HPM通訊

第二卷 第一期 目錄(1999 年 1 月)

創刊日：1998 年 10 月 5 日　　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng

康熙皇帝與符號代數

洪萬生

臺灣師範大學數學系教授

歐基里得(Euclid)曾說：「學習幾何學沒有王者之路!」。事實上，學習代數學亦然，譬如說吧，在中國數學史上鼎鼎大名的康熙皇帝，就在符號代數的學習過程中，表現了類似今日國中學生茫然不知所措的模樣，這個歷史經驗，實在很值得教學工作者參考與借鏡。

這裡所指的符號代數，當然是清初傳教士傳入中國的西方數學知識。當時有兩種西方代數傳入中國，第一種被稱作「「借根方比例法」，第二種則叫作「阿爾熱巴拉新法」。所謂「阿爾熱巴拉」，無疑是英文"algebra"的音譯，也曾被稱作「阿爾熱巴達」或「阿爾朱巴爾」（當是法文"algebre"的音譯）。其實，這幾個名稱也都曾指涉第一種，譬如在公元 1711 年，康熙皇帝與直隸巡撫趙宏燮討論數學時，就指出：

> 算法之理，皆出於【易經】，即西洋算法亦善，原係中國算法，彼稱為「阿爾朱巴爾」者，傳自東方之謂也。

隔年梅瑴成入宮肄業於暢春園的蒙養齋，負責主編【數理精蘊】等書，康熙皇帝授以傳教士傳入的代數學，並且諭示：

> 西洋人名此書為阿爾熱巴達，譯言東來法也。

按此書可能是某傳教士所譯的【借根方算法節要】。至於在該書中不沿襲原名而改稱為「借根方法」，「乃譯書者就其法而質言之也。」換句話說，「借根方（比例）法」是一種「意譯」!後來奉康熙皇帝指示，梅瑴成遂將它編入【數理精蘊】（1723）卷三十二 -- 三十六。

然則何以"algebra"是一種「東來法」呢？這就必須追溯這個英文字的語源了。原來"algebra"相當

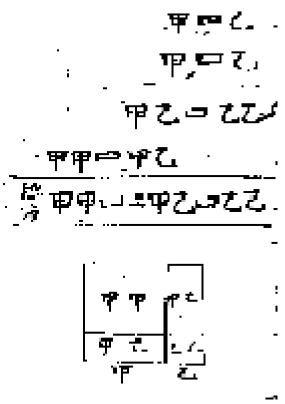
於拉丁文的"al-jabr"，出自阿拉伯數學家阿爾花拉子模（Al-Khwarizmi， 第九世紀）的一本代數著作的書名 (Hisab al-jabr w'al muqabala)，原指「還原」（restoration）之意，例如將 $2x+5=5-3x$「還原」成 $5x+5=5$。這種代數不但未涉及符號法則（symbolism），當然也不曾引進文字係數；同時，方程式（equation，原意是令相等之後所得到的式子）兩端也像天平平衡一樣而不等於零，譬如二次方程就表示成像 $x^2+6x=4$ 等等；此外，求解程序也都以文字敘述。後來再由義大利數學家卡丹（G. Cardano, 1501-1576）全盤接收，因此，對西歐人而言才有「東來法」之說。至於「符號代數」（symbolic algebra），則是第二種，亦即「阿爾熱巴拉新法」的主旨，源自法國數學家維達（F. Vieta, 1540-1603）著作【解析方法入門】（Introduction to Analytic Art，1591-95）的發明。它的特徵除了代數方程的係數以文字符號表示、符號可以一如數目演算之外，方程式任何一端可以置零，譬如 $ax^2+bx+c=0$；還有，維達也特別強調代數是研究像二次方程這種「形式」(species or forms of things)的學問，而算術則完全訴諸數目(species of numbers)。

有趣的是，當時中國人為了安心學習西算，遂將「東來」解釋成來自中國，於是，梅瑴成就以【測圓海鏡】（元李冶撰）與【數理精蘊】中例子，來比較「天元術」與「借根方法」，證明它們「名異而實同」。可惜，中土「不知何故遂失其傳，猶幸遠人慕化，復得故物」，「東來之名」正好表示西人不忘本，如此說來，中國人怎麼可以不好好地學習西算呢。這是梅瑴成為盛行於明末清初「西學中原說」所下的最佳注腳。

