HPM通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系退休教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）
助理編輯：黃俊瑋（和平高中）
編輯小組：蘇意雯（台北市立教育大學）蘇俊鴻（北一女中）
葉吉海（陽明高中）陳彥宏（成功高中）
王文珮（青溪國中）
英家銘（台北醫學大學）
創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng

第十九卷 第四期 目錄（2016年4月）

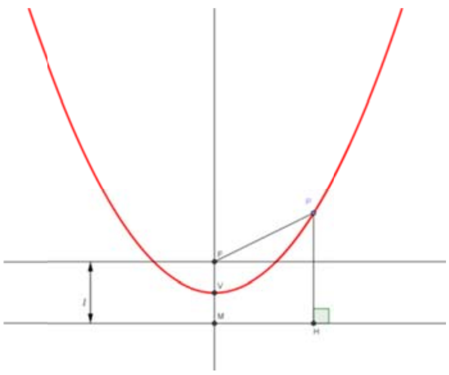
為什麼要讀科普(II)

吳允中
台師大數學系四年級

續前~
從此處出發，筆者為諸讀者細說拋物線的神奇力量。

除了浮力原理，拋物線也是阿基米德的一項大成就，在《阿基米德幹了什麼好事》一書中，介紹了這位天才利用「重心」的方法計算出拋物線含蓋的面積，這是後話。如今在意的是他對光學性質的研究，雖然阿基米德明白這件事，不過在其手稿可能翻找不出一個「令人聞之大快」的方法，或者根本從未記載。我相信依照這位神人的個性，有大好妙招時必定公諸於世。隨著時光推移，當羅馬軍隊入侵敘拉古時，阿基米德所造的攻防機械都派上用場，而後人加以揣測，他造了一個巨大無比的拋物面鏡，在港口上聚集太陽光來燒燬敵船。從這裡出發，筆者為諸讀者細說拋物線的神奇力量。

基礎知識



拋物線定義為「平面上與定點距離和與定直線距離相等的點所形成之曲線」，此定點稱為焦點 (記為 **F**)，此定直線稱為準線 (記為 **L**)，在拋物線上任意點 **P**，滿足

$$\mathbf{d\,(P\,,F) = d\,(P\,,L)}$$

以極座標觀點，令 F 為原點，焦點到準線相距 l

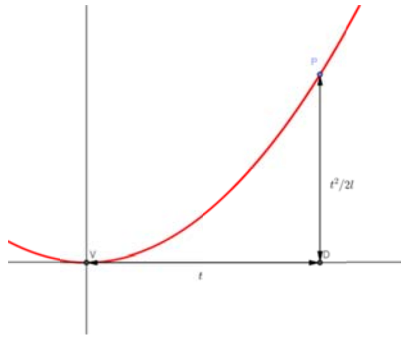
則 $\overline{FP}=\overline{PH}$　　$\Rightarrow r = r\sin\theta + l$　　……………………①

$$\Rightarrow r = \frac{l}{1-\sin\theta} \quad \text{……………………②}$$

在直角坐標上，對①式兩端平方，得

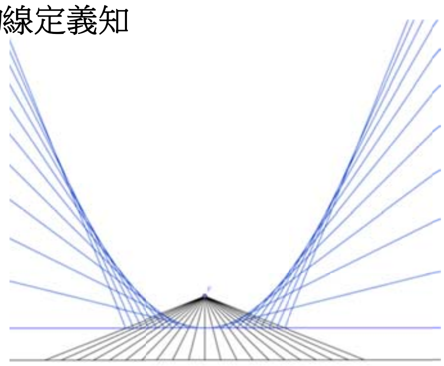
$$r^2=(r\sin\theta+l)^2\Rightarrow x^2+y^2=(y+l)^2$$

$$\Rightarrow y+\frac{l}{2}=\frac{1}{2l}x^2 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots③$$



若將座標原點設在拋物線頂點 **V**，則③式的幾何意義為
任意點 **P** 的 **y** 座標是 **x** 座標的平方倍
即用參數式可表為 **P** $(t, t^2/_{2l})$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots④$

