解決。至於葡萄酒價格的預測問題，則是經濟學家亞森費特（Orley Ashenfelter）基於統計學所建立的多元迴歸式，這種「透過資料的解析推導出有益的（或出乎意料的）事實就叫做資料探勘（data mining），而亞森費特的葡萄酒方程式可以說是相當好的實例。」所有這些問題的解決，除了教育成規所重視的數學能力之外，還需要一種「綜合性的數學力」，那是東京大學錄取新生的重要指標。

因此，本書的書寫動機之一，應該也是作者試圖呼應東京大學的新生篩選條件，那就是，高中生藉由學習數學必須培養的三種能力：

- 數學式的思考能力
- 數學式的表現能力
- 綜合性的數學力

如果學校數學課程難以或無法滿足這個需求，那麼，研讀本書絕對是值得認真考慮的選項之一。另一方面，針對一般讀者，如果打算在職場提升表達能力，那麼，本書的例題及其求解說明，也相當具有啟發性，值得參考借鏡。

附記：本書中譯本將由今週刊出版社發行。