HPM通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系退休教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）
助理編輯：黃俊瑋（和平高中）
編輯小組：蘇意雯（台北市立教育大學）蘇俊鴻（北一女中）
葉吉海（陽明高中）陳彥宏（成功高中）
王文珮（青溪國中）
英家銘（台北醫學大學）
創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng

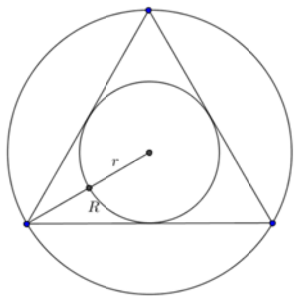
第十九卷 第二、三期合刊 目錄（2016年3月）

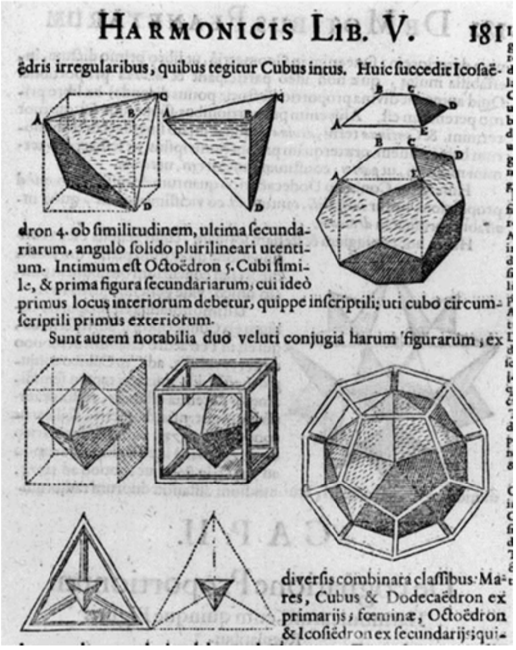
天文學中的數學模型（III）—克卜勒的天文模型

蘇惠玉
台北市立西松高中

克卜勒與戰神之間的戰爭

德國天文學家克卜勒（**Johannes Kepler, 1571−1630**）在大學學習時，原本對神學是比較有興趣的，但是後來在他的天文學教授推薦下，到奧地利一所新教的教會學校當數學教師。某天上課在黑板上畫著正三角形的內切圓與外接圓時，發現這兩者的半徑比居然與哥白尼《天體運行論》中的木星與土星軌道（均輪）半徑比非常接近，因此大受啟發，整個生活為之改觀。他假定當時已知的除了月亮之外的六大行星都以這樣的方式圍繞太陽排列，使得幾何圖形可以完美地鑲嵌其中（見下圖 **1**）。一切像是天意註定好的一樣，六大行星中間的五種正多面體。這個關於行星軌道與距離的幾何理論讓克卜勒寫下《宇宙的奧秘》（***Mysterium Cosmographicum***）一書，於 **1596** 年出版。儘管克卜勒這個假設的前提似乎很難行得通，但是結果卻是驚人的準確。他將這本書寄給當時赫赫有名的觀測天文學家第谷・布拉赫（**Tycho Brahe, 1546−1601**）。當他因為宗教原因被迫離開教書的城市時，拜訪了當時在布拉格進行觀測的第谷，第谷當時正缺一位數學助理，克卜勒因為他的數學能力得到了這份工作。





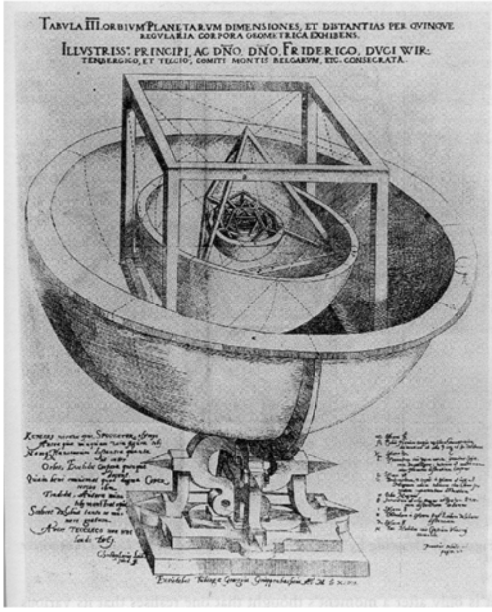
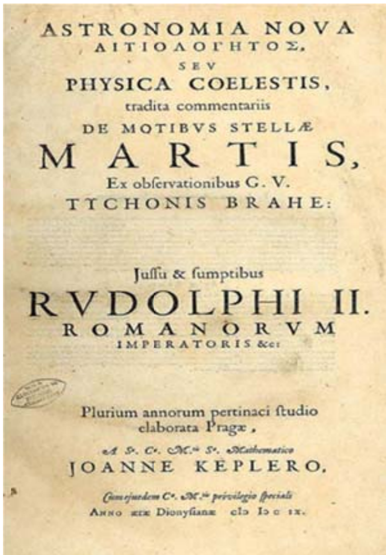


圖 1 左圖為《世界的和諧》原著中的插圖，右圖為《宇宙的奧秘》1621 年版本中的圖。



在與第谷合作的這段時間，第谷就真的只把克卜勒當成助理，不願讓他接觸真正的觀測數據，僅想利用克卜勒的數學長才，去建構一個與哥白尼模型完全不同的體系。為了安撫克卜勒，第谷將很難搞的火星軌道問題交給他去研究，這一研究下去就是長達八年的戰鬥，因為火星在西方以戰神 **Mars** 命名，因此，克卜勒常將這段研究火星軌道的漫長奮鬥過程，比喻為與戰神之間的戰爭（**warfare with Mars**）。不過，他付出的心力都是值得的。在第谷突然因為膀胱感染去世之後，克卜勒使了點小手段得以掌握第谷的觀測資料，因為有這些完整詳盡且精確的觀測數據，以此為基礎上，加上複雜的數學運算，克卜勒於 **1605** 年公佈他的第一定律，並與第二定律一起發表在 **1609** 年出版的《新天文學》（***Astronomia nova***）中。

在此我們先暫停來整理一下，克卜勒時代的天文學家是怎麼進行天文觀測的？如同我們以經緯度標示地球上的點，當時觀測時測量的是行星投影在以恆星為背景的天球上的經緯度。在上一篇中我們已經認識了所謂的黃道與黃道帶，現在是時候把座標轉換一下了。事實上在運行的是地球，因此黃道（**ecliptic**）即是地球在天體上的平均運行軌道（投影在恆星背景上）。在 **1600** 年代，天文學家們將這個軌道上下一條寬 **9** 度的區域稱為黃道帶（**Zodiac**），並將分布在上面的星座以座落在這個大圓直徑兩端的天蠍座 **α** 星（**Antares**）與畢宿五（**Aldebaran**）為基準點，每 **30** 度為一個劃分，分成十二星座。天文學家所進行的觀測就是看行星投影在黃道帶上哪一個星座上面的度數即是它的經度。緯度方面則是在天球的赤道面與北極星（北半球）之間分成 90^0，測量北極星與行星之間的夾角。