如此說來，康熙皇帝不可能對一樣是代數學的「阿爾熱巴拉新法」沒有興趣。問題是：何以由康熙皇帝主編的【數理精蘊】隻字不提「新法」？最主要的原因之一是：康熙皇帝無法了解符號演算的意義。這當然也可能涉及引進者的數學素養及其數學傳統。事實上，【阿爾熱巴拉新法】是法國傳教士傅聖澤（Jean Francios Foucquet, 1665-1741）為了教導康熙皇帝學習「新代數」而寫的。一七一一年之後，傅聖澤應召入宮伴讀西方天算。有一天，康熙想知道傅聖澤對代數的看法，於是，傅聖澤遂趁機介紹「新代數」，並強調它比「舊」代數更簡單而且更具有一般性。其實，在【阿爾熱巴拉新法】卷一第一節中，傅聖澤即強調了「新法與舊法之所以異」：

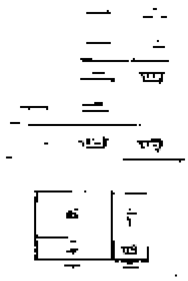
> 或問：阿爾熱巴拉舊法，乃最深遠之法也，何為又有新法，意必舊法猶有未善者與？ 答曰：舊法未嘗不善，但於通融之處，有所不及也，故又有新法濟之。

既然如此，那麼二法何以區別呢？傅聖澤指出：「所以異者，因舊法所用之記號，乃數目字樣，新法所用之記號，乃可以通融之記號。」所謂「通融記號」，即是指代數符號，「在中華可以用天干地支二十二字以代之」。為了說明它的便利與巧妙，傅聖澤「試以一式明之。假如有一題，凡兩個數目字之平方，必包涵四件，乃每字之平方，與兩字相乘之兩長方，今將十二之兩數目字以發明其理。」請參閱我們從該書所複製下來的插圖及說明，即可發現傅聖澤試圖利用幾何意義從 $(10+2)(10+2)=100+2(10)(2)+4$ 來「類推」$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，此二項式被翻譯成（甲+乙）（甲+乙）= 甲甲+二甲乙+乙乙（請注意該書「加號」與「等號」與現行不同）。從教學觀點來看，傅聖澤的解釋可以說是盡心盡力了，不過，對西算造詣頗深的康熙皇帝還是作出如下的反應：



諭王道化：朕自起身起身以來，每日同阿哥等察【阿而熱巴拉新法】，最難明白，他說比舊法易，看來比舊法愈難，錯處易甚多，驁突處也不少 ...... 還有言者：甲乘甲、乙乘乙，總無數目，即乘出來亦不知多少，看起來想是此人算法平平耳。（參考【掌故叢編】二輯【清聖組諭旨二】）

在西方數學史上，符號代數在十六世紀末被發明之後，大約花了將近一世紀的時間才逐漸被數學家廣泛接受。究其原因，這些西方數學家應該跟康熙皇帝一樣，無法了解符號演算的意義。由此一歷史教訓，我們或可推論：符號代數的學習需要比較成熟的數學心智，因為即使天縱英明如康熙也表現得束手無策。所以，我們希望國中教師在講解一元一次方程的解法時，千萬多一點耐心與包容，因為從數目演算到符號演算這個「認知跳躍」，對貴賤賢愚顯然一視同仁，都是必須努力才能跨越的門檻!



