HPM通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）
助理編輯：李建勳、黃俊瑋（台灣師大數學所研究生）
編輯小組：蘇意雯（台北市立教育大學）蘇俊鴻（北一女中）
黃清揚（福和國中）葉吉海（新竹高中）
陳彥宏（成功高中）陳啟文（中山女高）
王文珮（青溪國中）黃哲男（台南女中）
英家銘（台師大數學系）謝佳叡（台師大數學系）
創刊日：1998 年 10 月 5 日　　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng

第二卷 第十一期 目錄(1999 年 11 月)

HPM 的法國經驗：在教學中融入古代數學問題

洪萬生教授

台師大學數學系

問題及其求解（problem-solving）是數學的靈魂，大概是數學家與數學史家對「何謂數學」的一個最根本共識。譬如「費瑪最後定理」的證明追求，就大大地主導了數學界主流的知識活動。在數學教育過程中，如何設計（或選擇）恰當的「問題」作為課堂練習或課後作業，當然也是數學教師必須嚴肅面對的工作之一。誠然，恰當的問題，不僅可以提醒學生隨時綜合整理所學，引發進一步學習的興趣，在另一方面，它也可以幫助教師掌握學生的學習評量狀況，調整教學的內容與策略。

不過，問題設計得適「才」適「性」，實在不是一件容易的事。很多教師（包括明星學校的名師）設計題目難如登天，根本起不了「問題」在數學發展（或學習）過程中所扮演的積極角色。其實，對於擁有一點數學的專業訓練的教師而言，難題儘可順手拈來，天下畢竟沒有考不倒的學生！然而，要想將題目設計得恰當而深刻，教師就需要對數學專業多一點洞識與練達了。

當然，在某些脈絡中，某一數學問題的恰當與否，大概不容易有一致的判準。譬如試證明「圓面積等於半周半徑相乘」（出自【九章算術】）、「兩圓形的比等於其各自直徑所張拓的正方形之比」（出自【幾何原本】）與「圓面積等於其半徑與圓周長為兩股的直角三角形面積」（出自阿基米德【圓之度量】）等三個「圓面積」公式，哪一個比較「恰當」，恐怕就取決於「被使用」的脈絡了。

既然如此，我們不妨將充實問題的「庫藏」視為第一優先。而這正是 HPM 的推動者可以大力挹注之處。無論如何，如何將古代數學問題「融入」課堂之中，並進而提昇學生的學習興趣與效果，或許也正是 HPM 無法迴避的「正當性」了。有鑑於此，法國的 HPM 成員由 Evelyne Barbin 領導，在 1980 年代初期組成「數學認識論與數學史」跨校 IREM 委員會（The “Epistemology and History of Mathematics” inter-IREM Commission），結合中學教師、師資培育教授、數學教授、哲學教授、歷史教授、物理教授以及科學史家，共同來探討 HPM 的相關議題。其中 IREM 是指法國教育部設於 25 所大學的數學教育機構（英譯為 Institutes of Research into Mathematics Education），其目標近似我們的教師研習中心，但功能看起來則更為積極，尤其值得注意的，是它們經常將數學教師在職進修或講習「暴

露」在國際性、跨學門的研討會活動之中。

在此，我們打算與讀者分享的法國經驗，就是由 Evelyne Barbin 所主編的 History of Mathematics / Histories of Problems (Paris: ellipses, 1997)。本書（總共 429 頁）收集了十五篇論文，作者大約有 30 位，都是各地 IREM 的工作伙伴。此一研究計畫最早由里昂 IREM 的 Gilles Bonnefoy 所提議，目的當然是將數學問題融入數學教學之中。不過，其策略則是將「偉大的問題」（great problems）視為數學知識成長的中心主題（themes）。於是，在本書十五篇論文中，作者（們）都努力出入文本，鋪陳各種相關數學問題的誕生與發展，以及這些究竟又如何引導了提供解答的數學工具之創造與轉化。誠如 Barbin 指出，這十五篇論文正好是十五個「偉大的問題」的故事，因此，它們所涵蓋的也正好是這十五個問題的歷史。