Step 1：
在準線上左右兩端一次取點 S_i 、 T_i （可不必等距），由拋物線定義知

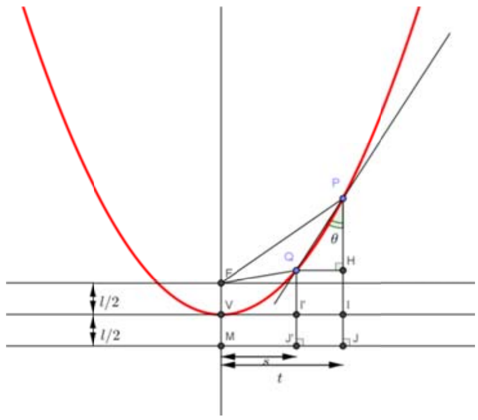


d (Sᵢ , F) = d (Sᵢ , L)　且　d (Tᵢ , F) = d (Tᵢ , L)

代表 S_i 在 $\overline{FS_i}$ 的中垂線上　　(T_i 在 $\overline{FT_i}$ 的中垂線上)

然後我們希望這些中垂線，都是拋物線上的切線

Step 2：
過頂點 **V** 引一條水平線 **Γ**
令 **I** 點座標(**t , 0**)；變動點 **I'**座標（ **s , 0** ）
如圖，∠**QPH=θ**　(為 **s** 的函數)



而 $\overline{PI}=\frac{1}{2l}t^2$　；$\overline{PI}=\frac{1}{2l}s^2$

$$\overline{PQ}=\sqrt{\overline{QH}^2+\overline{PH}^2}=\sqrt{(t-s)^2+(\frac{1}{2l}t^2-\frac{1}{2l}s^2)^2}$$

$$=(t-s)\sqrt{1+(t+s)^2/4l^2}$$

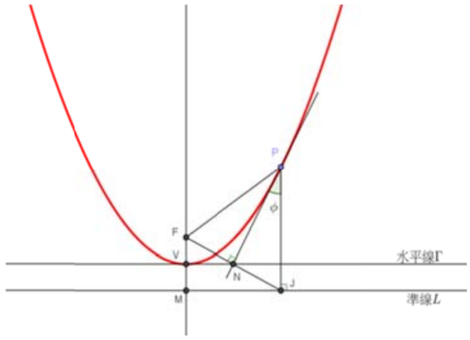
故 $\sin\theta=\frac{\overline{QH}}{\overline{PQ}}=\frac{t-s}{(t-s)\sqrt{1+(t+s)^2/4l^2}}=\frac{2l}{\sqrt{4l^2+(t+s)^2}}$

然後我們對 $\sin\theta$ 取極限，將會得到切線與垂直軸夾角的正弦值

即求 $\lim\limits_{s\to t}\sin\theta=\lim\limits_{s\to t}\frac{2l}{\sqrt{4l^2+(t+s)^2}}=\frac{1}{\sqrt{l^2+t^2}}$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$

Step 3：

如今對我們所作的中垂線進行（與垂直軸）夾角比較



令 $\overline{FJ}$ 中點為 **N**，**∠NPJ=φ**

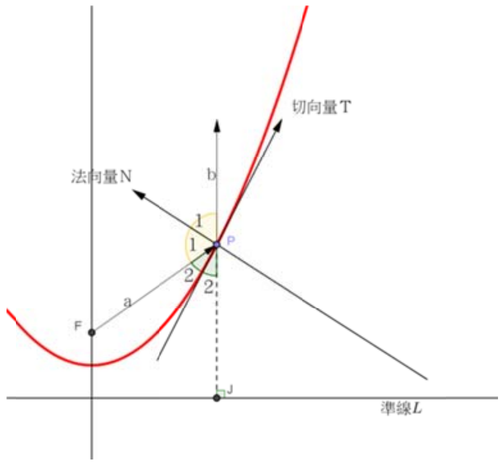
從而 $\overline{FJ}=\sqrt{\overline{FM}^2+\overline{MJ}^2}=\sqrt{l^2+t^2}$　**;** $\overline{PJ}=\dfrac{1}{2l}t^2+\dfrac{l}{2}=\dfrac{1}{2l}(t^2+l^2)$