參考文獻

1. 洪萬生，「清初西方代數之輸入」，收入洪萬生著【孔子與數學】，台北明文書局，1991。
2. 洪萬生，「【代數學】：中國近代第一本西方代數學譯本（上）」，【科學月刊】第二十四卷第十二期（1993 年 12 月），頁 938-945。
3. 洪萬生，「【代數學】」：中國近代第一本西方代數學譯本（下），【科學月刊】　第二十五卷第一期（1994 年 1 月），頁 59-65。
4. 洪萬生，「數學史與代數學習」，【科學月刊】第二十七卷第七期（1996 年 7 月），　頁 560-567。

數學哲學：柏拉圖 vs. 亞里斯多德

蘇意雯老師
台師大數學系博士班研究生 成功高中

希臘是哲學影響數學發展最顯著之年代，其中柏拉圖、亞里斯多德師徒尤其扮演極重要的角色。本文將介紹哲學家的數學哲學。

一、柏拉圖的數學哲學

柏拉圖(427~347B.C)並不是數學家，但他相當熱衷數學，因為他認為數學對哲學非常重要，對於宇宙之探討也有很大的助益。這種見解鼓舞了數學家們的研究工作，值得一提的是，幾乎所有第四世紀重要的數學成就，都是柏拉圖的朋友或學生的傑作，柏拉圖本身對於這些作品的潤飾曾下了許多功夫。柏拉圖的五種多面體：四面體、六面體、八面體、十二面體、二十面體也於後來歐幾里得的「幾何原本」第十三冊中出現。柏拉圖想在所有變化無常的事物中找出永恆與不變之物，所以他把世界分為理型世界和物質世界。在後者各種關係都不斷地在變動，所以不能呈現出最後的真理。但在理型世界中，各種關係都是永恆不變的，是絕對的真理，這才是哲學家真正關心的事。而數學觀念正是哲學觀念的基礎，是認識理型世界的必備條件。

第一位在雅典誕生的偉大哲學家蘇格拉底（470~399B.C）從未留下任何文字，主要是靠學生柏拉圖的幾本「對話錄」讓世人得以得知蘇格拉底的哲學思想和生平。柏拉圖在「共和國」一書中，描述了蘇格拉底對 Glaucon 的談話，藉由這份對談我們可更清楚的了解柏拉圖學派的數學見解。

「肉體的訓練是有關於多變的世界及身體，通識教育則是著重道德的陶冶。但有一種知識是我們不可或缺的。我們所追求的這種知識有兩種用途，一種是軍事上的，另一種是哲學上的。因為打仗的人必須研究數目，否則便無法整頓隊伍。哲學家們亦然，他們需要在浩瀚多變的知識領域中尋出真理並緊握它們，所以他必須同時是一個算術家。......我們必須盡力勸勉城邦未來的領袖學習算術，不僅僅是業餘學習，要不停的學習，直到能用心靈來體會數目的存在為止。......領袖們必須為軍事用途和自己的靈性研讀數學，也因為這是使他們能辨別真理和存在的捷徑。」

簡而言之，柏拉圖對數學發展的主要貢獻可歸結為下述三點：

1. 他釐清了數學是針對概念而不是處理在紙上畫的線或寫的數字。
2. 他鼓舞了很多人「為數學而數學」。
3. 他要求以數學的研讀作為成為一名哲學家的預備條件。

由於柏拉圖學派對數學如此推崇，他們贊成數學真理不依賴於人的思維而是客觀存在的，也就是說，數學真理是被發現的。這個論點是其學派的重要主張。

二、亞里斯多德的數學哲學

亞里斯多德（384~322B.C）是希臘最後一位大哲學家。他的父親是一位醫生，在亞里斯多德十七歲時將他送往柏拉圖學院，亞里斯多德在那兒度過二十年的時間。西元前 342 年，亞里斯多德回到

Macedonia 擔任亞歷山大大帝的家庭教師達兩三年之久。

數學，形上學，以及物理學是亞里斯多德的三種理論科學。亞里斯多德擅於利用數學描述科學方法，他不是一個專業的數學家，但亞里斯多德擁有當時的基本數學知識。雖然亞里斯多德深知尤多薩斯在比例論上的重要貢獻，也熟習窮舉法（此法可對面積和體積的計算作精密的處理），但這並不表示亞里斯多德關注到較高等的數學。在「形上學」的第一章中，亞里斯多德提及「凡人都有生而求知的慾望」，「我們必須視物理及數學科學為智慧的一部份」。亞里斯多德認為當我們考慮數學物件時，雖然事實上無法從物質抽離，但我們卻可想像其已分開。