然則，本書的進路究竟凸顯了何種特色？或許我們可以先考察古代數學問題（或其等價形式）在數學與數學史書籍中所出現的樣貌。一般而言，在數學書籍中安排「穿了時裝」的古代數學問題，無疑是數學家寄物抒情的一種風雅，然而，它所表現卻常常是「去蕪存精」 --「去了脈絡」（de-contextualized）的知識面向。另一方面，在數學史通史類撰述中安排「在脈絡」（in context）的問題，譬如 Carl Boyer 的 A History of Mathematics (1968) 以及 Lucas N.H. Bunt 等人的 The Historical Roots of Elementary Mathematics (1988)等書所列的「習作」（exercises），目的則偏重「純」數學史的考量，至於讀者是否因此引發數學認知的反省，則有賴於數學史的教學互動了。第三種比較「另類」的著述，則是 Hugh Neill 所主編的 The History of Mathematics (1994)，由於此書是為英國中學選修「數學史課程」而寫，所以，課堂練習與課後作業的設計雖然取自相關的數學文本，但是，數學知識結構的連貫性倒是充分地照顧到了。儘管如此，此書專意在「數學史素養」而非數學本身，殆無疑問，除非讀者願意相信「數學史」是「數學」不可分割的一部份。

現在，讓我們回到 Barbin 所編輯的這本書上。在本書中，每一篇論文的論述主軸都是取自數學文本的問題。譬如第一篇”En Route for Infinity”由 Michel Guillemot 與 Denis Daumas 共同執筆，就包括了 23 個習作，題題相扣，前後一貫，從古埃及的記數符號出發，經戴德金與康托爾的對話，終於連續統假設。其中內容涉及數學、無限哲學（譬如畢氏學派、亞里斯多德與波爾札諾（Bolzano）的論述）以及數學史，可貴的是，每一個成分都融成一體，充分再現數學知識的「在脈絡」風格。這樣的題材對一般的中學生而言，負擔當然沈重。不過，Barbin 也特別指出，本書的訴求對象是現任或未來的數學教師（尤其是學程的最後一年），如此說來，數學教師需要何等的數學史素養，就不言可喻了。總之，本書不僅值得採用，而且對我們自己亟待建立的 HPM 傳統，也有很大的啟發！

參考文獻

洪萬生 (1994) :「數學史上三個公式積圓面」,【科學月刊】二十五卷七期，頁 539-544。
洪萬生（未刊搞）:「數學家書寫歷史：兼評 John Stillwell 的【數學與它的歷史】」。

《科學怪人》讀後心得

洪秀敏老師
北縣錦和中學

一八一八年英國十八歲少女瑪麗‧雪萊（Mary Shelly）出版的《科學怪人》是一本在西方文學中擁有深遠影響的經典小說；內容描述一段浪漫愛情的科幻故事。小說中敘述男主角維多‧范肯斯坦從孩童時期直到成人，始終享受著父母以及往後未婚妻伊莉莎白出現後種種近乎完美的家庭生活。一直到他進入英格斯塔（Ingostadt）大學，受到兩位自然科學和化學教授的啟蒙，從迷戀古老自然哲學的侷限中走出來，轉而鑽研解剖學、生理學等近代科學之後，這情形才開始有巨大的轉變。

隨著小說中劇情的發展，我們很清楚地知道，進入英格斯塔（Ingostadt）大學就讀的范肯斯坦，內心的野心不但逐漸成形--想探找出隱藏在大自然底下不為人知的奧妙、法則--，最後，甚至還企圖、妄想以「單一」男性科學的途徑來製造生命。不過，當劇中主角范肯斯坦，把從墓園挖出來的屍體以流電法賦予生命時，他萬萬沒想到，他所改造出的生命個體外貌不但稱不上「完美」，甚至還是「不堪入目」！

故事的高潮，開始於主角范肯斯坦與怪人所展開的一場追殺緝捕。最後，范肯斯坦耗盡體力而終，怪人也自我消滅。整篇故事內容豐富新穎，當然值得推薦。但更重要的是，這本小說與十九世紀自然科學的發展史有著直接的關係。請容許我們將小說中的情節和描述，放在作者生平前後十八世紀末、十九世紀初期間英國自然科學發展史的場景中，詳細地分析書中所呈現與科學、性別有關的內容，並適時地和「科學」這門學問的確實發展過程，作一深入的比較。