則 $\sin\varphi=\dfrac{\overline{NJ}}{\overline{PJ}}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\overline{FJ}}{\overline{PJ}}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt{l^2+t^2}}{(t^2+l^2)/2l}=\dfrac{1}{\sqrt{l^2+t^2}}$　**…………(**)**

故求得**(*)**、**(**)**兩式相等，則 $\theta=\varphi$　，所以我們的猜測成立！

Step 4：

對拋物線上任意點 **P**，令光源在焦點 **F**



則入射向量記為 $\overrightarrow{a}$ ；反射向量記為 $\overrightarrow{b}$

且入射角＝反射角，在 **P** 點發生

即　$\angle 1 \equiv \angle\, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{N} = \angle\, \overrightarrow{N}, \overrightarrow{b}$

$\angle 2 \equiv \angle\, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{T} = \angle\, \overrightarrow{T}, \overrightarrow{y}$　　$\overrightarrow{y}$ 表 **y** 軸正向

又　$\angle 1+\angle 2=90^0$ ($\overrightarrow{N} \perp \overrightarrow{T}$)

故　$\angle 1+\angle 1+\angle 2+\angle 2=180^0$　(平角)

$= \angle\, \overrightarrow{b}, -\overrightarrow{y}$

即 $\overrightarrow{b}$ 為 **y** 軸正向。

總體而言，在焦點處的光源，經過拋物面反射後，由對稱軸方向射出；反之，平行於對稱軸的光源，經過拋物面反射後會匯聚於焦點。**Step1~4** 一步步由直觀的拋物線包絡，再計算猜測值與實際值的大小，最後應用入射角等於反射角，從幾何方面直搗黃龍，不可不謂之佳作！

如果讀到這裡各位還沒發現數學「妙用」的話，那我們以下用初等代數來說明如何從數學「盲點」來矇騙大人。

小明平日喜愛打電動而荒廢課業，卻常愛使小聰明(好行小慧)，一天不打網遊便渾身不對勁，縱使兩三分鐘也好。這一天爸媽要上山到叔叔家送東西。出門前想沒收小明的手機，他請求媽媽能夠收回成命，並答應做好一小時能完成的作業。理由如

下：這條山路全長 30 公里，上山速限 90，下山速限 60，在叔叔家裡頂多逗留 12 分鐘，那麼，總共花費一小時：

$$\underbrace{\frac{30+30}{75}}_{\text{開車時數}}\times 60+\underbrace{12}_{\text{在叔叔家逗留}}=60$$

其中 75 是 60 與 90 的平均速率

那麼我也沒時間玩手機啊！媽媽聽了覺得很有道理，便答應小明的請求。

而實際上呢！小明深知速率的把戲，他盤算如下**:**

$$\left(\underbrace{\frac{30}{90}}_{\text{上山}}+\underbrace{\frac{30}{60}}_{\text{下山}}\right)+12=62$$

整整多出 **2** 分鐘。足以讓她滑滑神魔。

一般而言，我們用 **S** 代表山路長，**a** 代表上山速率，**b** 代表下山速率，那麼

總時間=$\frac{S}{a}+\frac{S}{b}$　　平均速率=$\frac{S+S}{\frac{S}{a}+\frac{S}{b}}=\frac{2ab}{a+b}$

這裡的$\frac{2ab}{a+b}\leq\frac{a+b}{2}$　由$(a+b)^2\geq 4ab$　而得

所以，實際速率來的比算術平均速率還慢。

哈哈哈 ~~ 如果父母有人是數學老師，就不能如此輕易過關了，當然這則「騙局」只是牛刀小試而已。最後，筆者送上一個辛辣帶勁的「料理」當作結尾。

話說大約三千年前祕魯一代有個稱霸當代的馬雅王朝，至今他們留下的「稻田裡的幾何圖形」仍是個未解之謎，有人揚言這個文明是被外星人所征服，異軍壓境後感到索然無味也就人去樓空。剛好就是這麼湊巧，今天的主題來到了年般代遠的馬雅盛世裡。克羅尼希瓦星球（以下簡稱克氏星）的「人類」慕名而至，此地山高水長，繁華又帶清幽，他們入境後便流連忘返。馬雅國王邀請克氏星旅外大使 **Kevin** 來到神殿中參訪，克氏星向來崇尚藝術，而這次所看到嘆為觀止的幾何圖形，令他們萬分亢奮，尤其是那幅高掛內廳的星形線，也就是因為它而引發異想不到的後果。

