

HPM 通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系退休教授）
 主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）
 助理編輯：黃俊璋（和平高中）
 編輯小組：蘇意雯（台北市立教育大學）蘇俊鴻（北一女中）
 葉吉海（陽明高中）陳彥宏（成功高中）
 王文珮（青溪國中）
 英家銘（台北醫學大學）
 創刊日：1998 年 10 月 5 日 每月 5 日出刊
 網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horng>

第十九卷 第十二期 目錄 (2016年12月)

- ▣ 從「微波樹叢書」看到朝鮮儒家明算者南秉吉（1820-69）與實學者金正喜（1786-1856）在學問上的連結
- ▣ 和算家藤田貞資與其《精要算法》對和算普及化的影響
- ▣ 好書推薦：《德國一流大學教你數學家的 22 個思考工具》

從「微波樹叢書」看到朝鮮儒家明算者南秉吉 （1820-69）與實學者金正喜（1786-1856）在學問上 的連結

英家銘

臺北醫學大學通識教育中心

《HPM 通訊》團隊於 2002-3 年間在本刊，以及英家銘（2008），郭世榮（2009）等，分別從不同角度討論南秉吉《九章術解》所參考的《九章算術》底本為何，而眾人所得的共同結論，都是認為最有可能的底本是「微波樹本」（1777）。¹不過，南秉吉如何取得「微波樹本」，各家學者一直沒有定論。成均館大學大東文化研究院研究員姜珉廷女士在 2015 年完成她的博士論文，題目為「《九章術解》的研究與譯注」，其中也從史料與數學的角度討論南秉吉註解所根據的底本，認為南秉吉的「微波樹本」可能是來自朝鮮後期的知名實學家金正喜。²筆者在 2016 年四月造訪首爾之時，特地去拜訪姜珉廷博士，請教他關於南秉吉與金正喜的研究。筆者想利用這個機會，跟《HPM 通訊》的讀者分享筆者在首爾的學習，同時也呼應 15 年前在本刊開始的一系列研究與分享。以下的內容，除另有註解之外，大多出自姜珉廷博士的論文以及她和筆者的討論。

南秉吉本貫宜寧南氏，從朝鮮王朝初期開始，這個家族出現多位三品以上高官。南秉吉的母親出身安東金氏，則是十九世紀初葉至中葉朝鮮最有勢力的家族。南秉吉本人與兄長南秉哲歷任朝鮮地方與中央官職，仕途不能說不順遂。去年四月筆者造訪首爾時，也順便至京畿道水原市水原博物館參觀。南秉吉在 1863-1865 年間擔任水原留守。水原各地有許多的「頌德碑」，用來紀念在水原文武官員的政績，目前這些頌德碑就集中在水原博物館。下圖一是南秉吉的清德善政碑，豎立於 1865 年。看到這個石碑，也讓筆者感到與自己研究過的古人有更多的連結。



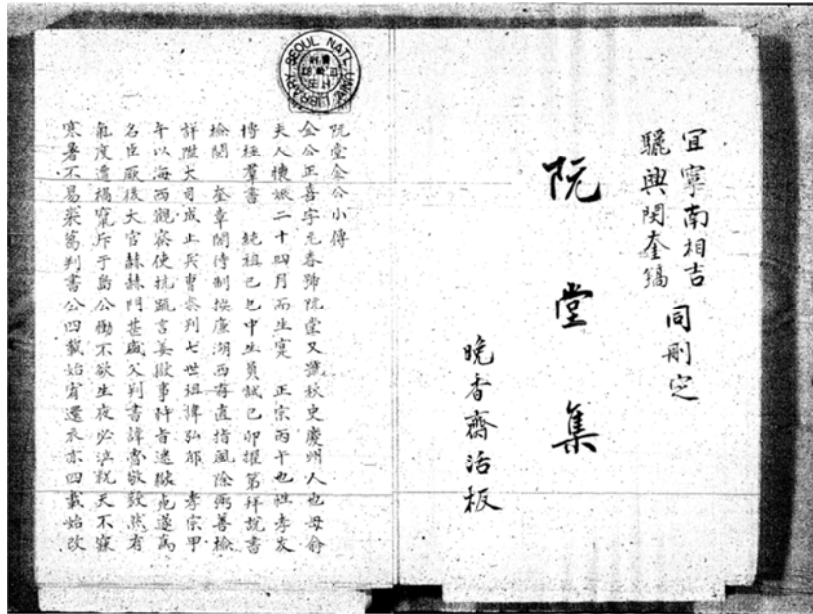
圖一：留守南公清德善政碑（攝於 2016.04.24）

南秉吉與兄長南秉哲，在儒學上可能都師承同一位老師，就是他們的母舅金道根（1785-1840），而這位金道根則是金正喜的好友。事實上，金正喜本人與南秉吉，也有直接的交流，以致於在金正喜死後，南秉吉協助編輯了金正喜的文集《阮堂尺牘》、《阮堂集》等等。下圖二是《阮堂尺牘》與《阮堂集》的書影，可以看到南秉（相）吉的名字。