我們發現：在當時醫學發展的過程中，關於性別與大自然關係的詮釋上正處於一個極為不穩定的情況。不過，一旦十八世紀的自然哲學（natural philosophy）制度化後，「科學事業」與「家庭」或「女性」不僅出現了互有抵觸的情況，甚至到最後是互不相容。「女性」成了科學事業的第三者（the other）。哲人盧梭（Rousseau）甚至指稱，「聰慧女子的心靈將帶給她的丈夫、子女、朋友、僕人及全世界無限的災害。」

西方科學在這個時期經歷了「巨大」的轉變，在這之後自然科學逐漸遠離家庭、社會，轉入另一個以「駕馭」、「宰制」為訴求的「陽剛化」科學事業。以「她」稱呼自然，不是單純地認為自然是女性、陰性的，以「她」稱呼自然，更大的用意是將之視為等待人類去征服、勞役的新娘。

由此可知，瑪麗雪萊的小說絕非純粹只是怪力亂神或妖魔邪法的科幻小說而已，它其實是詳細地詮釋了十九世紀初西方科學要操控自然、主宰自然的行為與欲望。小說中透過男主角范肯斯坦和他的創作物，巧妙地處理了人類與「科學責任」的問題；同時更為十八世紀末一次重大的文化轉移作了最好的詮釋。

不過，對於女性主義者而言，不僅小說中所呈現的科學內涵值得注意，更重要的是，這小說提供了女性主義者另一個具前瞻性的觀點；亦即將自然科學這門新興的知識放在十八世紀末最不穩定的兩性間的關係上，作大幅度地檢視，如此或可以清楚地窺見近代科學排斥「女性」的種種歷史鏡頭，進

而重新檢視這排斥的正當性、合理性。

如以女性主義的角度重新審視《科學怪人》。本書的主角范肯斯坦自大學時期便逐漸遠離家庭生活、女性與大自然，逐步摒棄傾向神秘主義與法術、煉金術聯結的古舊自然哲學，傾向暴力式的陽剛科學。「剛硬性」的自然科學塑造了范肯斯坦的孤獨、內向，甚至與大自然間出現「敵對」、「衝突」的關係。但諷刺的是，一旦范肯斯坦放棄了現代化、陽剛化的自然科學，漫步在家鄉的小徑、濡沐在大自然秀麗的風光中時，他如霜雪的心才得以融化，蒙蔽了的心胸也得以重新開啟。

為什麼在科技高度發展中，人類社會會日漸步入「非人化」、「野蠻化」狀況？為什麼這個標示「進步」、「理性」等理念為發展導引的現代西方文明，會在越更前進的狀態下，越更暴露出種種抑制壓迫的現象？

在本小說中，透過巧妙的安排，瑪麗•雪萊很清楚地讓讀者意識到，近代科學這種「敵對」、「衝突」、「非人化」狀況的弊病與盲點，但同時她也透過主角未婚妻伊莉莎白，揭示了另一種革命的可能 --「女性科學」。她提醒我們和大自然站在同一邊：不以主導式的問題去催逼自然，而是耐心地浸淫在大自然複雜、紛擾的世界之中，感同身受地去理解大自然，去發現讚嘆和取之不盡的喜悅，一如伊莉莎白，也許是一條康莊大道。

值得一提的是，作者在小說中，還曾犀利地鋪陳怪人自憶起自我存在，到渴盼憐憫但卻處處遭人唾棄終至完全崩潰期間，所表現出來的純真、善良與溫順。質言之，小說中的同情對象主要是針對那怪物。在一個比較具體的層次上來看，怪人所犯的唯一錯誤就是，有著一具不堪入目的軀殼。怪人的體膚、外貌一開始就決定了他將遭受歧視和遺棄的厄運；反過來說，身為女性的伊莉莎白，也正由於她的性別，而無法憑藉著智慧取信於近代科學。