按：星形線在《畢氏定理四千年》一書中有專文介紹，它是由一根木棒靠在牆角逐漸下滑而得的（包絡）曲線。其代數方程式為

$$x^{3/2}+y^{3/2}=R^{3/2}$$　（為定值）

國王貪圖外星貴賓身上的寶物，包括神奇不死萬用豆、天馬行空星象球、玉樹臨風洗面乳**……**而 **Kevin** 則希望能在馬雅國境上開闢租界與興建度假村，並將星形線的繪製

方法帶回克氏星獻給統治者。不過雙方數談不攏，國王希望無須代價地獲得寶物，利用 **Kevin** 對星形線的熱中之心理，將他帶到了神殿的密室內，在保險箱中取出一幅國運圖，圖的最末記錄著一行式子：

$$\frac{a^x}{x}+\frac{b^y}{y}$$

其中的 **a**、**b** 在圖中用黃豆表示，而 **x**、**y** 則用玉米表示。國王對 **Kevin** 說花園內有一個星形線草地，我們依照先人所給的指示，我手裡拿著一把黃豆往裡頭灑，你拿一把玉米也往裡頭灑。黃豆落到草地裡才算有效，以其落點座標為 **(a, b)**；而玉米要落在星形線上才算有效，以其落點座標為 **(x, y)**。如今計算得分：

克氏星為黃豆乘積　　ab

馬雅國為圖中那行式子　$\dfrac{a^x}{x}+\dfrac{b^y}{y}$

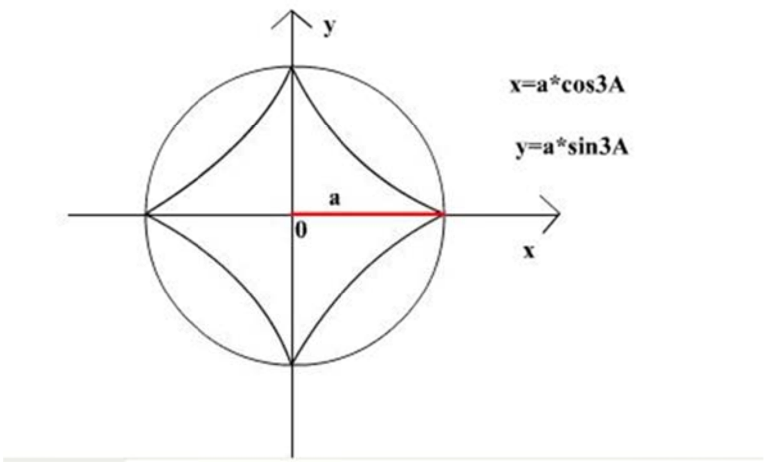
比得分高，若克氏星勝出則無條件出讓土地並贈送星形線的繪製法；反之，若馬雅國勝則對方必須無條件地交出寶物。

Kevin 想了一想，覺得這是機率問題(因為數學次太過離散了，察覺不出作假之處)，不過他為確保優勝，提出黃豆和玉米的選取要由他選定。國王略略思索後便答應了。午後便進行了這場「賭局」，結果如下：

	黃豆 NO.1	黃豆 NO.2	黃豆 NO.3	黃豆 NO.4	黃豆 NO.5	黃豆 NO.6	黃豆 NO.7	黃豆 NO.8
a	**0.455**	**0.307**	**0.182**	**0.083**	**0.274**	**0.734**	**0.288**	無效
b	**0.219**	**0.322**	**0.456**	**0.631**	**0.413**	**0.056**	**0.358**	
	玉米 NO.1	玉米 NO.2	玉米 NO.3	玉米 NO.4	玉米 NO.5	玉米 NO.6	玉米 NO.7	
X	**0.234**	**0.564**	**0.477**	**0.156**	無效	無效	無效	
Y	**0.489**	**0.179**	**0.243**	**0.599**				

註：這裡將星形線標準化，即取 **R=1**，得 $x^{3/2}+y^{3/2}=1$

然後 **a, b, x, y** 皆取絕對值



比賽完成後，**Kevin** 便先取了黃豆 **5 -**玉米 **4** 這組，結果

ab≈0.113 $\frac{a^x}{x}+\frac{b^y}{y}$**≈6.22** 輸得一塌糊塗!