雖然亞里斯多德曾師事柏拉圖達二十年之久，但兩人對數學的看法並不一致。柏拉圖認為有一個獨立且永久存在的理型世界，是宇宙真面目的顯現，數學概念是屬於這個世界的一部份。但亞里斯多德對眼前存在的事物較為關注，柏拉圖認為在物質世界中看到的一切事物純粹只是更高層次的理型世界中那些事物的影子，亞里斯多德則認為人類靈魂中存在的事物純粹只是自然事物的影子，自然就是真實的世界。他認為數目和幾何形狀也是物體的屬性，雖然人們經由抽象化才能了解，但它們仍屬於物體，所以數學研究的對象是從物理實體上面所引出來的抽象觀念。如前所述，依照柏拉圖的說法，在物質世界和理型世界中，數學是屬於理型的世界中；那麼亞里斯多德則是認為，數學仍然必須附著在物質裡面，數學知識是物質世界通往理型世界的橋樑，在理型與物質之間居於中介的地位。

三、保障數學知識之客觀性

柏拉圖關心永恆不變的事物與流動事物之間的關係，在他的「理念世界」中包含了存在於自然界各種現象背後，永恆不變的模式。柏拉圖認為數學觀念是哲學的基礎，數學的狀態永遠不會改變，也是人可以真正瞭解的狀態，是認識「理念世界」的必備條件。在柏拉圖描述蘇格拉底與小男孩的對話錄中，蘇格拉底認為「人生而有數學知識」，因為相信靈魂不朽，所以「learning is recollection」。柏拉圖引用輪迴理論說，主張在我們的前一輩子，對於真理已經有了直接經驗，我們只需要重新喚醒這些經驗去瞭解數學真理。既然數學是永恆的存在，只是等待人們去喚醒，如此人們所獲得的數學知識應該都是客觀的。

至於亞里斯多德則對眼前存在的事物較為關切，他認為我們所有的每一種想意念都是透過我們看到、聽到的事物而進入我們的意識。但其最後獲致的也是對觀念的強調，這些觀念就是物質的屬性。我們看到的數學物件雖然沒有辦法與物質分離，但是我們可以獲得抽象性的觀念，這些觀念是從實體上萃取出來的，因此，數學知識的客觀性就得以保障。

參考文獻

1. Fauvel, John and Jeremy Gray 1987. The History of Mathematics: A Reader, The Open University. Heath, T. L. 1980. Mathematics in Aristotle, Garlano Publishing, Inc.
2. Kline, Morris 1983.《數學史- 數學思想的發展上冊》(Mathematical Thought from Ancient to Modern Time), 林炎全、洪萬生、楊康景松譯，台北：九章出版社。
3. Gaarder, Jostein 1996. 《蘇菲的世界》(The Sophie偲 World)，蕭寶森譯，台北：智庫出版社。

餐飲數學度量衡

林裕意老師
開平高中

這學期，本校數學老師們不斷地參加「數學科教學研討會」(每週一次)，透過腦力激盪，無所不用其極地找點子，想給學生一些生活化的、有趣的數學活動，期望不論學生數學基礎如何，都能投入活動中，從活動中學習。恰巧我擔任餐飲科一年級數學課程，根據餐飲專業老師的經驗，餐飲科學生對於度、量、衡須要有實物上的概念，所以，我以餐飲科的角度來作教學設計，希望學生從活動中「滿足了」餐飲科的期待，也達到了我對他們數學專業的要求。