圖二之一：《阮堂尺牘》

（韓國國立中央圖書館藏書，한古朝 44-다 2。）



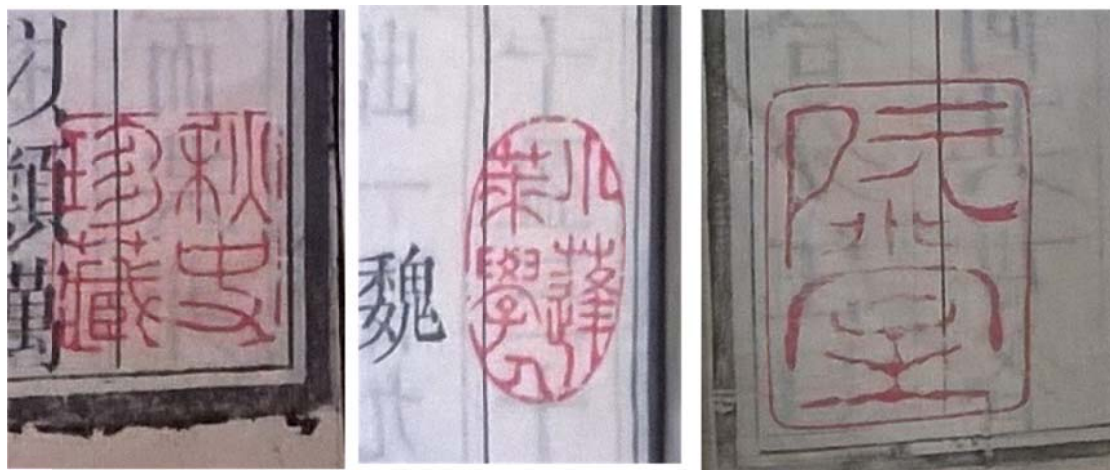
圖二之二：《阮堂集》
（首爾大學韓國學研究院藏書，奎 4906-v.1-5。）

1809年，金正喜隨父親初訪北京。金正喜一生中有多次機會到北京，也認識了阮元、翁方綱、徐有壬等清國的士人。³ 金正喜似乎特別欣賞翁方綱。何以見得呢？金正喜號秋史、阮堂，但他還有一個較不為人所知的號是「小蓬萊學人」，而翁方綱其中一個書齋的名稱，就是「小蓬萊閣」。⁴

金正喜的藏書目錄中，有「微波樹叢書」與「戴氏遺書」的紀錄。當代學者原本不知道這些書籍在金正喜死後被存放於何處，或者已經逸失。姜珉廷博士在研究《九章術解》的過程中，發現首爾大學收藏的善本書中，有兩套書上面有金正喜的印章，才解開了這個謎團。下圖三是有金正喜藏書章的微波樹本《九章算術》。



圖三之一：有金正喜藏書章的微波樹本《九章算術》
（首爾大學圖書館藏書，0230 138。）



圖三之二：金正喜印章，由左至右為「秋史珍藏」、「小蓬萊學人」、「阮堂」。

十九世紀之前，《九章算術》與其注解在朝鮮是已經失傳的。經過清代乾嘉學派的考證，《九章算術》才得以重新為世人所知。考慮金正喜與清國士人的關係，以及與南秉吉家族的淵源，姜珉廷博士在首爾大學找到的善本書及其上的印章，告訴我們《九章算術》再度傳入朝鮮的其中一種途徑，或許是金正喜在清國獲贈或是購入帶回朝鮮。而且，這套善本書，也可作為南秉吉以「微波榭本」為底本注解《九章算術》的有力證據。而清國與朝鮮的士大夫交流，在東亞數學史的研究上，或許還有很多值得研究的地方，等待大家發掘。