然後取黃豆 **3-**玉米 **1** 這組，結果**:**

ab≈0.083 $\frac{a^x}{x}+\frac{b^y}{y}$**≈4.261** 又失敗了!

然後取黃豆 **1-**玉米 **3** 這組，結果**:**

ab≈0.1 $\frac{a^x}{x}+\frac{b^y}{y}$**≈4.285** 殘念 **Orz**

一連將 **28** 組都試驗過了，竟是落空而歸，只好將寶物送給了馬雅國王。當晚 **Kevin** 將消息傳回祖國，卻得到一份痛徹心扉的電報 **--** 他被耍了。電報署名 **Bob**，計算過程是他所寫的。**Kevin** 看了之後大怒，以最強火力突襲馬雅城，並挾持國王逼問星形線作法，心願了卻後，忿忿不平的 **Kevin** 來個回馬槍（外星生物武力超強悍滴），就回到了克羅尼西瓦星球。揮揮衣袖，留下一朵蕈狀雲。

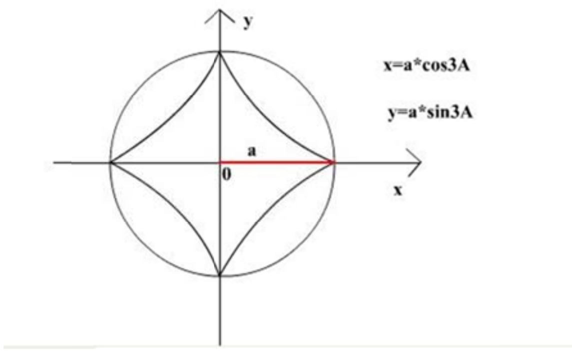
其實呢，道理很簡單，由於星形線完全落在單位院內部，所以 **a**、**b** 都小於 **1**，而且 **x**、**y** 也都小於 **1**，推導如下：

由於 **a<1** 且 **x<1** ，故 $a^x>a$ ，則 $\frac{a^x}{x}>a^x>a$

所以 $\frac{a^x}{x}+\frac{b^y}{y}>a+b=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2+2\sqrt{ab}$

$\geq 2\sqrt{ab}$

$\geq 2ab \quad \geq ab$ **(**其中 **ab<1**，故 $\sqrt{ab}>ab$**)**



喔 ~ 好吧，不得不說馬雅國王欺人太甚，不過真的令 **Kevin** 火冒三丈的是 **Bob** 所傳來電報之內容，裡頭也是一道不等式，如下：

若 **a, b>0** 且 **r, s>1** 滿足$\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$，則$ab\leq\frac{a^r}{r}+\frac{b^s}{s}$ **………….(*)**

證明：

令 $f(x)=bx-\frac{x^r}{r}$，則$\begin{cases} f'(x)=b-x^{r-1} \\ f''(x)=-(r-1)x^{r-2} \end{cases}$

極值判別點 **(critical point)** x_0 滿足

$f'(x)=0 \Rightarrow x_0=b^{\frac{1}{r-1}}$ **(僅一解)**

因此 $f''(x)=-(r-1)b^{\frac{r-2}{r-1}}<0$ 其中 $(r-1)>0, b^{\frac{r-2}{r-1}}>0$

故 $f(x_0)$ 為極大值點，那麼 $f(a)\le f(x_0)$

$$\Rightarrow ab-\frac{a^r}{r}\le bx_0-\frac{{x_0}^r}{r} = b\cdot b^{\frac{1}{r-1}}-\frac{1}{r}\cdot b^{\frac{r}{r-1}}$$

$$=b^{\frac{r}{r-1}}-\frac{1}{r}\cdot b^{\frac{r}{r-1}}=(1-\frac{1}{r})b^{\frac{r}{r-1}}$$