首先，就如餐飲科老師說的：「學生作西餐時，最難的是取得液體量器，這種量器很貴，因此，如何從生活周邊取得替代量器，是一種考驗。」當然他也可以到便利商店購買飲料(罐上有標示容量)作為量器，但這是「學生」階段的作法。如果真正上廚房，客人正在等待您這位「師傅」的作品，如何在這「手忙腳亂」的情況下取得最佳容器，可就是一大考驗了。即使要去便利商店，是否可在最短的時間決定買什麼？這就是功力的考驗了。我拿了一個瓶裝牛奶容器（一公升裝)，也拿了一個家庭號牛奶容器(1/2 加侖裝)，問學生一公升約等於多少加侖？我要求學生親自用瓶裝牛奶容器裝水，倒入家庭號牛奶容器中，看看要倒幾次，才能將家庭號裝滿？ 這個活動主要是幫助學生瞭解：1. 餐飲廚房一定要有的液體容量概念。2. 常用的英制公制單位換算概念。一公升（1000 公克）的水到底有多少量（用容器記）呢？一加侖的水到底有多少量（用容器記）？學生需要有量的概念。當然這其中還要有不同的液體(因為兩樣液體密度不同)，同樣的重量不同體積的概念(例如沙拉油 1000 公克的量比水 1000 公克的量多)......學生不須要求出精確數字，有了概念後再查換算公式，即可正確算出材料。如此學習方式沒有心理負擔。

接著，我再將學生分組並發給每組一張半開白報紙、一條約 50 公分的塑膠繩，一枝鉛筆、一枝約 30 公分的尺，然後宣佈：「請每一組同學想辦法化一個 14 吋和 10 吋的披薩在紙上，要依自己那組人數將披薩畫出平分，讓大家都公平，都有得吃。同時，要將這兩個圓的半徑，以“公分”表示，寫在旁邊。若畫得好，我將依你們那組畫出的結果，請吃披薩。」學生們興奮極了，紛紛要求吃什麼口味，好像已經畫好，也評分通過一樣。的確，一個高中生誰不會畫圓呢？誰不會平分呢？多麼簡單的一件事啊！

是的！大家都知道很簡單，但，再怎麼簡單也得把它畫出來啊！每一組學生七嘴八舌，手忙腳亂，有一組用筆將繩子的一端定住撐直繩子，再將另一端綁著鉛筆也稍定住，然後紙繞圈圈，只摩擦鉛筆畫出圓；大部份的人則是將繩子的一端定住撐直繩子，然後另一端拿著綁著的鉛筆，在紙上畫圈圈。突然有一位學生很憂愁的來告訴我：「老師，紙太小張了，怎麼辦？」我驚訝的回答她：「喔！你的披薩有多大？」「14 吋披薩很大呢！」她比了一下。我懷疑的說：「咦！我怎麼沒吃過那麼大的披薩？」「嗯！..對喔！」她恍然大悟，快樂的話披薩了...。又有一組學生來告訴我：「老師！我們這組有九個人，我可不可以放棄不吃，這樣我們分八塊就可以了。」這些學生，竟為了吃披薩，想替我改題目。我笑笑的告訴他：「何不請老師吃一塊，你們可以把它平分十份。」因為一張紙，學生們用摺紙或目測的方式平分了圓。我收回了學生的作品沒多說什麼，就下課了......。下課後，有幾位學生前來問我，「老師，您真的要請我們吃披薩嗎？」「是的！」學生半信半疑地走了。

隔兩天上課，我帶了六盒披薩上講台。因為，披薩店早已切分好披薩了，大家不須為如何平分煩惱，開心地吃起披薩來。吃披薩的同時，我開始提出一些問題，問學生：「如果今天有人生日，買了個大蛋糕請大家吃，刀子就在你的手上，請你切分蛋糕給大家，請問你如何下手？你敢切嗎？一刀一刀的切下去嗎（如右圖）？你想使用量角器嗎？大家等著吃蛋糕喔！要請全班四十幾人吃，我勢必買最大吋（直徑量）的蛋糕。切下去的結果盤裝得下嗎？」「切出來的蛋糕站得住嗎？」我拿著盤子比劃給大家看，大家邊吃披薩邊搖頭「那麼，你怎麼辦？......」我說。有人說：「老師，我切正方形！」「很好，要公平喔！可別切到後來留一些邊邊，給誰吃呢？在紙上畫蛋糕很容易，畫不好擦掉，但手拿刀子切蛋糕，可是一切下去就定了。」我說。大家邊吃蛋糕邊思考如何切蛋糕......。這是一見很有趣的問題，它沒有標準答案，但無可否認的，有數學概念的人切蛋糕和沒數學概念的人切蛋糕，應該有些差別吧。您覺得呢？ 這個互動課程適合開學一個月內的新鮮人，它可以幫助大家建立良好的師生關係，同學友誼，也可以從活動中思考一些數學問題。還不錯！