注解

1. 蘇俊鴻（2002），〈韓國數學文本《九章術解》卷一校勘〉，《HPM 通訊》，第 11 期，頁 3-7。
陳鳳珠（2002），〈《九章術解》卷二校勘〉，《HPM 通訊》，第 11 期，頁 8-12。
蘇意雯（2002），〈《九章術解》卷三校勘〉，《HPM 通訊》，第 12 期，頁 3-7。
蘇惠玉（2002），〈《九章術解》卷四校勘〉，《HPM 通訊》，第 12 期，頁 8-10。
楊瓊茹（2003），〈《九章術解》卷五校勘〉，《HPM 通訊》，第 1 期，頁 3-7。
葉吉海（2003），〈《九章術解》卷六校勘〉，《HPM 通訊》，第 1 期，頁 8-13。
黃清揚（2003），〈《九章術解》卷七校勘〉，《HPM 通訊》，第 2、3 期，頁 1-4。
林倉億（2003），〈《九章術解》卷八校勘〉，《HPM 通訊》，第 2、3 期，頁 4-9。
英家銘（2008），〈朝鮮數學家南秉吉《九章術解》校勘整理與綜合分析〉，《中華科技史學會學刊》，12 卷，頁 56-70。
郭世榮（2009），《中國數學典籍在朝鮮半島的流傳與影響》（濟南：山東教育出版社）。
2. 강민정（姜珉廷）（2015）。《『九章術解』의 연구와 역주》（《九章術解》的研究與譯注），成均館大學漢文古典翻譯協同課程博士論文。
3. 關於金正喜與徐有壬的交往，可參考蘇意雯（2001）〈從一封函札看中韓儒家明算者的交流〉，《HPM 通訊》，第 4 期。
4. <http://archive.ihp.sinica.edu.tw/ttscgi/ttsquery?0:0:mctauac:TM%3D%AF%CE%A4%E8%BA%F5>

和算家藤田貞資與其《精要算法》對和算普及化的影響

黃俊瑋

台北市立和平高中

一、前言

早期和算知識的發展與傳播，並非以公開的形式流傳，主要是在各個流派中，透過拜師學習的方式密傳。其中，關孝和（Seki Takakazu, ?-1708）所建立的「關流」，是江戶時期最大、最興盛，且是最主要的和算流派。以關流為例，這樣的密傳方式，始於十七世紀末期，一直維持到十八世紀中期後，因為大名和算家—久留米藩藩主有馬賴僮（Arima Yoriyuki, 1714 - 1783），¹於 1767 年刊刻《拾璣算法》，公開了關流密傳的「點竄」法則，²以及許多關流中密傳的數學知識，才使得關流和算知識慢慢走向普及化。而和算普及化的過程裡，關流和算家藤田貞資（Fujita Sadasuke, 1734~1807）扮演了重要的角色，本文中將從藤田貞資以及他著作《精要算法》的時代背景談起，輔以時人的評論，說明藤田貞資對於和算發展之貢獻與普及之功。

二、藤田貞資與《精要算法》之相關背景

藤田貞資生於今埼玉縣，又名定資，通稱彥太夫、字子證、號雄山。他本姓本田，22 歲（西元 1756 年）時成為新莊藩藩士藤田氏定之的養子，改姓藤田。寶曆 12 年（西元 1762 年），他隨山路主住進行曆法觀測，並入關流習算成為山路主住的徒弟，史稱「達算の名當時に高く、天下第一人と稱せられてゐた」，³足見他在關流中的重要性與地位。

明和四年（西元 1767），貞資 33 歲時得眼疾，而後辭為浪人，翌年，因其算學才能，受聘於關流和算家有馬賴僮所管理的久留米藩，受二十人扶持。⁴有馬賴僮聘任藤田貞資作為該藩的算學師範，在藩中教授數學。藤田貞資既為有馬賴僮的家臣，並在他資助之下，於 1781 年刊刻了《精要算法》一書，該書出版後，廣被用為算學教科書。⁵藤田貞資除了刊刻出版《精要算法》外，他著述與研究領域甚廣，然多以抄本形式流傳。⁶此外，

¹ 有馬賴僮是一位具藩主身份的關流和算家，他於 1767 年，托名豐田文景著《拾璣算法》一書，集當時重要算題與答術，並公佈了許多關流祕傳的知識。有興趣的讀者可參考張功翰，《《拾璣算法》初探》，2013 年。

² 「點竄」是當時關流和算家所發明、使用的符號系統與相關符號運算法則。有興趣的讀者，可參考筆者拙作〈江戶時期關流分式(數)符號表徵的發展與過渡〉，《台灣數學教育期刊》，2(1)。

³ 參考藤原松三郎，《明治前日本數學史》，1954 年。

⁴ 扶持是家祿與職祿以外的俸祿。一人扶持單位相當於每日男性給五合、女性給三合的口糧，按月支付。

⁵ 與《精要算法》相關的故事，是和算史上一場流派間的數學論戰，最上流和算家會田安明於 1785 年著《改精算法》一書，評論《精要算法》一書中不佳的題目與術文，因而開啟了關流與最上流和算家之間長達二十年的數學知識論戰，在這期間兩流派和算家不斷著書評論對方的著述，並反駁對方的論點。這場始於 1785 年的數學論戰暨流派間的競爭，一直到 1806 年後才告落幕。