在這樣的一種思考脈絡底下，我們竟然可以發覺到小說中的伊莉莎白與怪人有著共同的遭遇。也依稀可以覺察到，對於現代科學而言，不論是「自然」或「人工」製造的生命，與行主導、操控之實的男性科學家相較，「她」與「它」都是他者（the other）、犧牲者。科學成了白種男人的專屬事業。任何與科學有關的事業都是（白）男人的天下。對於近代科學的「排他性」，作者在這裡算是提出了她本人最強烈的一種抗議！

在九零年代的今天，研究女性怎樣面對自然科學，女性與自然關係以及女性科學是如何的一個文化事業等等，在質與量的表現上都可以說是盛極一時。但筆者認為從各個角度審視在十九世紀初西方科學史中所經歷的巨大轉變，披露這轉變為性別、男女與大自然間關係所帶來的深遠影響，並進一步發掘西方科學發展的心理基礎，亦是當務之急。因為西方現代科學的前身，十八世紀的自然哲學（natural philosophy）指向的是一個「陰陽互相配合」的世界觀，而其中的自然哲學、古老的自然法術都有別於比較剛陽的現代科學。

參考資料：
Mary, Shelley(1996):《科學怪人》（Frankenstein），鄭惠丹 譯，台南：漢風出版社。
王建元(1998):〈《科學怪人》一百八十年〉，台北：《當代》132：62-81
Schiebinger, Londa(1991): The Mind Has NO Sex? : Women in the origins of Modern Science. Cambridge :

Harvard University Press.

Long-Time-Ago

Ponpon

話說早在柏拉圖時代（Plato 427~347 B.C.古希臘）就已將正多面體研究得透、透、透，當時對於「平面上有無限多個正多邊形，到了立體空間卻只剩下五個正多面體」這個意外，雖不願相信，卻不得不接受，最後只好搬出「天意」來說服自己承認這個事實。為什麼會從無限多個跳到五個？而且不多不少就是五個？原來，天上的行星也剛剛好只有五個（註 1），因此，這五個正多面體就分別代表那五顆行星，而他們的關係便是行星間運行的規則。沒錯，「五個」一定是上帝的旨意！

傳到阿基米得時（Archimedes 287~212 B.C.古希臘），對於三度空間的認識總覺得像是隔靴搔癢，「天意」雖不可違，但總可以變吧！乃將條件鬆綁（註 2），又變化出十三個規則的半正多面體，這下可真夠數學家們研究好一陣子了。奇怪的是，對於繁雜的面積、體積、對角線…這等有深度的「算算看」的數學，大家爭相研究、計算，反而最簡單的、幼稚園才會的「數數看」的數學，等了近兩千年，瑞士數學家尤拉（Euler 1707~1783）才發現多面體較基本的點、線、面的數量關係：V － E＋F＝2 。千百年來，這條漏網「鯨」魚擋在前頭竟無人聞問，奇哉！怪哉！（註 3）

Long-Time-Later

今年給一升二一份暑假作業：多面體製作。發給學生立體的展開圖與平面透視圖，但不指定製作方式與材質，只要求開學後每組（三人）能看到 18 個立體。終於，蟬鳴聲已噤，只看到多數學生苦笑（做了失敗、做好壓壞），有的傻笑（根本還沒動工），只有少數沒「ㄎㄧ ㄒㄧㄠˋ」。交來的心得也多是「E Q 管理」的最佳典範，然而其中一位「土尤拉」的發現則是雖不中，亦不遠矣！

心得與發現

景興國中 11 班 8 號 彭于晏

這個暑假數學老師出的作業，可說是把我們給弄瘋了啦

花了好大的功夫才給他做好，而且還有些「ㄌㄧˇ ㄌㄧ˙ ㄌㄚˋ ㄌㄚ˙」，不過發現了不少！！

以下是土學生，土土的發現：（一）我們發現到多面體都是由偶數個面組成。（只要數一數就很容易發現的啦！）（二）舉例子說明：正方體有 6 個面、12 個邊、8 個角，其他多面體也算出有幾個面、邊、角，統整發現，其中有一個規律，那就是有 2N 個面、4N 個角、6N 個邊。（三）將邊數 ×面數 ＝12 的倍數，例如展開圖 K（註 4），四邊形x6 個＝ 24；六邊形x8 個 ＝ 48，24＋48 ＝「72」 12 的倍數，其他如此類推。沒錯，就是這些怪怪的發現（應說是頭腦簡單的白痴答案吧！）。