向大師學習 Part 2

林倉億老師

長安國中

黑暗大廈

在懷爾斯想好避開眾人的耳目之後，他便著手進入數學中的這座摩天大樓，他說：「設想你進入大廈的第一個房間，裡面很黑，一片漆黑。你在傢俱間跌跌撞撞，但是逐漸你搞清楚了每一件傢俱所在的位置。最後經過六個月或再多一些的時間，你找到了電燈開關，打開了燈；突然整個房間充滿光明，你能確切明白你在何處。然後你又進入下一個房間，又在黑暗中摸索了六個月。因此每一次這樣的突破，僅管有時候只是一瞬間的事，有時候要一兩天的時間，但它們實際上是這之前的許多個月裡在黑暗中跌跌撞撞的最終結果，沒有前面的這一切，它們是不可能出現的。」

剛面對一個全新的難題，就有如瞎子摸象般，連弄清楚整個狀況都十分困難，更遑論去解決問題了。看看懷爾斯，他花了六個月的時間才找到了第一個房間的電燈開關，至於在這之間跌跌撞撞的辛酸不是言語可以描述的。但這還只是第一個房間，往後還有更多的房間等著懷爾斯，若非有過人的毅力與崇高的理想，是不可能走過這孤獨而又辛苦的這一段黑暗之路。

除了夢想之外，這一路走來還有什麼支持著懷爾斯呢？「你可能會問我怎麼會花無止盡的時間在一個可能無解的問題上，答案是我就是喜歡研究這個問題，我迷上它了！我喜愛用我的智慧來對抗它。此外，我一直確信即使我所研究的數學不夠有力去證明谷山─志村猜想，也就是無法證明『費馬最後定理』，但一定會證明某些東西，我並不是正走向一個死胡同，這一定是好的數學，一直都是。確實有一個可能那就是我沒法證明『費馬最後定理』，但絕對沒有下列的一個問題：我只是在浪費我的時間！」

石破天驚

經過了七年的全心投入，在 1993 年的五月，懷爾斯終於從黑暗大廈中走出來了，完成了三十年來的夢想─證明「費馬最後定理」。他原本想徹底、仔細地核對一次證明，但在六月份剛好有一個數論的研討會要在劍橋大學的牛頓研究所舉行，屆時世界上所有著名的數論學家都會出席這個會議。劍橋，懷爾斯的故鄉，也就是在這裡，他真正進入高等數學的殿堂，再也沒有比劍橋更適合宣布這證明的地方了。因此懷爾斯決定出席這項會議，並讓作了三百多年噩夢的人類在劍橋清醒！

懷爾斯將他的證明分成三次演講，但這三次演講所定的題目都沒有透露出他已經證明了費馬最後定理，甚至看不出來跟費馬最後定理有何直接的關聯。雖然如此，在他第一次的演講開始前，流言，特別是 E-mail 已經開始散布懷爾斯即將證明「費馬最後定理」的消息，不過懷爾斯並沒有去回答這些問題，只是淡淡的說：「來聽我的演講就知道了！」

一個好的導演會緊緊扣住觀眾的心，慢慢累積能量，然後在最後一股腦釋放出來！在前兩場演講，

懷爾斯依舊沒有透露任何關於「費馬最後定理」的消息，與會者也不確定懷爾斯究竟是否證明了它，也正因為如此，在第三次演講之前，流言已經襲捲會場的每一個人，並到了教人不得不信的地步，能量已經累積到最高點了！

1993 年 6 月 23 日，演講還沒開始，演講廳內早就人聲鼎沸，擠的水洩不通了；有許多人並不是想知道如何證明「費馬最後定理」，而純粹只是想見證這歷史性的一刻，許多人偷偷帶了相機進去，就連牛頓研究所的所長都事先準備了一瓶香檳。當懷爾斯開始宣布他的傑作時，會場保持著不尋常的寂靜，甚為莊重。在懷爾斯最後一次轉向黑板，寫出費馬最後定理這個命題，並緩緩的對著全場的聽眾說：「我想，我就在這裡結束！」，霎時間，掌聲與歡呼聲淹沒了整個演講廳，久久不已，人類累積了三百多年的能量在這一瞬間，全部爆發了！