⁶ 據遠藤利貞，《增修日本數學史》所述，他著作所涉及的數學主題包含了算梯、三較連乘解義、招差〔三次・四次〕相乘解、同後編、圓中三斜術、同解義、冪式解、一題十六術、演段三率、和漢算法答術解、探會類篇、累斜懷圓廉術、雜題五十條、諸角二距斜解術、塚積還原捷法、奇累角、同累斜式、剩一術、同解、偶角總術、奇面廉術、零約術、翦管括法、無奇、累截招差之法、塚壘招差新術、四不等臺積、索術、重積不知段數、勾股三圓、極數辨疑、求積正誤術、塚變術、同問答、三斜三圓、半梯三圓解術、變

藤田貞資亦與另一個關流重要和算家安島直圓 (Ajima Naonobum, 1732 - 1789) 亦有密切往來，⁷後來，安島直圓也為藤田貞資校訂《精要算法》一書。

有馬賴僮本身亦愛好算學，曾出版《拾璣算法》一書，在久留米藩這樣一個「以數學鳴其國」的環境裡，「數學」知識作為一種專門之學的重要性與地位相對提高。因算學才能受聘於此的藤田貞資，深受藩主有馬賴僮的重用，在久留米藩主對於數學的推廣下，當時整個大環境對於數學與數學家的重視程度不斷提升，包含林信有以及久留米藩的田中一貫夫等人，皆為《精要算法》寫序。其中，經筵講官林信有的序言中提到對藤田貞資的評價：⁸

藤田定資，字子證者，性穎悟而好數學，精絕久留米羽林侯之臣也屬者，著算法一書焉！侯雅好數學，⁹覽所著書，稱歎之，賜名精要算法。請序於餘々，聞子證受業於山路子，以此出任於侯焉。山路氏之子廷美，嘗與餘交善，廷美沒而不復聞其餘論也久矣。子證所著一出，而人皆知山路子之門有人哉！餘雖不知數學也，侯之精絕於數世，俱所知而侯家選衆而擢子證於山路子之門，子證以高第優仕得其君，今之所著書「觀之則其術之精可知已。但其書之為精々其道者自有論定焉，爾餘為之序，亦有感於廷美哉，若夫裨益於學者與為世之有用，則未遑具論也。¹⁰

從上述文字中，可見他對藤田貞資算學能力上的推崇，雖然藤田貞資並非關流掌門人，但他推崇藤田足可承繼關流算學之傳統。此外，田中一貫夫所寫的序言中，則提到他對數學的看法以及數學重要性之相關論述：

先王教民以六藝、而數有九章之法也、上自天地陰陽日月星辰造化之工、下至井田經界律度量衡賦稅之制、舟車所至、人力所通、天之所覆、地之所載、華夏蠻貊、無不依焉、而似鼻似口似耳似枘似圈似白、似窪者似污者、長者短者廣者狹者、無不由此以明也、實是經世治國之用、不可一日無者也。¹¹

由此序敘文的內容，可以看出數學這門學問與六藝之間的連結，並且無論「上自天地陰陽日月星辰造化之工」，或者下至「井田經界律度量衡賦稅之制」等，皆與數學有關，我們不難發現時人對於數學的重視，以及數學知識在當時的重要地位。最後，他也提出數學是「經世治國之用」的說法，換言之，數學不僅只是小技藝，而且關乎管理國家之

商解、括術、勾股累圓廉術、新法零約較弧、同無有奇、畹背解術〔見題の内〕、天元翦管術、解伏題交式斜乘諺解、拾璣算法術解、圓中四圓解術、累斜懷圓環錐解術、伏題數解、翦管五條之傳、次第衰術、諸招差之法、斷連變局法、日本算者系、切籠求積、拗臺求積、角術解〔關書之解〕、諸角蹈轍術、等面求積、斜弧三角術、側圓海鏡、識別雜記詳解、藤子諸算稿、具應算法、玉截答術、索術再后集等。由此可見他在算學研究與著作上的造詣。

⁷ 安島直圓亦為山路主住的徒弟，被譽為和算中興之祖。

⁸ 「經筵講官」為官名，掌為皇帝講論經史。中國的經筵官制始於宋代，蓋以天子與侍議侍讀等學官，講論經史畢，天子賜宴，故謂經筵。參考《中華百科全書》線上版：

<http://ap6.pccu.edu.tw/Encyclopedia/data.asp?id=7802>

⁹ 「侯」即為久留米藩之藩主有馬賴僮。

¹⁰ 藤田貞資，《精要算法》，林信有序。

¹¹ 藤田貞資，《精要算法》，田中一貫夫序。

大事。這樣的看法以及對數學知識的相關評價，可說大大提升了數學知識地位與重要性，這對於數學作為一門專業化的學科，以及學習數學的正當性而言，不啻是最大的助力。

另一方面，田中一貫夫的序言中，同樣不免俗地提到對藤田貞資的評論與推崇：

藤田君定資、天質穎敏、以數鳴世、自其釋褐於我藩、麾諸生建旗鼓久矣、而其所著之書三編、欲壽諸棗梓以施同志、謹請我公之名之、公嘉其志、¹²乃賜名曰精要算法焉、蓋公亦好數、於其妙也、一世已稱歎之、則不啻恩眷之腆、又此書精而要、不置喙可知已、願此書專欲便於學者、故近借商賈貨買之言以立術。¹³