這次作業可要感謝其他 2 位共同努力的同學，才能完成，老師出的作業雖然煩人，但也讓我們體悟到「知易行難」的道理！！

分析學生的發現，雖有錯誤（註 5），但方向卻與尤拉不謀而合。學生已知用 N 來作一般性公式的假設，若能仔細思量 N 所扮演的角色，同時搭配更多的數據來驗證或修正自己的發現，相信歷史會重演（當然，「信心」是很重要的：只要數一數就會的發現，哪裡知道竟是個大定理呢！）。從數學史的觀點來看而這樣的「歷史再現」，相信是珍貴而不是浪費。

前人讚嘆：長江後浪推前浪，學生笑接下聯：前浪死在沙灘上；最近又「改良」為：通通死在沙灘上。時代在變、思想在變，人、時、地、事、物都在變，不變的是Σ家常便飯的香與甜！

【註 1】當時觀察記載的五顆行星為：水星、金星、（地球）、火星、木星、土星（其他都是恆星）。人類對於天文的觀察與認識，一直要到伽利略發明望遠鏡，才真正大開眼界。刻卜勒曾試圖去觀察、計算各行星的軌道半徑，期與五個正多面體的外接球、中切球或內切球半徑對應，可惜並未成功。

多面體 半徑	四	八	六	十二	二十
外接球	0.612	0.707	0.866	0.951	1.401
中切球	0.354	0.500	0.707	0.809	1.309
內切球	0.204	0.428	0.500	0.756	1.114
軌道	0.387	0.723	1.523	5.203	9.555
半徑 行星	水星	金星	火星	木星	土星

各立體球半徑以其多面體邊長為 1；各星球軌道半徑以地球為 1。若將小行星群與「行星級數」列入考量，結果如下：

行星 半徑	水星	金星	地球	火星	小行星
軌道	4	7	10	16	28

虔誠的信徒們不妨嘗試將「多面體邊長為 1」改為「多邊形之外接圓半徑或內切圓半徑為 1」，或許會出現另一片天空。

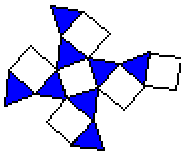
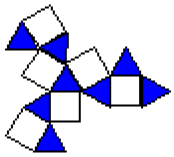
【註 2】高中數學統合上冊：多面體與尤拉公式
（一）由數個全等的正多邊形組成。
（二）由數種同邊長的正多邊形組成。
（三）每個頂點連接的稜數都相同。
（四）每個立體角皆相等。

滿足條件（一）、（三）、（四）的凸多面體，稱為正多面體，有正四面體、正六面體、正八面體、正十二面體、正二十面體等五種，也通稱為柏拉圖立體；滿足條件（二）、（三）、（四）的凸多面體，稱為

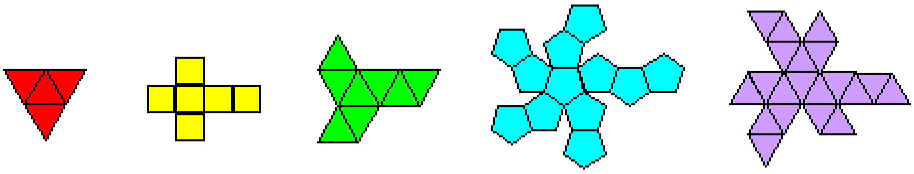
半正多面體（semi-regular），有十三種，也通稱為阿基米德立體。後世又將條件（一）放寬為：由數個等邊的多邊形組成，再創造出三種菱形多面體（六、十二、三十），其中菱形六面體有無限多個。

【註 3】稍早，法國的笛卡兒（Descartes 1596~1661）曾發現多面體另一簡單關係式：$S = 360$ 度 $\times V - 720$ 度（S 表示多面體上各多邊形的內角總和）若套用尤拉公式與徑度量 Π，上式可變化為：$S = 2\Pi(V-2) = 2\Pi(E-F)$。