然而，「費馬最後定理」真的被證明了嗎？

黑洞

1993 年 6 月 24 日的所有報紙的頭版均大幅報導了前一天「費馬最後定理」被證明了的消息，成千上萬的記者擠著要訪問懷爾斯，原本是乏人問津的數論，一下子成了全世界的大熱門，激情的記者們開始替懷爾斯冠上各式聳動的頭銜，諸如本世紀最偉大的數學家此類，懷爾斯還成了英國某家服飾的廣告代言人。不過對數學而言，一個證明並不是由一位數學家宣布成立就算數，它必須經過其他數學家的檢驗，而懷爾斯的證明正受到有史以來最嚴格的審核。

由於懷爾斯許多的創新方法實在是太深奧精妙了，就連審核的數學家也不能輕易理解，所以審核的速度非常的慢。審核委員們會將不清楚的地方傳真或 E-mail 給懷爾斯以尋求解答，通常懷爾斯會在同一天或是隔天就回覆他們的問題。感人肺腑、教人久久無法忘懷的故事都有著峰迴路轉的劇情，這一個也不例外。一個乍看不起眼的小問題困擾了懷爾斯，慢慢地發現這個小問題就像宇宙黑洞般，不斷地侵蝕整個證明，再加上外界要求公開證明的壓力與日俱增，懷爾斯的身心遭受了空前痛苦的煎熬。

距離劍橋的演講已經一年多了，懷爾斯依然對這個問題一籌莫展。他的一位好友彼得·薩納克(Peter Sarnak)做了一個貼切的比喻來形容懷爾斯的處境：這就像在一個房間裡鋪一張比房間還大的地毯，你將這裡壓平，一定就會有個地方凸起，無論如何，就是無法將地毯鋪平！

重見光明

八年辛勤的努力，懷爾斯似乎仍舊無法克服費馬所留下來的魔障，他已經準備宣布失敗，並將他有缺憾的證明公諸於世，讓有興趣的人去研究，或許會有人在他的基礎上真正證明了「費馬最後定理」，不過，這對懷爾斯來說是一種殘酷的希望。懷爾斯並不甘心，他想知道失敗的原因，想知道為何所使用的方法行不通，就像小時研究歷史上挫敗在「費馬最後定理」下的數學方法一樣。

就在 1995 年的 9 月 19 日，在做最後檢驗為何失敗的時間裡，懷爾斯突然警覺到，現在這個方法雖然無效，但卻能夠和他三年前失敗的方法結合成一個新的方法，如此就能夠堵住證明中的黑洞。這實在太瘋狂了，懷爾斯激動地回憶這個時刻時，眼淚不禁奪眶而出:「它(指解決方法)美得無法形容！它是如此的簡單而優雅，我不能了解為何我會錯過它，我無法相信地看著它二十分鐘，......我是如此的興奮而無法沒法控制自己，這是我生命中最重要的一刻，再也不會有任何一件事比它更有意義了！」

後記

絢麗的煙火在向世人展現它耀眼奪目的光芒前，必需在黑暗中默默地飛行，飛得越高，光芒傳得也就越遠！

經過七年的努力及最後十四個月的煎熬，懷爾斯終於證明了「費馬最後定理」，再也沒有任何疑問及錯誤了！經過了三十二年，懷爾斯終於將他孩時的夢想付諸實現，也實現了人類三百多年來的夢想。懷爾斯的偉大及其影響，我在此便不再贅述，我想說的是，懷爾斯絕對不是這三百多年來最聰明的人，但是由他證明了「費馬最後定理」，這其中一個主因是數學整體的突飛猛進，提供了懷爾斯適當的工具與環境。但更重要的是他的熱情、堅持與自信，相信自己所做的即使不能證明「費馬最後定理」，但也將對數學有重大的貢獻，如此他才能渡過這漫漫長夜；任何人能夠孤獨無援的七年中專注地從事一件全新的挑戰，這就值得稱揚道頌，更何況在七年後面臨更殘酷的挑戰還能站起來！