克卜勒在天體模型建立上的一大優勢，正是第谷精確的觀測數據，在當時這些數據不管是在量或質方面，都是數一數二的，更不是托勒密或哥白尼時代，沒有任何工具所進行的觀測能夠比擬。再加上克卜勒認為自己稍微勝過哥白尼一點的地方，就在於認識到行星的運行是從轉動上的地球觀測的，並以真正的太陽為固定的參考點，而不是運行的圓形軌道之圓心（**mean sun**）。例如，在＜天文學中的數學模型（**II**）＞（見第十八卷十二期）提到的行星衝（**opposition**），就應該考慮真正的太陽、地球與行星成一直線的情況。（見下圖 **2**）

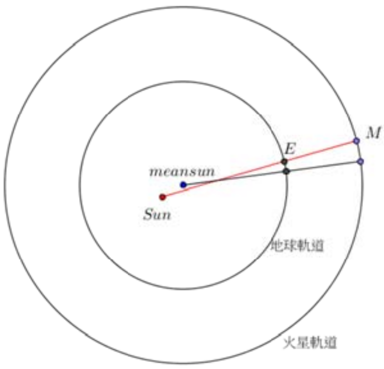


圖 **2**：紅色為真正的行星衝，兩者間的夾角為錯誤假設造成的誤差

事實上，《新天文學》有個副標題叫做「論火星」，克卜勒將他與火星多年的奮戰心得與心血結晶寫在這本書上，其主要目標當然就是要決定火星的軌道半徑。在第一章中，克卜勒先將第谷與他自己對火星的觀測資料，詳細地畫了一張從地球觀測火星的運行位置圖，時間就從從 **1580** 年畫到 **1596** 年，見圖 **3**。這張圖猛一見，是不是很像餅乾上面的拉花？克卜勒就將這個圖稱為「四旬齋節的椒鹽餅」（***panis quadragesimalis***），從這個圖上可以清楚看出火星的逆行現象。接著，克卜勒必須要建立自己的天體運行模型。他將托勒密的匀速點（**equant**），均輪與本輪的觀念再次引入，假設火星在以太陽及匀速點中點為圓心的圓形軌道上，繞著匀速點做等角速度運行。接著從觀測數據著手，這些數據「應該」要符合這個假設的模型，於是，他分別從自己以太陽為參考點的觀測數據，以及托勒密以匀速點為參考點觀測的觀測數據中挑選四個時間點，兩組系統中的交點應該就是火星圓形軌道上的點（如圖 **4**）。

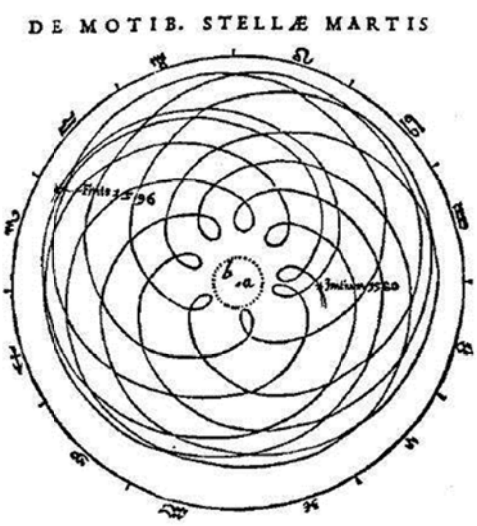


圖 **3**：中心的 **a** 點代表地球的位置

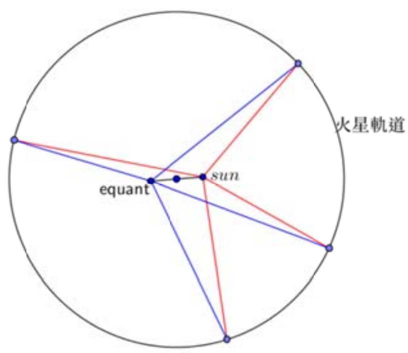


圖 **4**：太陽到匀速點的距離已知

克卜勒用了一種重複步驟的迭代法來進行計算，這是個相當繁瑣又複雜的計算過程，在這些計算之後，他抱怨說：

> **如果你覺得這個令人厭煩的方法讓你覺得厭惡，那麼你應該要對我充滿同情，因為我花費了大把時光計算了至少七十次。（If this wearisome method has filled you with loathing, it should more properly fill you with compassion for me as I have gone through it at least seventy times at the expense of a great deal of time.）**

克卜勒千辛萬苦地計算得到這個圓形軌道之後，總要檢驗一下是否符合觀測資料吧。他將第谷與自己正確的觀測值代入，反推回火星應該要在的位置，發現誤差在$2'$之內，這個大小剛好在第谷觀測資料的誤差容忍值之內，所以，這個圓形軌道應該沒有錯了。耶？圓形軌道？

克卜勒並沒有就此停手，他接下來要計算太陽到火星的距離。下面，簡單說明一下他的計算方式。如下圖 **5**，他先選擇一個火星位於行星衝的時間點及其位置，然後經過一個週期（**687** 天）之後，此時地球在 **E** 的位置，其中 **θ** 與 **α** 都是觀察可得的數據，而且太陽到地球的距離$\overline{SE}$已知。由簡單的正弦定理：$\dfrac{\overline{SM}}{\sin(180^0-\alpha)}=\dfrac{\overline{SE}}{\sin(\alpha-\theta)}$即可求的日−火距$\overline{SM}$。很不幸地，克卜勒用真實的觀測數據計算出來的日−火距，跟模型中算出來的日−火距並不一致。換句話說，模型的假設錯誤。在模型中的假設，一者為勻速點的存在，一者為圓形軌道，哪一個錯了？

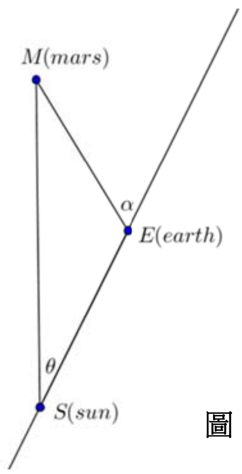


圖 **5**

克卜勒的面積定律

現在先把焦點轉回面積定律。克卜勒起初還是使用火星圓形軌道的假設，雖然他已知不正確，但至少可以提供較為近似的結果。在克卜勒之前的天文學家，已經知道行星在近日點時運行速度較快，在遠日點時走得較慢，他想要知道的是火星到達遠日點之後，所經過的弧長與所用時間之間的關係。在此克卜勒假設太陽到火星的距離與速度成反比，

即$\frac{r_1}{r_2}=\frac{v_2}{v_1}$（我們現在知道這個關係只在近日點與遠日點才成立）。這個問題的困難之處在於行星每個時刻的速率皆不相同，在微積分這個的工具還沒發明之前，克卜勒從阿基米德尋求圓周長與直徑之比的過程中得到啟發，他曾在自己寫的另一本書《測量酒桶的新立體幾何》（***Nova stereometria doliorum vinariorum,Linz***）中，以將圓分割成無窮多個小三角形的方式，解釋了阿基米德所得的圓面積與直徑上正方形面積比，他相當地熟悉這種處理曲線面積的分割手段，以及這種方法可以產生的威力，事實上，在《新天文學》中，他曾多次引用阿基米德的書籍與內容。