【註 4】展開圖 K ：


或


正多面體展開圖：



【註 5】(二）應假設為：2a 個面、4b 個角、6c 個邊。進而列表發現：$a = b + 1$；$b = c$，再現尤拉公式。(三）應修正為：多邊形 A 的邊數 ×A 在立體上的面數＝12 的倍數。

數學小品之二─機率與統計之奇妙現象

謝佳叡

台灣師大數學系助教

保險業統計員對著狄·摩根大喊：「這一定是個騙局，在一定時間內還存活的人數和圓能有什麼關係？」

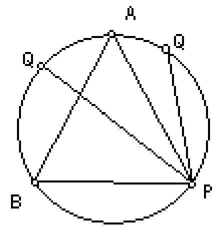
在數學各個領域中，由機率得出的結果常有與直覺相衝突之處，亦即用機率算出的正確答案常常相反於常識。例如一個家庭有四個小孩，你會預期最可能的情形是兩男兩女，但這個預期並不正確。又如在一群人中想要找到兩個生日相同者，你也會預期這一群人數要很大量，才會有較高的機率（想像會散在 365 天之中），但實際只要有 23 人機率就會大於二分之一，而且會急遽增加，在三十人中兩人同天出生機率已達七成，如果班上超過了 35 人，你就可以放心的玩打賭遊戲了。

另一個相關學門「統計學」在現今複雜多樣的社會，其地位日趨重要，從各式的普查、到各種資料如地震、股市、交通事故的統計，到處可見統計之用，但相對的，誤導之事也經常發生。常言：數字會說話！但如果聽者不去明辨即亂下因果結論，則產生荒謬可笑之事是可預期的。常見報導如「靠左邊走較不發生事故」、「空運比陸運安全」、「暢銷書都是好書」等，都是值得深思的問題。相關例子可參閱 Martin Gardner 所著「Aha! Gotcha」(中文譯本由天下文化出版，書名「跳出思路的陷阱」)，該書有更豐富的說明。而相同的情形也發生在機率資料的報導上，像筆者就一直無法理解新聞報導中「下雨機率為 40%和 60%」有什麼實際的差別及意義。

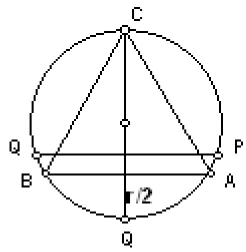
許多乍聽之下很合理的事情，有時卻不可能發生，而確實正確的理論又有一副讓人難以置信的外表。當尤拉（L. Euler, 1707-1783）發現$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{K^2}+\cdots$，即使尤拉本人都感到驚訝。

有一回，狄・摩根（De Morgan, A. 1806-1871）給一位保險計算員講解「一定比例的人在一定時間內仍存活的或然率」，他引用了一個保險計算公式，公式中有一個π，並指出這個π就是圓周與直徑的比。（π、e 是機率論中重要的兩個常數，如常態分配的機率密度函數 p.d.f 就有π出現。）這個保險統計員本來是濃厚的興趣來聽他解說，聽到這裡卻立刻打斷他，並強烈地說：「親愛的朋友，這一定是個騙局，在一定時間內還存活的人數和圓能有什麼關係？」（De Morgan’s Budget of Paradoxes (London , 1872), p172）

機率論理有個「隨機弦（Random chord）」問題。考慮一圓的隨機弦長度會超過此圓內接正三角形邊長的機率是多少？這個問題有趣之處，在於如果我們以不同的方向思考隨機弦，將得到不同的答案。例如將隨機弦視為圓上的任意弦，亦即將此弦考慮成圓上隨機兩點 P、Q 連接而成的弦。接著以 P 為頂點作一等邊三角形 ABP，則當 Q 落於 AB 弧之間時，弦 PQ 會大於等邊三角形 ABP 邊長。顯而易見地，Q 落於 AB 弧間的機率為$\frac{1}{3}$。（如圖一）



但如果我們將隨機弦用「弦的位置」與「和圓心的距離」來定，此距離可為 0 到半徑 r 的任一隨機值，則當此距離小餘$\frac{r}{2}$時，弦的長度將大於內接等邊三角形邊長（如圖二），因為內接等邊三角形任一邊到圓心距離為$\frac{r}{2}$。故機率為$P\left\{d<\frac{r}{2}\right\}=\left(\frac{r}{2}\right)\div r=\frac{1}{2}$。