$$=\frac{1}{s}b^s$$ 其中 $(1-\frac{1}{r})=\frac{1}{s}$，$\frac{r}{r-1}=s$

$$\Rightarrow ab\le\frac{a^r}{r}+\frac{b^s}{s}$$

別說是外星人了，連我也會氣得跳腳，最好不等式可以這樣玩啦！不過話說回頭，以上的條件為 $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$，與現在的星形線 $x^{3/2}+y^{3/2}=1$ 好像不太一樣，那是不是可扳回一城呢？

$$x^{3/2}+y^{3/2}=1 \quad \Rightarrow \frac{1}{x^{-2/3}}+\frac{1}{y^{-2/3}}=1$$

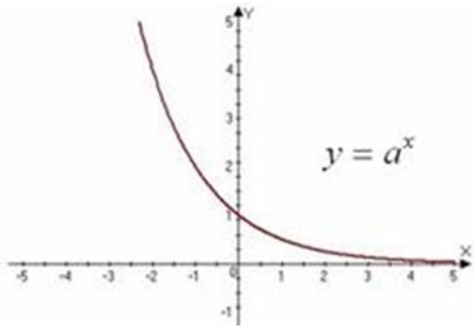
那麼可令 $r=x^{-2/3}$ 且 $s=y^{-2/3}$，則 $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$，所以有 $ab\le\frac{a^r}{r}+\frac{b^s}{s}$

值域的範圍 $x,\ y\in(0,\ 1) \quad \Rightarrow r,\ s\in(1,\ \infty)$

得下列不可思議之不等式：

$$ab\le\frac{a^r}{r}+\frac{b^s}{s}=\frac{a^{(x^{-2/3})}}{x^{-2/3}}+\frac{b^{(y^{-2/3})}}{y^{-2/3}}\underset{①}{\leqq}\frac{a^{(x^{-2/3})}}{x}+\frac{b^{(y^{-2/3})}}{y}\underset{②}{\leqq}\frac{a^x}{x}+\frac{b^y}{y}$$

對①、②式的解釋如下：



由於 **a<1**，故 a^x 是一個呈現左高右低的指數函數

而 **x<1**，故 $\underbrace{x<x^{-2/3}}_{①之理由}$ 所以 $\underbrace{a^{(x^{-2/3})}<a^x}_{②之理由}$

所以總得來說，看到如此「過分」的推導，難怪 **Kevin** 要大發雷霆了，不過真的深究起來應當是 **Bob** 的罪孽，好好的代數不等式不用，用這個老辣的不等式，嗆得大家火氣漲大。嘿嘿嘿 ~~ 小小兵就是這個樣！

為什麼要讀科普可能無法三言兩語說盡，但我們卻可從日常行為上領略到系統化、量值化的意涵。本文將數學美感從代數、幾何、微積分裡析出精華。這時我們才發現，簡簡單單的例子，啟發了我們本已褪溫的數學頭腦。雖然你我比不上高斯的偉大成就，但他在數學上的早慧已傳為美談。科普讀物的誕生，致力於走出皓首窮經的學者之研究室，摘一朵美麗的幾何小花，覆上代數結構的溫土，植在微積分的步道上，你我都能享受這般佳景。

記住筆者捎來的這句話 -- 讀科普便是靜態的玩味生活。

虛數 i 的引進：以三次方程式的歷史公案為例

陳政宏 臺灣師範大學數學系碩士班
徐雅薇 臺灣師範大學國文系三年級
黃炳琛 清華大學電子工程研究所碩士班
陳　杰 臺灣師範大學特教系三年級
施玟綺 臺灣師範大學特教系三年級

前言

關於虛數及複數在高中數學 **99** 課綱當中，首次出現在高一上學期第二章，[1]而多數教科書均以「i 的出現是為了讓 $x^2+1=0$ 有解」為出發點，或有認為此一設計乃因三次方程式的公式解過於複雜，以致高中課程無暇顧及。但此一說法卻與數學的發展相違背，學生在學習時無法體會虛數在數學上的合理性與便利性，而對其相關數學知識產生排斥感。現在，筆者藉由一個教學演示的機會，設計了以此歷史故事為出發點，進而介紹虛數 i 的出現及應用的教案。本教學演示為小組設計，其組員含數學系、國文系、物理系及特教系的同學。