透過他的速度假設，他將速度轉換成每個無窮小弧段所需的時間與太陽−火星之連線的向徑（距離）成正比，那麼，在選取適當的單位之後，時間就可以連線的這段向徑表示，最後他推理得到通過有限弧段所需的時間，可以看作構成那個部分扇形的所有向徑和，也就是，太陽−火星連線所掃過的面積（見圖 **6**）。儘管他知道這個無窮小的論述不夠嚴謹，他還是將它陳述成一個「法則」（**law**），亦即我們現在所稱的克卜勒行星第二定律：太陽與行星的連線在相等的時間內掃過的面積相等。我們可以看到這是一個基於不正確的圓形軌道假設與不正確的速度關係所得到的正確關係。克卜勒僅在《新天文學》的最後一章第 **60** 章中，重新以橢圓的性質說明這個面積定律，倒是沒有修改他錯誤的速度假設。

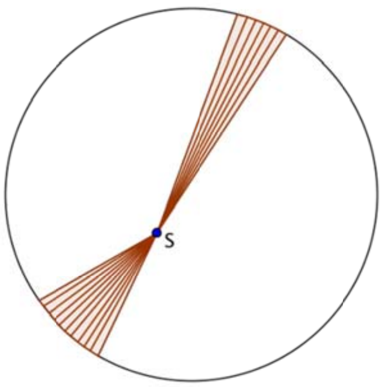


圖 **6**：將扇形作無窮多個三角形的分割，經過每一無窮小弧段的時間可以每一點之向徑表示，如果面積一樣，所經過的時間就相同。

克卜勒的橢圓軌道定律

如上所述，克卜勒起初假設火星的運行軌道為圓形，但是，在他對火星到所假設的圓形軌道中心的距離，進行了各種計算之後，發現火星在近日點與遠日點附近時，到軌道中心的距離較遠，而其他部分的距離較小（見圖 **7**），因此，軌道不可能是圓形。雖然要放棄這種從古希臘以來一直根深蒂固的基本信念，對克卜勒而言並不容易，更何況還會摧毀克卜勒一直以來想要追求的「宇宙和諧」，不過基於對真理的追求，經過多年的努力與掙扎之後，為了符合實際觀測數據，他只好將軌道轉而假設成某種卵形曲線，並開始了長達 **2** 年修正、再修正的計算過程。

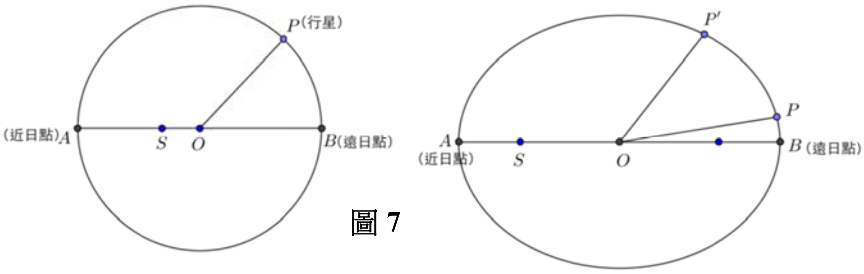


圖 7

克卜勒利用觀測的 **19** 種不同位置的太陽−火星距離描繪計算火星的軌道，如圖 **8**，若設圓的半徑為 **1**，太陽到圓心的距離 $\overline{NH}$ =**e** 已知。他發現在圓周與這個類似於橢圓的卵形曲線之短軸頂點間的距離 $\overline{EB}$ =**0.00429**，剛好等於 $\frac{1}{2}e^2$ ，因此可得：

$\overline{HE}:\overline{HB}=1:(1-\frac{e^2}{2})\approx 1+\frac{e^2}{2}:1$ =**1.00429**：**1**。

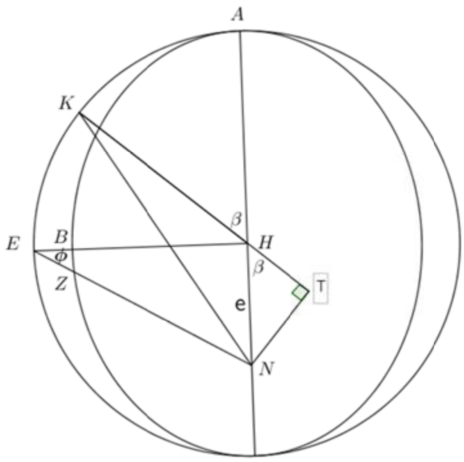


圖 8

1.00429 這個數字引起了克卜勒的注意，他注意到這個數字剛好就是 $5^0 18'$ 的正割值，即

$\sec(5^0 18')=\frac{1}{\cos(5^0 18')}$ =**1.00429**，在這種情形中，$5^0 18'$ 剛好是 $\overline{EH}$ 與 $\overline{EN}$ 的夾角，此時 **E** 為與遠日點 **A** 成 **90⁰** 時圓周上的點。因此 $\overline{HE}:\overline{HB}\approx$ $\overline{NE}:\overline{NZ}\approx\overline{NE}:\overline{EH}$ ，其中 **Z** 為火星軌道上的點。見到此克卜勒有如大夢初醒，他說：

當我看到這時，彷彿從夢中被喚醒，見到一道曙光像我穿透。我開始了底下推理。

此時克卜勒靈機一動，當 $\overline{HP}$ 與 $\overline{HA}$ 的夾角為任意角 **β**（不一定 **90⁰**）時，

$\overline{NP}$ ：（太陽−火星距離）＝ $\overline{NP}$ ：（在直徑上的垂直投影 $\overline{PT}$ ）

換句話說，太陽−火星距離= $\overline{PH}+\overline{HT}$ =**1+** $e\cos\beta$ （令其為 **ρ**）。但是這個軌道曲線到底為何？甚麼樣的曲線才會滿足太陽到火星的距離函數 $\rho=1+e\cos\beta$ ？這時火星的位置又該如何決定呢？

克卜勒在《新天文學》中曾前後採取了三種不同的軌道曲線，如圖 **9**，對於任意角度 **β** 所決定的火星位置 **P**，過太陽位置所在的 **S** 作 $\overline{SP}$ 的平行線，交原先的圓形軌道（均

輪）於 **K'**點，三種畫法皆以 **S** 為圓心畫圓，分別如下：

1. 使用在《新天文學》的第 **39-44** 章，以 $\overline{SP}$ 為半徑畫弧，其中 **P** 為預測之火星位置。
2. 出現在 **45-50** 章，以 $\overline{SK'}$ 為半徑畫弧，火星的位置應該在與本輪的交點 **V**。
3. 使用於的 **51-60** 章，由上述的觀測數據結果所啟發，過 **P** 點作 $\overline{SK'}$ 的垂線，交於 **K** 點，以 $\overline{SK}$ 為半徑畫弧，交 $\overline{PF}$ 於 **M** 點。

在小心地比較過觀測數據後，克卜勒發現第 **1** 種曲線（圓形軌道）太大，第 **2** 種曲線太小，只有第 **3** 種曲線剛好符合觀測的數據，那麼，第 **3** 種曲線是甚麼呢？