需注意的是，在執行隨機實驗時所求的解$\frac{1}{2}$和$\frac{1}{3}$都是正確答案。你或許會感到奇怪，在這麼明確的學門內竟出現這種不定的答案！這原因就在定義的不明確。這說明了什麼奇妙的結果呢？舉個實際的例子，丟一個圓盤到一條直線上，考慮圓盤與線有相交出一弦的情況下，則此弦到圓心所可能的距離機會相等，因此，弦長大於內接等邊三角形邊長的機率為$\frac{1}{2}$；反之，丟一條線（如一針，想像針的兩邊有無限延伸）到一圓上，同樣地在交出一弦的情況下，所求的機率（弦長大於內接等邊三角形邊長）則變為$\frac{1}{3}$。

參考資料：

Moritz, R. E. (1914): On Mathematics – A collection of Witty, Profound, Amusing Passages about Mathematics and Mathematician, New York.

Ross, S. (1988): A First Course in Probability, third edition , New York.

Martin Gardner(1993):（薛美珍譯）《跳出思路的陷阱》，天下文化。

反證法教學感想

黃哲男老師
建國中學

民國八十四年教育部公布了高級中學課程標準，其特色之一是過去一直遲至高二下學期才出現的邏輯與集合，被「拔擢」至高一第一冊第一章。此舉就教學而言有其方便性，因為大多數的老師講解高一教材時，總會騰出一些時間補充介紹邏輯與集合的概念。然而，由於每個老師所介紹的深度與廣度不同，加上課本沒有這部分的內容而且考試可能會考以及補習競爭文化的結果，往往造成高中新鮮人不少的困擾。

如今，妾身未明的邏輯如今終於被重新定位，不論是教師教學或學生學習都更有方向可循，目標也更為明確，照理說教師教授將更順手，學生學習將感到更容易才是。可是根據筆者的觀察，情況似乎不是如此，許多學生（事實上是「很多學生」）搞不清楚「命題」、「敘述」、「充分條件」、「必要條件」、「真值表」等等衍生的問題。另外，還有一些證題法，尤其是「反證法」最容易造成學生學習困擾。

關於「反證法」，英國數學家 Hardy 譬喻得好：「棋手犧牲的就是一兵一卒，頂多是一支主棋，但數學家犧牲的卻是整盤棋局。」關鍵問題之一就在於整盤棋局都放棄了，如何才能找到對手的致命傷並給予致命一擊呢？對一個受過專業數學訓練的人來講，這有時也是件難事，畢竟茫茫棋海中，目標難以尋得，更何況其中還隱藏另一個重大的問題，而這問題得追溯至亞里斯多德。

為了確保數學推論正確，古希臘人曾做了不少努力，但直到亞里斯多德加以系統歸類與整理之後，邏輯科學的基礎才算完成，從此「形式邏輯」也因而建立。亞里斯多德認為不是每件事都可以證明的，否則證明將會如同一條無止境的鐵鍊一直延伸下去，因此亞里斯多德便開始尋找邏輯的根基：亦即無需證明的明顯真理。而這就是邏輯公理：矛盾律（Law of Contradiction）以及排中律（Law of Excluded Middle）；其中矛盾律的意思是一個命題不能同時又真又假，而排中律指的是命題必為真或假，後來兩者成為了數學「間接證法」的憑藉！

所謂「間接證法」乃是相對於「直接證法」而言，一般說來「直接證法」指的是在假設的基礎上，根據公理或已證過的定理，藉由合理的邏輯推導出結論的方法。「間接證法」大致可分為三種：反證法（歸謬證法）、轉換法、同一法；一般接將反證法與歸謬證法視為同一種方法，不過龍騰版教師手冊卻將之分開討論，摘錄如下：