由此評價，可看出藤田貞資在當時關流算家中的重要地位與算學才能。此外，此時期關流重要和算家安島直圓，亦為藤田貞資的《精要算法》校訂撰跋，跋文中提到，本書內容主要為藤田貞資自所設計的問題與所求得之術文，包含了買賃借相關算題、方圓容術相關雜題等，理至深遠而術簡的問題共計百餘條。¹⁴

三、《精要算法》內容簡介與特色

《精要算法》一書，共包含了上卷、中卷、下卷 3 卷。〈凡例〉中提到，算數可分成「用之用」、「無用之用」、「無用之無用」三類，其中買、買、賞、貸、鬥、斛、丈、尺、城、天官、時日等屬於有用之用，而本書的〈上卷〉與〈中卷〉的內容主要是與買、買、賞、貸類有關的日用算題，這類問題的內容藤田是以日文書寫。至於〈下卷〉的內容，則是一般和算流派內較專深的數學知識與題術集，這部份藤田貞資則是以漢字寫成。由此可見，此書〈上卷〉與〈中卷〉的內容，皆與日常生活所需計算有關，具實用性價值，訴諸的學習對象是一般庶民階層。而下卷則較具學術性價值，整本書由淺入深，由實用到學術，展現出教科書的特色。

在《精要算法》〈下卷〉的開頭，藤田便列出了兩個數值表，並對表的內容加以說明：「今欲求弦一千以下鈎(勾)股弦無奇俗謂無不盡，件件俱不用同矩假令勾三寸股四寸弦五寸或勾六寸股八寸弦一十〇寸之類也，後(倣)此，其件件如左。」¹⁵亦即第一個表的內容，列出了最長邊小於 1000，且三邊長皆為整數的直角三角形各邊之長，而各類相似三角形僅列出邊長最小者。¹⁶表的最後，藤田也補充說明共有 158 個滿足此條件的三角形：「右勾股弦無奇數一百五十八條」。接著，藤田貞資繼續說明第二個表的內容：「今欲求大斜一百以下，三斜及積各無奇，件件俱不用同矩，其件件如左。」亦即第二個表的內容，主要列出了最長邊長小於 100，且三邊長與面積皆為整數的直角三角形各邊之長，同樣地，各類相似直角三角形書中僅列出邊長最小者。表的最後，藤田也補充說明共有 116 個滿足此條件的三角形。

¹² 「公」即為久留米藩之藩主有馬賴僮。

¹³ 藤田貞資，《精要算法》，田中一貫夫序。

¹⁴ 藤田貞資，《精要算法》，安島直圓跋，此跋文原為日文，這裡的內容為筆者所譯。

¹⁵ 藤田貞資，《精要算法》，〈下卷〉。

¹⁶ 即滿足三邊長的最大公因數為 1。

之後，他列出〈下卷〉方圓相關問題中所用之「定率」：

方斜率 1.414213562373 有奇
圓積率 7.853981633974 有奇

其中的方斜率為正方形斜邊與邊長之率，即 $\sqrt{2}$ ；而圓積率為圓與外切正方形之率，即 $\frac{\pi}{4}$ 。對於這兩個常數，關流和算家，早已求得了相當精確的近似值，不過藤田可能是基於教學或實用上的原故，僅列出小數點後十餘位的近似值。

接著，《精要算法》〈下卷〉續列六十個與方圓、容圓、容球有關的問題，以及解這些問題的術文。這些問題的設計以及問題的公式解—術文，可看出藤田貞資在算學研究的創造力與解題能力。其中，最後一個問題的內容為：「今有角形，其數若干角面若干問角中徑幾何，請起從三角雖至萬萬角，依一術歸除式答之」，這裡藤田貞資列出了一個角中徑術，此公式可以一般化地用來處理所有正多邊形，他並實際據此公式，計算並表列出邊長為 1 單位的正三角形至正二十邊形的角中徑長。換言之，他一般化地表示出求正多邊形外接圓半徑的公式。