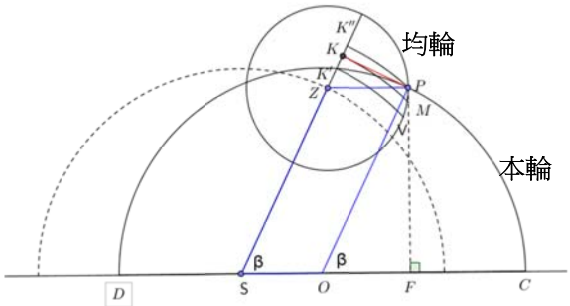


圖 **9**

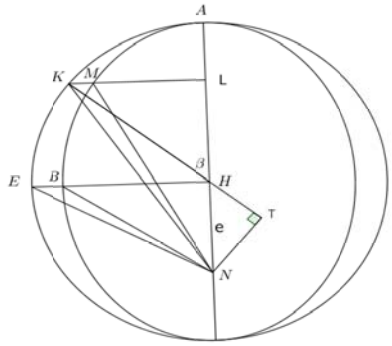
在經過許多無用的計算追逐之後，克卜勒最後決定姑且用橢圓來試試，結過才發現原來他所追求的一直近在眼前啊，他也坦承自己就像做了許多錯事的生手一般。我們以現代的符號精簡地來說明他的證明過程。如圖 **10**，按照第 **3** 種畫法，從 **K** 點做對稱軸的垂直線，交火星軌道於 **M** 點，此時 $\overline{NM}$ 即為太陽−火星距離 **ρ=1+**$e\cos\beta$。並且由觀測的數據知 $\overline{HE}:\overline{HB}=1:(1-\frac{e^2}{2})\approx 1+\frac{e^2}{2}:1$ **=1.00429：1**，但 **sec（$5^0$18'）=1.00429=**$\frac{\overline{NB}}{\overline{HB}}$，因此 $\overline{NB}=\overline{HE}$ **=1**。又已知 $\overline{NL}=e+\cos\beta$，

$\overline{NM}$ **=1+**$e\cos\beta$，由畢氏定理可知

$$\begin{aligned}
\overline{ML}^2 &= \overline{NM}^2-\overline{NL}^2\\
&=(1+e\cos\beta)^2-(e+\cos\beta)^2\\
&=1+2e\cos\beta+e^2\cos^2\beta-e^2-2e\cos\beta-\cos^2\beta\\
&=1+e^2\cos^2\beta-e^2-\cos^2\beta\\
&=(1-e^2)(1-\cos^2\beta)\\
&=\overline{BH}^2\sin^2\beta
\end{aligned}$$

亦即 $\overline{ML}=\overline{BH}\sin\beta=\overline{BH}\cdot\frac{\overline{KL}}{\overline{HK}}=\overline{KL}\cdot\frac{\overline{HB}}{\overline{HA}}$。

這個意思是說，當我們以 $\overline{HA}$ **=1=a**，$\overline{HB}$ **=b** 時，這個曲線上的點可看成圓上相對應的點以 $\frac{b}{a}$ 的比例壓縮，即為橢圓。也就是曲線上任一點 **M(x, y)**，$x = \cos\beta$，$y = b\sin\beta$，其中 $b = 1 - e^2$，會滿足 $\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 這個橢圓方程式，並且太陽在其中一個焦點的位置上。 因此克卜勒得到他的第二定律：行星運行的軌道即是以太陽為一焦點的橢圓。



288 DE MOTIB. STELLÆ MARTIS

CAP. LIX.

A brevioris semidiametri HB termino B, extendatur recta BN, aequalis semidiametro longiori AH. Dico HN posse gnomonem ERC, hoc est, esse medium proportionale inter EB & residuum diametri circuli. Demonstratum est supra capite XLVI. Sed hic facilius & expeditius demonstratur in puro casu. Gnomon enim est differentia quadratorum BH & HE vel HA, per VI. horum. Sed & potentia ipsius HN est differentia quadratorum BH, & BN, hoc est HE sive AH per XLVI. primi EUCLIDIS. Ergo aequale est quadratum HN gnomoni ERC. Quod erat demonstrandū.

VIII.

圖 **10**：右圖為《新天文學》中第 59 章的插

克卜勒的第三定律作為一個經驗事實首次出現在後來出版的《世界的和諧》（***Harmonies of the World***）中。這三個行星定律在天文學與物理學上都有相當重大的地位，他所走的是一條沒有前人走過的路，有精確的觀測數據做靠山，也有敢於創新的勇氣。這三個定律的發現過程，也為後世的科學家做了一個傑出的示範。在科學的發現過程中，科學家一開始需要某些理論，隨時對理論與實地觀測或實驗結果進行比較，如果對觀測或實驗結果有信心，那麼就修改理論。克卜勒花了幾年的時間做了這樣的事，修改再修改，不畏辛苦又枯燥的計算過程，才終於讓理論與觀測結果一致。如果當初克卜勒沒能打破一千多年來對圓形軌道在哲學、美學與宗教上的「盲目」信念，或許我們現在還體會不到這個宇宙簡單、純粹與和諧的美。

參考文獻：

Katz, Victor (1998). ***A History of Mathematics: An Introduction*** **(2nd edition). Boston: Pearson Education, Inc.**

項武義、張海潮、姚珩 **(2010).**《千古之謎−幾何、天文與物理兩千年》。台北：商務印書館。

張海潮、沈貽婷 **(2015).**《古代天文學中的幾何方法》。台北：三民出版社。

霍金編/導讀（張卜天等譯）**(2004).**《站在巨人肩上》。台北：大塊文化出版社。

網站資源：

KEPLER'S DISCOVERY：**http://www.keplersdiscovery.com/Intro.html**

Kepler's Planetary Laws：

http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Extras/Keplers_laws.html

1. 為節省影印成本，本通訊將減少紙版的的發行，請讀者盡量改訂 PDF 電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail 至 suhy1022@gmail.com
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請 e-mail 至 suhy1022@gmail.com
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng/letter/hpmletter.htm
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本：陳昭蓉 (東京 Boston Consulting Group)
基隆市：許文璋（銘傳國中）
台北市：英家銘（台北醫學大學）楊淑芬（松山高中）杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中）蘇俊鴻（北一女中）陳啟文（中山女高）蘇惠玉（西松高中）蕭文俊（中崙高中）郭慶章（建國中學）李秀卿（景美女中）王錫熙（三民國中）謝佩珍、葉和文（百齡高中）彭良禎、鄭宜瑾（師大附中）郭守德（大安高工）張瑄芳（永春高中）張美玲（景興國中）文宏元（金歐女中）林裕意（開平中學）林壽福、吳如皓 (興雅國中) 傅聖國（健康國小）李素幸（雙園國中）程麗娟（民生國中）林美杏（中正國中）朱賡忠（建成國中）
新北市：顏志成（新莊高中） 陳鳳珠（中正國中）黃清揚（福和國中）董芳成（海山高中）孫梅茵（海山高工）周宗奎（清水中學）莊嘉玲（林口高中）王鼎勳、吳建任（樹林中學）陳玉芬（明德高中）羅春暉 (二重國小) 賴素貞（瑞芳高工）楊淑玲（義學國中）林建宏 （丹鳳國中）莊耀仁（溪崑國中）、廖傑成（錦和高中）
宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中）吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）林宜靜（羅東高中）
桃園縣：許雪珍、葉吉海（陽明高中）王文珮（青溪國中） 陳威南（平鎮中學）洪宜亭、郭志輝（內壢高中） 鐘啟哲（武漢國中）徐梅芳（新坡國中） 程和欽 (大園國際高中)、鍾秀瓏（東安國中）陳春廷（楊光國民中小學）王瑜君（桃園國中）
新竹市：李俊坤（新竹高中）、洪正川（新竹高商）
新竹縣：陳夢綺、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）
苗栗縣：廖淑芳 (照南國中)
台中市：阮錫琦（西苑高中）、林芳羽（大里高中）、洪秀敏（豐原高中）、李傑霖、賴信志、陳姿研（台中女中）、莊佳維（成功國中）、李建勳（萬和國中）
彰化市：林典蔚（彰化高中）
南投縣：洪誌陽（普台高中）
嘉義市：謝三寶（嘉義高工）郭夢瑤（嘉義高中）
台南市：林倉億（台南一中）黃哲男、洪士薰、廖婉雅（台南女中）劉天祥、邱靜如（台南二中）張靖宜（後甲國中）李奕瑩（建興國中）、李建宗（北門高工）林旻志（歸仁國中）、劉雅茵（台南科學園區實驗中學）
高雄市：廖惠儀（大仁國中）歐士福（前金國中）林義強（高雄女中）
屏東縣：陳冠良（枋寮高中）楊瓊茹（屏東高中）黃俊才（中正國中）
澎湖縣：何嘉祥 林玉芬（馬公高中）
金門：楊玉星（金城中學）張復凱（金門高中） 馬祖：王連發（馬祖高中）