懷爾斯的故事是個感人且膾炙人口的故事，不過，對於從事數學教育的我們，絕不能把它視為一個故事而已，說一個假設性且有點無趣的問題，今天懷爾斯若是身在台灣的教育環境之下，他還能夠證明「費馬最後定理」嗎？我想他應該連擁有夢想的機會都沒有吧！純個人淺見。

「我想，我就在這裡結束！」

參考文獻

Simon Singh, Fermat Last Theorem

新書櫥窗

書名：數學思考（Thinking Mathematically)
作者：John Mason with Leone Burton & Kave　Stacey
譯者：建中 49 屆 314 班全體同學合譯
出版社：九章出版社
出版資料：216 頁　定價：200 元

蘇惠玉老師
西松高中

九章出版社最近新出的這一本書《數學思考》，相信很多數學老師看了都會覺得非常興奮，因為這一本書，解決了困惱數學老師許久的問題：如何教學生思考，並且是符合數學邏輯的思考。

在這一本書的序中，作者說了「Thinking Mathematically 是一種研究數學的方法」，作者想要告訴讀者「如何下手去解決『任何』問題，如何有效的擊破問題，及如何由經驗中去學習。」所以作者建議讀者三個階段的思考模式：

1. 進入：從特殊化開始，以明瞭題目。而這建立在三個問題上：我的已知是什麼？我的所求是什麼？我能引入什麼？
2. 攻擊：作者以兩個字表示：STUCK（類似卡住了）以及 AHA（類似恍然大悟的語助詞)，還有一些基本的數學方法，像是猜想、證明，而這些還是都靠特殊化和一般化。
3. 回顧：包含了檢查你作了什麼、反思一些關鍵點並試著將方法及結果推展至更廣的情況。

當然這一套方法，如果沒有實際的例題來演練配合的話，等於是空談。所以作者以一百個題目來讓讀者即在的練習思考，並且提供適當的指引，讓讀者習慣碰到問題時，需要提出什麼樣的問題來讓自己進一步的思考並進一步解決問題。所以，這本書等於是數學思考訓練的教戰手冊。

這本書不只帶給學生解題、思考的啟發，作者並且給了數學老師一個很重要的啟示　：不成功的嘗試比快速解決問題更能讓學生學到東西，它可使你認真思考問題。讓我們可以好好的思考一個問題：數學教育的目標到底是什麼？是讓學生熟練某一類型問題的解題技巧嗎？還是學生考試得高分就好呢？數學教育有一部份的目標，不是應該在於訓練學生邏輯推理的思考方式嗎？為什麼我們教出了那麼多不懂得思考的學生呢？這是一個值得深思的問題！

書名：生活的數學
作者：羅浩源
出版社：九章出版社
出版資料：181 頁，240 元

蘇俊鴻老師
新店高中

“長久以來，有不少人都錯誤地的認為學習數學等同於了解定理的証明、背誦及套用公式、熟讀例題及操練習題，因此感到枯燥乏味從而缺乏學習的與趣。其實，數學既是一門抽象的學科，亦與生活息息相關的；它不僅僅是智性的追求，而且是充滿美感的。”這是作者在書背留下此書的寫作動機。

翻閱內容，果真能讓人感受作者企圖將數學與生活事例之間的鴻溝填滿的努力！透過 80 則例子，讓我們理解學習過的數學知識及方法和生活周遭事物能有更深刻的互動。例如：跳射有助把籃球射入網中嗎？琴鍵上的數學：音調是按等比級數遞升？兩個硬幣可轉出天文現象？等等。

全書依(A)代數(B)算術(C)幾何、解析幾何及三角學(D)概率和統計四部份，在每個例子的說明上，作者均試著用最淺顯的語句及圖表說明，對於提及的數學概念、定理及公式，也會附上詳細的說明，為老是大嘆尋無適當例子的老師們提供不少參考。