綜觀《精要算法》一書，從基礎日用算題，過渡到各類較精深的幾何問題，由易至難，由實用到專業，實為一本有系統的算學教科書。藤田貞資出版了《精要算法》後，名聲大振，慕名入其門下學算者相當多，門生遍及各地，大大地推動了十八世紀末期和算的普及化與庶民化。¹⁷他的門人遍及許多地方，在各地的神社寺院奉納算額，影響益盛。其中，最重要的弟子包含其子藤田嘉言與神谷定令、菅野元健等人。後來，藤田貞資也與其子藤田嘉言，選錄關流弟子奉納各地的算額，刊刻了《神壁算法》、《增刻神壁算法》與《續神壁算法》等算額集，這也促進了數學交流與普及。

四、結語—和算普及化

《精要算法》刊刻問世之後，¹⁸成為廣受歡迎的和算教科書，藤田貞資也因而成為極具盛名的算學教師，廣收門生之下，也大大促進了和算知識之傳播與推廣，因而此書在和算普及化上，功不可沒。

同時，隨著十八世紀和算的普及化之後，原本只以漢學為主（自寬永至寶永年間）的藩校教育，到了十八世紀末的天明、享和年間，¹⁹當時 45 間藩校之中，已有 13 間在學規中將算學列為必習科目之一，²⁰促進了算學的學習與傳播，也提升了算學在武士教

¹⁷ 藤田貞資與其子藤田嘉言所編《神壁算法》、《續神壁算法》以及《增刻神壁算法》這三本書裡，收錄了藤田氏弟子所奉納之算額，從奉納的地點、時間、與奉納者來看，可佐證他的門徒相當多，也遍佈許多地方。

¹⁸ 從安島直圓等人作序跋所歷日期來看，此書內容應成於安永八年(1779 年)之前。

¹⁹ 天明至享和年間約是 1781~1803 年。

²⁰ 參考洪筠 (2008)，《江戶時代的藩校學規研究》，頁 84~86。

育中的重要性。除了各地藩校納入算學的學習外，在這股算學普及風氣，加上當時社會經濟等大環境因素的影響下，習算者的身份已從早期武士階層慢慢轉變成一般的農民、庶民階層，進入十九世紀之際，許多和算家在各地開設算學道場，大量收徒，也進一步促進了和算知識的普及，²¹吸引更多的人學習算學，使得和算版圖在十九世紀之後大為擴張。

另一方面，由於和算的普及，帶動時人學習算學的風氣，加上關流門人眾多，間接使得算額奉納的風氣也在此時期慢慢走向高峰，諸如《神壁算法》、《增刻神壁算法》與《續神壁算法》等，選錄了關流弟子奉納各地的算額集陸續問世。這些奉納各地的算額與算額集，對於十九世紀之後的和算發展、和算家之發表，以及和算家之間的交流，皆具有重要的意義與影響。²²

主要參考文獻

(一) 一手文獻

藤田貞資 (1781)，《精要算法》。

(二) 近人著作

洪筠 (2008)，《江戶時代的藩校學規研究》，雲林：國立雲林科技大學漢學資料整理研究所碩士論文。

黃俊瑋 (2013)，《關流算學研究及其歷史脈絡：1722-1852》，台北：國立台灣師範大學數學系博士論文。

黃俊瑋 (2015)，〈江戶時期關流分式（數）符號表徵的發展與過渡〉，《台灣數學教育期刊》，2(1)，台北：台灣數學教育學會。

張功翰 (2013)，《《拾璣算法》初探》，台北：國立台灣師範大學數學系碩士論文。

藤原松三郎 (1954)，《明治前日本數學史》，東京：岩波書局。

(三) 電子資料庫

東北大學圖書館電子資料庫：

http://dbr.library.tohoku.ac.jp/infolib/meta_pub/G9200001CROSS

²¹ 例如，長谷川寬 (Hasegawa Hiroshi, 1782~1838)、千葉胤秀 (Chiba Tanehide, 1775~1849) 等和算家，皆號稱收徒上千。

²² 有興趣的讀者可參考筆者拙作，〈江戶時期寺廟中的數學交流〉，《中華科技史學會學刊》，第 19 期，2014 年。

好書推薦：《德國一流大學教你數學家的 22 個 思考工具》

林倉億
國立台南一中

書名：《德國一流大學教你數學家的 22 個思考工具》

作者：克里斯昂·赫賽 Christian Hesse)

出版社：漫遊者文化出版



某天，台南一中數學科辦公室的電話響起，是通來自校外的電話，說要找任教數理資優班的老師。科內三位任教數理資優班的老師，恰巧只剩筆者在場，所以，就接了這通電話。原來是位熱心的家長，看了《德國一流大學教你數學家的 22 個思考工具》之後，真心想要推薦給學生，但沒有適合的管道，所以，就直接找上數學科教師。而就是這麼恰巧，筆者也擔任敝校這學期圖書館的好書導讀活動，所以，就答應了這位家長的建議。在此先向這位家長致謝，讓筆者藉這次的機會讀到一本好書，也跟台南一中 20 餘位同學分享、導讀了這本好書。