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。懇請各位老師惠賜高見！

國立臺灣師範大學「數學系 60 級甲班學長姊獎學金」設置辦法

100.1.13 九十九學年度第一學期第二次系務會議通過

一、緣起：為鼓勵數學系學士班優秀學生特訂定本辦法。

二、名額：每年一至二名。

三、金額：每名 15,000 元。

四、申請資格與條件：

本校數學系學士班在校學生前一學年度各科表現特殊優異者，而且對於閱讀推動數學普及讀物有興趣者。已請領其他校內獎學金者，不得再請領本項獎學金。

五、申請時間及程序：

（一）凡符合本獎學金申請資格的學生，請備妥申請書、成績單以及至少兩篇數學普及讀物閱讀心得報告，向本系提出申請。

（二）本獎學金申請每學年辦理一次，申請期間為每年 10 月，由本系獎助學金審查委員會公開審查核定，並由本系擇期公開表揚。

六、審查委員暨程序：由本系獎助學金管理委員會負責。

七、基金保管及運用方式：

（一）本獎學金由本校獎學金管理委員會負責保管，以每年由數學系 60 級甲班系友募集作為獎學金之用。

（二）本獎學金之金額，必要時得由本獎學金審查委員會調整之。

八、本辦法經系務會議通過後，提請獎學金管理委員會核備後實施，修訂時亦同。

附錄：推薦閱讀書單

Aczel, Amir (阿米爾‧艾克塞爾**) (**譯者林祁堂**) (1998).**《費馬最後定理》，時報出版公司。

Aczel, A. D. (阿米爾‧艾克塞爾**) (**譯者邱文寶**) (2006).** 《大於 **1/2--**投資、愛情、生活的獲勝機率》，究竟出版社。

Aczel, Amir D. (阿米爾・艾克塞爾) **(**譯者蕭秀姍、黎敏中**) (2007).**《笛卡兒的秘密手記》，商周出版社。

Atalay, Bülent (布倫阿特列) **(2007).**《數學與蒙娜麗莎》，時報文化出版公司。

Alder, Alder (亞爾德)（譯者張琰、林志懋）**(2005).**《萬物的尺度》，貓頭鷹出版社。

Berlinhoff, William P., Fernando Q. Gouvea（譯者洪萬生、英家銘、蘇惠玉、蘇俊鴻、林倉億、陳彥宏、郭慶章、陳啟文、葉吉海、洪誌陽、楊瓊茹）**(2008).**《溫柔數學史：從古埃及到超級電腦》，博雅書屋。

Beutelspacher, Albrecht (波伊特許伯赫)**, Marcus Wagner** (馬庫斯・華格納)（譯者姬健梅）**(2009).** 《如何穿過一張明信片》，究竟出版社。

Blatner, David (大衛・布拉特納)（譯者潘恩典）**(1997/2007)**。《神奇的 π》，商周出版。

Davis, Philip J., Hersh Reuben (譯者常庚哲、周炳蘭) **(1996).**《笛卡爾之夢 －從數學看世界》，九章出版社。

Derbyshire, John (德比夏爾)（譯者陳可崗）**(2005).**《質數魔力》，天下遠見。

Devlin, Keith (德福林)（譯者李國偉、饒偉立）**(2000).**《笛卡兒，拜拜！》，天下遠見出版公司，台北市。

Doxiadis, Apostolos (阿波斯多羅斯・多夏狄斯)（譯者王維旎）**(2002)**。《遇見哥德巴赫猜想》，小知堂文化事業公司。

Dunham, William (威廉・鄧漢)（譯者蔡承志）**(2009).**《數學教室 A to Z》，商周出版社。

Eastaway, Rob (羅勃・伊斯威)**, Jeremy Wyndham** (傑瑞米・溫德漢)（譯者蔡承志）**(2005).**《一條線有多長？》，三言社。

Eastaway, Rob (羅勃・伊斯威)、**Jeremy Wyndham** (傑瑞米・溫德漢) (譯者蔡承志) **(2004).**《為什麼公車一次來 3 班？》，三言社。

Gardner, Martin (葛登能) (譯者胡守仁) **(2004).**《打開魔數箱》，遠流出版事業公司。

Gardner, Martin (葛登能)（譯者蔡承志）**(2005).**《數學馬戲團》，遠流出版事業公司。

Gaurav, Suri (高瑞夫)**, Singh Bal Hartosh** (哈托許)（譯者洪贊天、林倉億、洪萬生）**(2009).**《爺爺的證明題》，博雅書屋。

Giordan, Paolo (保羅・裘唐諾)（譯者林玉緒）**(2009).**《質數的孤獨》，寂寞出版社。

Gowers, Timothy (2002). ***Mathematics: A Very Short Introduction*****. New York: Oxford University Press.**