教學前的準備

本次教學的取材包含兩個部分，其一是利用平方和乘積的問題引入，[2]讓學生感覺到，在未學習虛數之前，此問題有其難度。在課程後半段，我們會利用虛數的技巧，回頭來解此題。其二是引入爭奪三次方程式公式解優先權的故事，並從三次方程式的公式解中，尋找虛數 i 出現的必要性。而關於爭奪三次方程式公式解優先權的故事，許多書籍及文章都可以找到，筆者參考《當數學遇見文化》及《數說新語》兩本書的說法。但其故事出現人物眾多，[3]為清楚表示，在講述故事當中，也透過人物名字的小卡，在黑板上利用關係圖，描述人物間的關係。

教學活動流程

[1]高中數學 99 課綱當中將虛數與複數的課程拆成兩部份，第一部份在高一上學期第二章，介紹虛數及複數的概念，第二部份在自然組高三上學期第二章，介紹複數平面並結合三角函數後談及棣美弗定理。

[2] 即給定 a,b,c,d ，若 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=x^2+y^2$ ，求 x,y 。

[3] 包含費奧、費羅、塔塔利亞、卡丹諾、及費拉里。

教 學 活 動 流 程					
活動項目	師生的活動	時間	教學資源	學習評量	注意事項
	1. 讓學生計算題目：$(1^2+2^2)(3^2+4^2)=x^2+y^2$，求$x,y$，並詢問學生如何求得答案及數字稍大時該如何？當引起動機。	**2**	投影機、電腦、麥克風。	評量學生回答情形	**1.** 此題只利用實數的方法求解過於複雜，需透過虛數輔助，可化簡許多過程，以此點出虛數的應用性。
	2. 老師講述文藝復興時期關於數學家們的交流，首先是 **Fior** 和 **Tartaglia** 進行三次方程式公式解的決鬥，而 **Tartaglia** 獲得勝利，**Cardano** 多次請求 **Tartaglia** 透露其所知，並承諾不會將其公式公諸於世，但 **Cardano** 在出版的著作《**Ars Magna**》中，將三次方程式公式解詳盡的紀錄在其中，而引發 **Taraglia** 的不滿，欲與 **Cardano** 決鬥，**Cardano** 派出其學生 **Ferrari** 應戰，由 **Ferrari** 勝出。	**10**			**2.** 須注意學生是否專心聽講。
	3. 老師利用 **Cardano** 公式求方程式$x^3+6x=20$的解，得到$x=\sqrt[3]{10+\sqrt{108}}-\sqrt[3]{-10+\sqrt{108}}$，但其實此值等於 **2**。	**2**		評量學生回答情形	**3.** 解題過程簡明扼要。
	4. 老師利用 **Cardano** 公式求方程式$x^3=15x+4$的解，得到$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$，但其實此值等於 **4**。	**2**		評量學生回答情形	**4.** 需指出$\sqrt{-1}$的必要性。
	5. 解決引起動機時的問題，$(1^2+2^2)(3^2+4^2)=x^2+y^2$，得到$(x,y)=(5,10)$或$(11,2)$。	**4**		評量學生回答情形	
	6. 讓學生計算$(5^2+3^2)(11^2+1^2)=x^2+y^2$並讓學生上台發表解法。	**10**		評量學生回答情形	**5.** 注意班上秩序。