《德國一流大學教你數學家的 22 個思考工具》改寫自克里斯昂·赫賽教授專為一門課而精心安排的教材，該門課是德國司圖加特大學 2006 年夏季學期的「與數學的相遇」，特別是為非數學系的學生而開設的。作者希望透過這本書，「提供讀者至少雙重的激勵：參與一個使你更加聰明的冒險旅程，以及享受解題過程所產生的美感。」如同書名，作者在本書中總共介紹了 22 個思考工具：

- | | | | |
|------------|----------|-----------|------------|
| 1. 類比原則 | 2. 富比尼原理 | 3. 奇偶原理 | 4. 狄利克雷原理 |
| 5. 取捨原理 | 6. 相反原則 | 7. 歸納原則 | 8. 一般化原則 |
| 9. 特殊化原則 | 10. 變化原則 | 11. 不變性原理 | 12. 單向變化原則 |
| 13. 無窮遞減法則 | 14. 對稱原理 | 15. 極值原理 | 16. 遞迴原理 |
| 17. 步步逼近原則 | 18. 著色原理 | 19. 隨機化原則 | 20. 轉換觀點原則 |
| 21. 模組化原則 | 22. 蠻力原則 | | |

為何是這 22 個，作者並未說明，我們也先別深究「22」這數字了。在每一個思考工具之中，作者精心挑選了若干個數學例子，並引導讀者透過這些例子來認識、體驗各種思考工具，並享受解題過程中的樂趣與美感。比方說吧，在第 18 個思考工具「著色原理」中，作者就用它來證明「費馬小定理」。數論中的定理竟然用著色的想法來解釋並證明，

對筆者而言，真的是很美妙的一個閱讀經驗！又比方說，

$$\sum_{k=1}^n k \cdot C_k^n = 1 \cdot C_1^n + 2 \cdot C_2^n + 3 \cdot C_3^n + \cdots + n \cdot C_n^n = n \cdot 2^{n-1}$$

這個組合公式，現行的高中教材安排中，高三上學期推導二項分佈的期望值與變異數時，才會運用到它，至於引進課堂時機呢，則往往是在高一下學期排列組合單元中，被當作組合計算的練習題目。僅僅作為一個練習題目，與高一學生的學習內容其實並沒有太多的連結，想當然爾，這公式就淪為一個運算技巧的演示。因此，不少高中老師，包括筆者在內，並不會主動在課堂上引入這個公式。然而，在本書第 7 個思考工具「歸納原則」中，作者使用兩個十分漂亮、機智的想法，來證明這個組合公式，而那漂亮、機智的想法，正好是運用高一學生學習到的排列組合。筆者讀完這兩個證明後，除了讚嘆其美妙之外，更有一股興奮感，期待在課堂上也讓學生體驗到這美妙的經驗。至於這兩個十分漂亮、機智的想法為何？筆者就賣個關子，不破梗，讓讀者自行去搜尋了。

雖然這本書中引進了不少很棒的例子，但有些例子似乎被「錯置」了。例如上文提到的組合公式，理應放在第 2 個思考工具「富比尼原理」中才更為貼切。誠然，一個例子不必然只專屬於某一個思考工具，但安排不當，卻也讓讀者不容易體認到作者的用意。再者，由於作者原先是針對非數學系的學生而開設的課程，因此，書中所舉的例子，幾乎都是不需要太多數學先備知識的例子，大都出自數列級數、排列組合、機率、統計的範圍。也正因為這個緣故，許多深刻、美麗的數學概念或定理，在這本書中缺席了！更進一步地說，思考工具雖然可以幫助我們思考，但若不能對數學概念有正確、深入的認識，光只有思考工具也是徒然的！就好比一個廚師，若缺乏對食材本身的知識，空有十八般廚藝，也做不出真正的珍饈！這倒讓筆者想到，高中老師除了可以在課堂上，搭配數學概念，適時地引入這些思考工具外，還能以此書為架構，挑選適合學生的章節，並適切地補充高中課程中的例子，那麼，德國司圖加特大學的「與數學相遇」課程，就可以轉化成為台灣高中多元選修課程中的一門課，豈不美哉！