Gray, Jeremy J. (葛雷) (譯者胡守仁) **(2002).** 《希爾伯特的 **23** 個數學問題》，天下遠見出版公司。

Hathout, Leith (譯者黃俊瑋、邱珮瑜) **(2009).**《數學偵探物語》，書泉出版社。

Hellman, Hal (哈爾赫爾曼)（譯者范偉）**(2009).**《數學恩仇錄》，博雅書屋。

Higgins, Peter M. (彼得・希金斯) (譯者尤斯德) **(2005).** 《數學讓腦袋變靈光》，商周出版社。

Hoffman, Paul (保羅・霍夫曼)（譯者米緒軍、章曉燕、謬衛東）**(2001).**《數字愛人：數學奇才艾狄胥的故事》，臺灣商務印書館。

Jaqua, Albert (亞伯特・賈夸)（譯者陳太乙）**(2002).**《睡蓮方程式─學習科學的樂趣》，究竟出版社。

Kaplan, Robert (羅伯・卡普蘭)（譯者陳雅雲）**(2002).**《從零開始 － 追蹤零的符號與

意義》，究竟出版社。
Kline, Morris (莫里斯・克萊恩**)**（譯者趙學信）**(2004).**《數學：確定性的失落》，台灣商務印書館。
King, Jerry (杰瑞・金**)**（譯者蔡承志）**(2010).**《社會組也學得好的數學十堂課》，商周出版社。
Lee, Cora (柯拉・李**) , Gillian O'Reilly (**吉利安・格瑞**)**（譯者俞璿）**(2008).** 《數學大騷動 － 在意想不到的地方發現數學》，究竟出版社。
Livio, Mario (李維歐**)**（譯者丘宏義）**(2004).**《黃金比例》，遠流出版事業公司。
Livio, Mario (2005). ***The Equation That Couldn't Be Solved*****. New York: Simon & Schuster.**
Maor, Eli（譯者胡守仁）**(2000).**《毛起來說三角》，天下遠見出版公司。
Maor, Eli (毛爾**) (**譯者鄭惟厚**) (2000).** 《毛起來說 e》，天下遠見出版公司。
Maor, Eli (2007). ***The Pythagorean Theorem: A 4000-Year History*****. Princeton University Press.**
MacLachlan, James (詹姆士・馬克拉卻倫**) (2004).**《伽利略》，世潮出版公司。
Mlodinow, Leonard (李奧納・曼羅迪諾**)**)（譯者陸劍豪） **(2002).** 《歐幾里得之窗 － 從平行線到超空間的幾何學故事》，究竟出版社。
Mlodinow, Leonard (曼羅迪諾**)**（譯者胡守仁）**(2009).** 《醉漢走路 － 機率如何左右你我的命運和機會》，天下文化出版公司。
Moore, David S. (墨爾**) (**譯者鄭惟厚**) (1998/2007).**《統計，讓數字說話》，天下遠見出版公司。
Musielak, Dora (2005). ***Sophie's Diary: A Historical Fiction*****. AuthorHouse, Bloomington, Indiana.**
Netz, Reviel and William Noel (內茲、諾爾**) (**譯者曹亮吉）**(2007)**。《阿基米德寶典：失落的洋皮書》，天下文化出版公司。
Nahin, Paul J. (1998/2007). ***An Imaginary Tale: The Story of*** $\sqrt{-1}$**)，Princeton University Press**。
Osen, Lynn M. (琳・歐森**)**（譯者彭婉如、洪萬生）**(1998).** 《女數學家列傳》，九章出版社。
Osserman, Robert (奧瑟曼**)**（譯者葉李華、李國偉）**(1997).**《宇宙的詩篇》，天下文化出版公司。
Posamentier, Alfred S. & Ingmar Lehmann (2004). ***π: A Biography of the World's Most Mysterious Number*****. Prometheus Books.**
Poundstone, William (譯者葉家興**) (2007)**。《囚犯的二難 － 賽局理論與數學天才馮紐曼的故事》，左岸文化出版社。
Sawyer, Walter Warwick (梭爾**)**（譯者胡守仁）**(2006).**《數學家是怎樣思考的》，天下遠見出版公司。
Salem, Lionel, Frederic Testard and Coralie Salem (譯者胡守仁**) (2006).**《最ㄅㄧㄤ、的數學公式》，天下文化出版公司。
Singh, Simon (賽門・辛**) (**譯者劉燕芬**) (2000).**《碼書：編碼與解碼的戰爭》，臺灣商務印

書館。
Singh, Simon (賽門・辛)（譯者薛密）(1998).《費瑪最後定理》，台灣商務印書館。
Stein, Sherman K. (斯坦) (譯者葉偉文) (1999/2005). 《幹嘛學數學？》，天下遠見。
Stein, Sherman K. (斯坦) (譯者葉偉文) (2002). 《數學是啥玩意？》，天下遠見。
Stein, Sherman K. (斯坦) (譯者陳可崗) (2004). 《阿基米德幹了什麼好事！，天下遠見。
Stewart, Ian (史都華) (譯者葉李華) (1996). 《大自然的數學遊戲》，天下遠見出版公司。
Stewart, Ian (2007). *Why beauty is truth: a history of symmetry*. Basic Books.
Stewart, Ian (史都華) (譯者李隆生) (2008).《給青年數學家的信》，聯經出版公司。
Tahan, Malba (馬爾巴塔汗) (譯者鄭明萱) (2009).《數學天方夜譚：撒米爾的奇幻之旅》，貓頭鷹出版社。
Wilson, Robin J. (2001). *Stamping through Mathematics: An illustrated history of mathematics through*. Springer-Verlag New York, Inc..
Zaslavsky, Claudiaz (克勞迪亞・札斯拉伕斯基) (譯者陳昭蓉) (2002).《民俗數學遊戲》，遠哲科學教育基金會。
小川洋子（譯者王蘊潔）(2004).《博士熱愛的算式》，麥田出版社。
小林吹代（譯者陳昭蓉）(2008).《用看的學數學》，世茂出版社。
小室直樹（譯者李毓昭）(2002).《給討厭數學的人 — 數學的奧妙 & 生活》，晨星出版社。
小島寬之 (譯者陳昭蓉) (2010).《用小學數學看世界》，世茂出版社。
小島寬之 (譯者鄭宇淳 / 審定李恭晴) (2007).《從數學看人類進步的軌跡》，世茂出版社。
川九保勝夫 (譯者高淑珍) (2003 / 2008).《圖解數學基礎入門》，世茂出版社。
丹尼斯・居耶德 (譯者漢斯) (2003).《鸚鵡定理：跨越兩千年的數學之旅》，究竟出版社。
西成活裕（譯者陳昭蓉）(2008).《壅塞學 ─人、車、螞蟻、網路、細胞一路暢通的祕密》，究竟出版社。
李信明 (1998).《李學數說數學故事》，九章出版社。
寺阪英孝 (2004). 《非歐幾里德幾何的世界：探索幾何學的原點》，新潮社。
笹部貞市郎 (譯者文子) (2007).《茶水間的數學》，大是文化有限公司。
岡部恆治 (譯者蔡青雯) (2008).《漫畫微積分入門》，臉譜出版社。
岡部恆治、桃崎剛壽著 (劉秀群譯) (2007). 《數學腦》，世茂出版社。
岡部恒治 (譯者王秋陽、中川翔詠) (2003). 《訓練思考能力的數學書》，究竟出版社。
林芳玫 (2007). 《達文西亂碼》，聯合文學出版社。
洪萬生 (1999).《孔子與數學》，明文書局。
洪萬生 (2006). 《此零非彼零：數學、文化、歷史與教育》，臺灣商務印書館。
洪萬生、林倉億、蘇惠玉、蘇俊鴻 (2006). 《數之起源》，台灣商務印書館。
林壽福 (2006).《數學樂園 － 從肧騰學好數學》，如何出版社。
洪萬生、英家銘、蘇意雯、蘇惠玉、楊瓊茹、劉柏宏、劉淑如 (2009).《當數學遇見文化》，三民書局。
徐品方，徐偉 (2008).《古算詩題探源》，科學出版社。
根上生也（譯者謝仲其）(2010).《數學，一看就懂》，世茂出版社。