> 所謂“歸謬證法”，英文稱為“proof by contradiction”，顧名思義，就是利用“矛盾”來達到證明目的的方法。也就是說，先假定求證的結論為假，然後逐步推演，而獲致與原假設或其他事實相抵觸的結論，從而論斷求證的結論不可能為假，也就間接證明了其必須成立。……至於“反證法”，英文稱為“proof in contrapositive form”，也就是以證明“對偶命題”來達到證明目的的方法。一個形如“若 P 為真，則 Q 亦為真”的命題，其對偶命題為“若 Q 為假，則 P 亦為假”。 假若我們能夠證明“若 Q 不成立，則 P 亦不成立”的話，則 Q 就必須成立，否則將導致 P 不成立的矛盾。因此，要證“若 P 則 Q”，不妨改證“若 Q′則 P′”。

細分之下的確有不同，就數學邏輯的嚴謹性而言，確有必要將之分辨清楚，不過依筆者看法，在實際教學過程中並不需要拘泥於兩者的不同。

另一個關鍵的問題就在於「為什麼只有矛盾律與排中律是對的？」曾經不只一位學生問過筆者類似的問題：假設結論不成立，然後推得和前提矛盾，原命題就一定會成立嗎？筆者當下真是百感交集，不知道該如何回答，畢竟就是這種挑戰亞里斯多德的二值邏輯才導致模糊邏輯（Fuzzy Logic）的出現啊！

日常生活中，「好人」與「壞人」、「對」與「錯」都不是絕對的，亞里斯多德也承認這一點，他在《形上學》這本著作裡提到：「事物的本質仍存在著多於或少於的特性。」因此，筆者相信學生對於「反證法」的懷疑，除了數學上的問題之外，應該還存有更深層的心理結構問題。關於此點筆者無法提出證據，但從歷史上來看，除了古希臘之外，其他的文明並沒有提出反證法的概念，因此這兩者之間應有些關連吧！

在實際教學中，基於課程的完整性以及提供部分同學一項有力的工具，筆者認為還是需要介紹反證法。但不可將之視為課程目標的全部，命題時更不可以刁鑽的題目來評量學生「反證法」的概念，僅需介紹幾個例題（如：質數無限多個、(sqrt2)為無理數等等經典「古」題）即可。其實，教師也可以嘗試藉由「反證法」這個證題法與一些例題，介紹古希臘人發展「反證法」的文化背景，並藉著比較幾個文明（如：中國）的數學發展，來說明「反證法」對後世數學文化的可能影響。

新書櫥窗

◎【數學立體模型製作】 蔡志強、孫文先 編
台北：九章出版社
ISBN 957-603-180-X
劃撥帳號：1053467-6 九章出版社
email: ccmp@tptsl.seed.net.tw

本書內容包括「柏拉圖正多面體」、「阿基米德正多面體」、柱體、錐體、星狀體等數學立體模型之剪裁、黏貼及裝飾。

◎【從李約瑟出發：數學史、科學史文集】 洪萬生 著
台北：九章出版社 1999 年九月一版二刷
總共 183 頁 定價新台幣 150 元 ISBN 957-603-189-3
劃撥帳號：1053467-6 九章出版社
email: ccmp@tptsl.seed.net.tw

本書針對中國數學史的研究方向，以及中國科學史的「李約瑟論題」（Needham' s thesis）等相關問題，試圖提出一些「另類」的看法。所收文章都寫作於八十年代前五年，但自信仍有參考價值！尤其是多篇與數學教育有關的文章，更是值得閱讀。

◎【數學珍寶：歷史文獻精選】 李文林 主編
北京：科學出版社 1998 年十月一版一刷
總共 xiv+864 定價人民幣 48.00 元 ISBN 7-03-006393-7

本書所包括的文本，除了中國數學史的相關部份之外，其餘都根據下列參考文獻選譯：(1) Birkholl, G. ed., A Source Book in Classical analysis. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1973. (2) Calinger, R. ed., Classics of Mathematics. Oak Park, Illinois: Moore Publishing Company Inc., 1982. (3) Fauvel, John and Jeremy Gray eds., The History of Mathematics: A Reader. London: Open University, 1987. (4) Midonick, H. ed., The Treasury of Mathematics. New York: Penguim Books, 1965. (5) Smith, D. E. ed., A Source Book in Mathematics. New York: McGraw-Hill, 1959. (6) Sruik, Dirk J. ed., A Source Book in Mathematics: 1200-1800. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1969. 對於有意直接「貼近」文本，與古代數學家對話的讀者而言，本書的出現，的確是一大福音。