最後，回到筆者接到的那通熱情電話。由於當時已接近上課時間，筆者趕著去上課，無法與該位好心的家長多聊聊。就在要匆忙結束對話的時候，該位家長突然提到，他發現書中有寫錯，要提醒學生，而那錯誤很明顯，只要用心去看，一定會發現的。雙方禮貌地致謝後，通話就結束了。這下，筆者除了要去介紹、導讀這本書外，還多了一個挑錯、除錯的任務。確實，這本書中有幾個錯誤。筆者猜測，該位好心家長所提的錯誤，很可能是書中第 18 頁 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1+2+3+\cdots+n)^2$ 這公式的視覺化證明的第一個圖，也就是 **proof without words** 所用的圖。的確，這個圖形的錯誤，會讓讀者，特別是高中生感受不到這個級數公式之美。然而，相較於這個錯誤，第 236 頁的「 k 矛盾比賽結果」，更讓筆者費思量。作者在該頁所舉的例子，應該是「有七名選手參賽的 3 矛盾比賽結果」（按：即有七位選手，每位選手與其他位選手各比賽一次，比賽結果是每位選手恰好都 3 敗），但不知何故，書中將數字 3 寫成了數字 2，這個錯誤，困擾了筆者甚久！再者，為何用「 k 矛盾」來稱呼這種結果，筆者也是百思不得其解，不知道這是作者原來用詞的意義，還是翻譯者誤會了原意。由於原文是筆者完全不懂的德文，無能

查證了！總而言之，瑕不掩瑜，這本書確實是值得推薦的一本好書。

1. 為節省影印成本，本通訊將減少紙版的發行，請讀者盡量改訂 PDF 電子檔。要訂閱請將您的大名、地址、e-mail 至 suhy1022@gmail.com
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請 e-mail 至 suhy1022@gmail.com
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/hpmlatter.htm>
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本：陳昭蓉（東京 Boston Consulting Group）

基隆市：許文璋（銘傳國中）

台北市：英家銘（台北醫學大學）楊淑芬（松山高中）杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中）

蘇俊鴻（北一女中）陳啟文（中山女高）蘇惠玉（西松高中）蕭文俊（中崙高中）

郭慶章（建國中學）李秀卿（景美女中）王錫熙（三民國中）謝佩珍、葉和文（百齡高中）

彭良禎、鄭宜瑾（師大附中）郭守德（大安高工）張瑄芳（永春高中）張美玲（景興國中）

文宏元（金歐女中）林裕意（開平中學）林壽福、吳如皓（興雅國中）傅聖國（健康國小）

李素幸（雙園國中）程麗娟（民生國中）林美杏（中正國中）朱廣忠（建成國中）吳宛柔（東湖國中）

王裕仁、蘇之凡（木柵高工）

新北市：顏志成（新莊高中）陳鳳珠（中正國中）黃清揚（福和國中）董芳成（海山高中）孫梅茵

（海山高工）周宗奎（清水中學）莊嘉玲（林口高中）王鼎勳、吳建任（樹林中學）陳玉芬

（明德高中）羅春暉（二重國小）賴素貞（瑞芳高工）楊淑玲（義學國中）林建宏（丹鳳國中）

莊耀仁（溪崑國中）、廖傑成（錦和高中）

宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中）吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）林宜靜（羅東高中）

桃園市：許雪珍、葉吉海（陽明高中）王文珮（青溪國中）陳威南（平鎮中學）

洪宜亭、郭志輝（內壢高中）鐘啟哲（武漢國中）徐梅芳（新坡國中）程和欽（大園國際高中）、

鍾秀瓏（東安國中）陳春廷（楊光國民中小學）王瑜君（桃園國中）

新竹市：李俊坤（新竹高中）、洪正川（新竹高商）

新竹縣：陳夢綺、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）

苗栗縣：廖淑芳（照南國中）

台中市：阮錫琦（西苑高中）、林芳羽（大里高中）、洪秀敏（豐原高中）、李傑霖、賴信志、陳姿研（台中女中）、莊佳維（成功國中）、李建勳（萬和國中）

彰化市：林典蔚（彰化高中）

南投縣：洪誌陽（普台高中）

嘉義市：謝三寶（嘉義高工）郭夢瑤（嘉義高中）

台南市：林倉億（台南一中）黃哲男、洪士薰、廖婉雅（台南女中）劉天祥、邱靜如（台南二中）張靖宜（後甲國中）李奕瑩（建興國中）、李建宗（北門高工）林旻志（歸仁國中）、劉雅茵（台南科學園區實驗中學）

高雄市：廖惠儀（大仁國中）歐士福（前金國中）林義強（高雄女中）

屏東縣：陳冠良（枋寮高中）楊瓊茹（屏東高中）黃俊才（中正國中）

澎湖縣：何嘉祥、林玉芬（馬公高中）

金門：楊玉星（金城中學）張復凱（金門高中）馬祖：王連發（馬祖高中）