張海潮 (2006).《說數》，三民書局。
曹亮吉 (2003).《阿草的數學聖杯 － 尋找無所不在的胚騰》，天下遠見出版公司。
曹亮吉 (阿草) (2002).《從月曆學數學》(原書名：阿草的歷史故事)，天下文化出公司。
曹亮吉 (阿草) (2008).《從旅遊學數學》，天下文化出版公司。
許介彥 (2008).《數學悠哉遊》，三民書局。
新井紀子（譯者許慧貞）(2010).《愛上數學的 14 堂課》，世茂出版社。
新井紀子（譯者陳嫻若）(2009).《吐嘈學數學》，如果出版社。
遠藤寬子（譯者周若珍）(2009).《算法少女》，小知堂文化公司。
藤原和博、岡部恆治 (譯者陳昭蓉、李佳嬅) (2009).《刮風時，木桶商就能賺大錢？看穿事物本質的數學腦》，世茂出版社。
賀景濱 (2006).《速度的故事》，木馬文化出版社。
蔡聰明 (2000). 《數學的發現趣談》，三民書局。
蔡聰明 (2003). 《數學拾貝》，三民書局。
蔡聰明 (2009).《微積分的歷史步道》，三民書局。
蕭文強 (2007). 《數學證明》，凡異出版社。
羅浩源 (1997). 《生活的數學》，九章出版社。

為什麼要讀科普(I)

吳允中
台師大數學系四年級

為什麼人們需要（數學）科普呢？從我自己的學習經驗談起，很多同學與部分老師常問起，你的自然學科（或說是理工方面能力）從哪裡學來的？好似一句簡白的疑問，不過，這問句已經植下了一個反面的假設 -- 不是學校教的吧！沒錯，我便是從諸位「善操此論」的大師之科普著作中取經來的。

首先不論學科，先從喜好層面來看。熱愛音樂的人應該先是聆聽過某段美妙的旋律才產生學習的欲望，而非一開始就從五線譜與四分之一音符起了著迷；專職運動的人也不曾見過他是為了「暖身操」而踏上這項職業；國際影帝影后的成長，起初絕對不是喜歡被導演卡來卡去而投入影視圈。舉出這些例子，幾乎我們都可認同：先給我了解這方向上有什麼驚豔的成果，才有辦法說服我勤練基本功，而數學的發展也是如此，別把「公設 -- 定義 -- 定理」這套系統一開始就帶入學校，更誇張地描述，國內少數學童，在未曾接觸的數學新領域中，他們都被本末倒置地灌輸知識！

由《幹嘛學數學》一書中有一段文字**:** 你沒有數學細胞，但一定有數學頭腦，並描述生物學家道金斯（**Richard Dawkins**）在《盲目的鐘錶匠》中寫道：

> **面對數學還有一件很重要的事，就是別被它嚇倒。數學並不向數學祭司所假裝的那麼困難，每當我覺得快被嚇倒的時候總是想起湯普生（S. Thompson）在《微積分很簡單》一書所說的名言：「一個傻子能做的事，另一個也能。」**

我想極力表達數學就是生活中想要知道的事！而科普正好從這分面下手。很簡單的例子，今天是 **8** 月 **5** 日星期三，那麼 **18** 天以後是星期幾？這絕對不是要先學高斯的同餘符號才有權利知道的事。有人說數學就是加減乘除開根號而已！沒錯，而且你該慶幸沒有碰到不是的！例如集合論、拓樸學、抽象代數，碰到這些「只有代表意義的符號」的學科時，我們躲在公廁裡唱山歌可能還比較不尷尬。在此，不得不在對十九世紀的德國數家康托爾（**Cantor**）踹上一腳，他只在講一推無意義的東西。雖然有點義憤填膺，不過有個學習數學的中心思想：千萬別被邏輯絆住腳。

進入正式數學課題前，還是不免俗地從多數教授喜愛測試新進學生能力的題目**:**

證明 $\sqrt{2}$ 是無理數。

我認為這真的不具意義！首先 $\sqrt{2}$ 是無理數路人皆知，再者，這麼經典的考古題，學生早就把無窮遞降法的過程一字不漏地背熟了，然後這時只是在把它「反芻」出來而已！不過呢，我倒是有個好點子，如果我是面試官那麼我會請學生回答如下問題：

無理數的無理數次方是否必定為無理數

我們先請學過複變的人噤聲一下。（因為複變理論可證明一項違反直覺的事實：$i^i \in \mathbb{R}$）那麼，這時請回答「必定是無理數」的人（應該為數不少）起立一下，把一張小卡片偷偷交給他們每位，而卡片上究竟寫了什麼奧秘呢？

$$(\sqrt[\pi]{5})^{\pi} = 5$$

我想這些站著的學生都會發出會心一笑，並且瞬間找到無窮個反例。得說抱歉的是，這是一個正確的答案，卻不是個「好」答案，那麼又是怎樣的反例稱得上石破天驚呢！？

且看 $\sqrt{2}$ 的妙用：

考慮 $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$

↗ 有理數 $\longrightarrow$ 得反例

↘ 無理數 $\longrightarrow$ $|(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}|^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$ **=**$(\sqrt{2})^{2}$**=2** $\longrightarrow$ 得反例

其實，我們邏輯上將一條難走的路分走成兩段好走的。先不管起初是否 $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ 為無理數，最終都得到了反例！曾經將這個推導拿給國一的學生看，他立即領會其中奧義，並作註解**:** 這事證明了一件似乎沒作證明的證明。我十分地高興，因為他讓數學地抽象性提升到本質的自我認知，簡言之，這個事實已被他當成常識。

我們回頭看看一開始的題目：證明 $\sqrt{2}$ 是無理數。本來失去了對這老掉牙題目的興趣，不過，在蔡聰明教授的《數學拾貝》一書中，有個章節專在討論這件事，此次讀後頗愛他的第十八種證法：

由於 **a** 與 **b** 被 **3** 除的餘數為 **0**、**1**、**2** 　　**(**三種情況**)**
故 a^2 與 b^2 被 **3** 除的餘數為 **0**、**1** 　　**(**兩種情況**)**
若 a^2+b^2 被 **3** 整除 　　即 $a^2+b^2\equiv$**0 (mod 3)**
則 a^2 與 b^2 各被 **3** 整除 　　即 $a^2\equiv b^2\equiv$**0 (mod 3)**

考慮 $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$ 其中 **a**、**b** 互質，則 $a^2 = 2b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 3b^2$

亦即 $3\,|\,a^2+b^2 \Rightarrow 3\,|\,a$ 且 $3\,|\,b$，**a** 與 **b** 互質，這是矛盾，故 $\sqrt{2}$ 為無理數。

一樣是反證法，這則論證的巧妙之處在於，利用 $a^2 = 2b^2$ 到平方數模 **3** 的特性。直觀而言，我們先將等式兩端平方以削去根號，然後移項得到。這樣說吧，甲錢數的平方是乙錢數平方的兩倍，對旁觀者而言，會希望將這兩值作總和，則其和必為 **3** 的倍數，即