課後反應與回饋

經過教學演示後，台下學生有給予一些教學回饋，整理如下：

- 優點：
  1. 故事有搭配小卡很棒
  2. 課程多元化，融入數學與歷史，**GOOD**！
  3. 講述法講解清楚
  4. 老師表達清晰，教學清楚
  5. 老師有下台巡視
- 改進建議與討論：
  1. 課程太難、高一生不具備相當先備知識：
     不論是課堂當面回饋或紙本回饋中，均可見同學反應課程內容過難。不過在本小組討論後認為，本次課程內容所涉及到的概念為乘法公式與根式化簡。乘法公式於九年一貫課綱中屬於國二範圍「**A-4-13** 能熟練乘法公式」，而根式化簡則本屬高一範圍，因此在先備能力上應無太大問題。
  2. 數學和歷史比重失衡：
     針對此點，我們認為應是由於我們並未清楚傳達課堂重點，而同學亦不習慣數學史的教學內容所致。在過去的數學課當中，老師習慣在講解完概念後便直接解題，數學史部分多付之闕如，也因此大家對於數學史並不甚熟悉，認為其並不屬於數學課的一環。然而，依據「**HPM** 通訊」專刊中由台師大數學系碩士班研究生黃俊瑋所撰寫的「數學史值得融入數學教學嗎？」一文指出，將數學史融入教學優點有四：
     (1)引發學生學習動機與興趣
     (2)透過對於數學史料的探討，發展更有意義數學教材
     (3)瞭解數學與數學史本身的價值
     (4)數學史的認識，可帶給教師在教學上許多不同的啟發。
     由此可見，數學史有它相當的重要性，惟下次在教學時需要在時間上進行調配，使學生能完整學習單元內容卻又不失學習興趣。
  3. 目標不夠清楚明確：
     在本次的演示中，單元目標為「了解虛數 出現的歷史背景」與「認識虛數的定義及其性質」。之所以會讓大家覺得教學目標不夠明確、過於理想化的原因，推斷是因為大家不習慣上以數學史為主題的數學課。因此，我們認為下次教學演示前，應先針對教學演示的適用學生、單元內容安排進行更全面敘述，以讓同學可以迅速了解我們所要演示的部分與目的。
  4. 學生運算時間過少：
     針對此點，我們認為可以將故事前半部鋪陳減少，並且將較不重要的角色予以刪除，以讓故事架構更為清晰精簡，並將節省下來的時間用來給予學生親自解題，以增進學生在課堂中的參與感。
  5. 引起動機不夠強烈：
     依據此點，我們認為應該由「個別適應原則」做為討論考量。若今天要教導的為高一數理資優班學生，則本次的引起動機應足以使學生覺得有興趣，因其會

對於多元解題有高度熱忱；然而，若今天學生以文組學生為主，則應調整以數學史作為引起動機，透過故事使學生對於數學的排斥感降低，提升對課程內容的興趣後再引導解題，會讓課堂的引起動機更為充足強烈。

結論與建議

數學史融入數學教學，已非新興的想法，一般認為，學生端可以增加學生的學習動機，了解數學並非冷冰冰的知識，而是社會文化脈絡的一部分；教師端可以讓教師更清楚數學知識的來龍去脈，看見多元面向，有更多選擇讓學生了解課程內容。而這次筆者選用「爭奪三次方程式公式解優先權」為主題的授課內容，目的是讓學生體會到「虛數的出現並非數學家無聊的發明，而是數學家為了解決內心的掙扎，而最後，虛數也在科學界被認為是解決實際問題的捷徑」。從必要性與實用性兩個層面著手，來增加數學課程的豐富度，必非只是單純的解題訓練而已。課後，多數學生反應課程內容過難、認為數學與歷史的比例不恰當、學生演算時間過少等等許多問題。許多的回應也看得出，多數學生對於現行中學數學的刻板印象為「數學就是老師解題、學生練習習題」，也因曾經在數學課堂中受到太大的挫傷，導致現在遇到數學便產生排斥感，而這也是我國數學教育目前最大的難題。藉由這次活動，使筆者在未來若要撰寫類似方式的教案及教學時，能夠記取經驗，設計的教案及課程，能夠保有數學史融入教學的優點，也能讓學生更加融入數學以及降低對數學的排斥感。

參考文獻

比爾・柏林霍夫/佛南度・辜維亞著，洪萬生、英家銘暨 HPM 團對譯 **(2008).**《溫柔數學史》，台北：博雅書屋。

英家銘、蘇意雯 **(2009).**〈數學與禮物交換〉，洪萬生等著，《當數學遇見文化》（台北：三民書局）頁 **110-122**。

洪萬生 **(2014).**〈「虛數」先「實說」〉，洪萬生等著，《數說新語》（台北：開學文化）頁 **143-150**。

洪萬生 **(2014).**〈虛數終於「現身」〉，洪萬生等著，《數說新語》（台北：開學文化）頁 **151-156**。