$3|a^2+b^2$。這時再套用引理中的結論，其實可用窮舉法輕易驗證：

若 $a^2 \equiv b^2 \equiv \mathbf{1}$ **(mod 3)**，則 $a^2+b^2 \equiv 2 \pmod 3$ 不合
若 $a^2 \equiv \mathbf{0}$ 且 $b^2 \equiv \mathbf{1}$ **(mod 3)** ，則 $a^2+b^2 \equiv 1 \pmod 3$ 不合
若 $a^2 \equiv \mathbf{1}$ 且 $b^2 \equiv \mathbf{1}$ **(mod 3)** ，則 $a^2+b^2 \equiv 1 \pmod 3$ 不合
若 $a^2 \equiv b^2 \equiv \mathbf{0}$ **(mod 3)**，則 $a^2+b^2 \equiv 0 \pmod 3$ 成立

所以，只有最後一行成立，即 $3|a^2$ 且 $3|b^2$，而 **3** 又是質數，所以 $3|a$ 且 $3|b$。

其實每一步驟寫起來不少，意義上卻是十分顯然的。

另外，我會更喜歡測試學生的題目：

試求調和級數之和或證其發散。

關於調和級數在當年被約翰・白努利提出挑戰帖，名震一時。此級數描述為所有自然數的倒數和，即 $\sum_{k\in N}\frac{1}{k}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$ ，若讓一般社會人士回答此問題時，他們可能認為所有加無限多次的級數都是趨於無窮的，這也不例外。不過，當他們被幾何級數和 $\sum_{k\in N}\frac{1}{2^k}=1$ 所說服時，又會對本例的斂散性改口。在於他們沒有接受到數字和的「直覺」。言下之意，難道筆者就有「直覺」可以灌輸給讀者？確實，以下將用「炫富」的方法，來體現調和級數的生活作息，以下給出四例：

> 大家都聽說比爾先生很有錢，不過無人得知確切金額。這日的晚宴上，郭董就向他炫富。比爾笑笑不答，他將存摺拿出試種，其實在場之人無不覺得此舉貽笑大方，因為上頭的交易記錄著：
>
> $$1\text{NT}、\frac{1}{2}\text{NT}、\frac{1}{3}\text{NT}、\frac{1}{4}\text{NT}\ldots\ldots$$
>
> 一位善於心算的秘書悄悄跟郭董說:「前一百筆金額總和約為 5.18 元；前一千筆金額總和約為 7.48 元；錢一萬筆金額總和也不超過這個蔣公銅板，怎敢跟上百億身價的您相比呀!!」而比爾接著說:「我身價比不上蔣公銅板好了，不過我有無窮多筆金額呀! 小蝦米總有一天也能吃掉大鯨魚。」他便讓他的會計師向各位來賓說明……

例一 ：
會計師對存摺中的金額作了分類並說道:「我老闆第一筆有一元、接下來一筆有五毛，接下來兩筆超過五毛，接下來四筆超過五毛，接下來八筆超過五毛………所以這裡面可以提領出無窮多次的五毛。」

$$S=(\frac{1}{1})+(\frac{1}{2})+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8})+(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16})+......$$

$$>1+\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{4}+4\times\frac{1}{8}+8\times\frac{1}{16}+......$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+......$$

例二：

會計師先說了一則結論:「任意相鄰三項金額總和，大於中項的三倍」

亦即：$\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}=\frac{2a}{a^2-1}+\frac{1}{a}>\frac{2}{a}+\frac{1}{a}=\frac{3}{a}$

然後他表示:「花掉一元後會比原來的錢還多」

亦即 $S=\frac{1}{1}+(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7})+(\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10})+(\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13})+(\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16})+......$

$$>1+\frac{3}{3}+\frac{3}{6}+\frac{3}{9}+\frac{3}{12}+......$$

$$=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+......$$

=1+S

因而 **S-1 > S**，那麼依照這個步驟，不管比爾先生花去了多少錢都比原先的多**!!**

例三：

會計師他說了一件十分駭異的行為**:**「我每天都會檢查老闆的存款累積額 S_n，然後只要在下班時繼續加總到 S_{2n}，這時絕對比上午的所得值多過五毛。」

$$S_n=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}$$

$$S_{2n}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n})$$

$$=S_n+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}$$

$$>S_n+\frac{n}{2n}=S_n+\frac{1}{2}$$

接著他表示**:**「那麼我老闆隨時想再多個五千億還不簡單**!!**」

註：**5** 千億等於 $\frac{1}{2}\times10^{12}$，令 $k=10^{12}$，則 $S_{2^k}>S_1+\frac{1}{2}\times10^{12}$

例四：

會計師話鋒一轉:「如果各位對剛才五毛、五毛的加感到緩慢的話，那我可以為你們展示我老闆財產翻倍的厲害。」，我們先扣去第一筆金額，並記部分和為T_n，則可觀察到:

$T_1=0$

$T_4=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{4}$　　即 $T_4>2T_2$

$T_9=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}>\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{6}$

$\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}>\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{9}$　　即 $T_9>2T_3$

$T_{16}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{2}+4\times\frac{1}{8}$

$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}>\frac{1}{3}+4\times\frac{1}{12}$

$\frac{1}{4}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}>\frac{1}{4}+4\times\frac{1}{16}$　　即 $T_{16}>2T_4$

$T_{n^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2}+n\times\frac{1}{2n}$

$\frac{1}{3}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}+...+\frac{1}{3n}>\frac{1}{3}+n\times\frac{1}{3n}$

……

$\frac{1}{n}+\frac{1}{n(n-1)+1}+\frac{1}{n(n-1)+2}+...+\frac{1}{n^2}>\frac{1}{n}+n\times\frac{1}{n^2}$　　即$T_{n^2}>2T_n$

那麼T_n會無止境的翻倍，何況又多加 **1** 元的調和級數S_n！！

這四個解法各有特色，例一是教科書上常見的手法，強調的是可以找到無窮多組的$\frac{1}{2}$來加總；例二是參見《天才之旅》中孟古利所給的精妙證明，就如筆者所註解：花掉一元後會比原本的錢還多，有一種不斷自我複製的功能。例三、例四由筆者所給出，並自戲稱神龍見首不見尾，因為T_{n^2}每個視為一隻龍，而T_n則是龍頭，$T_{n^2}-T_n$則為龍尾，而每分每秒龍尾總比龍頭來得長（數值大），所以會出現一直翻倍的現象。而前法S_n是龍頭，拖了一隻超過$\frac{1}{2}$的龍尾$S_{2n}-S_n$，在動物體格的比例上雖然來得奇異（大頭寶寶！），

但它確實可以無窮盡地延長。

而對科普著作而言，我們必須把不具生命性的數字及圖形，點綴成活潑靈動的事件或意境。可別小看這件事，正式的數學領域也頗重視此點，它便是我們所謂的「組合證明」對數學必須強調「直觀」的重要性。這裡，筆者對於「拋物線的光學性質」作一個直觀的例證，分為四段：

Step 1：用包絡直線建構拋物線
Step 2：以極限方法計算包絡直線的夾角
Step 3：計算拋物線切線的確實夾角
Step 4：用幾何法驗證光學性質

從此處出發，筆者為諸讀者細說拋物線的神奇力量。

未完待續

洪萬生附記：本文是吳允中榮獲「數學系 60 級甲班學長姊獎學金」的得獎作品，下期續完。按：本獎學金旨在鼓勵本系學生閱讀數學普及書籍，因此，除了學業成績有規定的條件之外，也必須繳交閱讀心得文章。允中是首位榮獲此獎學金的本系學生，謹代表我們 60 甲同窗好友，誠摯地恭喜他得獎！