HPM通訊

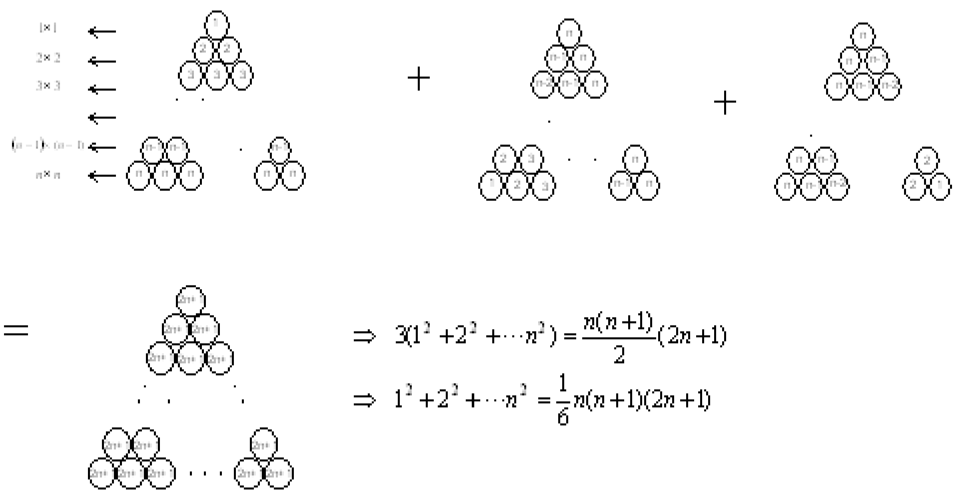
第二卷 第十二期 目錄(1999 年 12 月)

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）
助理編輯：李建勳、黃俊瑋（台灣師大數學所研究生）
編輯小組：蘇意雯（台北市立教育大學）蘇俊鴻（北一女中）
黃清揚（福和國中）葉吉海（新竹高中）
陳彥宏（成功高中）陳啟文（中山女高）
王文珮（青溪國中）黃哲男（台南女中）
英家銘（台師大數學系）謝佳叡（台師大數學系）
創刊日：1998 年 10 月 5 日　　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng

圖說一體、不證自明

洪萬生教授
台師大學數學系

本刊曾多次刊出「看圖說話」，贏得不少的注意與好評。今年十月二十三日，我應邀到台北市西松高中演講（由西松高中教師會舉辦）時，順便介紹了幾張「看圖說話」，沒想到與會的台北市、縣數學教師，竟然立即發現了它們的「力」與「美」，真是令人高興。最近黃哲男老師在北市建中教學實習，曾利用圖形來講解平方項的求和公式（參見圖一），學生的反應是：「從小到大第一次感受到數學的美與神奇。」



$$\Rightarrow 3(1^2+2^2+\cdots n^2)=\frac{n(n+1)}{2}(2n+1)$$

$$\Rightarrow 1^2+2^2+\cdots n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

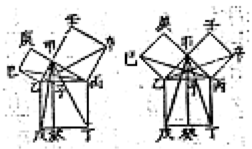
那些圖形大部分都從「美國數學協會」 (The Mathematical Association of America，簡稱 MAA) 所出版的 Mathematics Magazine 所摘錄出來的。MAA 與 AMS、NCTM 並列為美國三大數學社團，它們關心數學教育的方式，則側重面大有不同。譬如說吧，AMS 即「美國數學學會」 (American Mathematical Society) 的簡稱，它的組成份子都是專業數學家，因此，學會出版品中的 American Mathematical Monthly 與 Notices of the American Mathematical Society，雖然不乏教育方面的論述，但是，前者偏向大學層次的解題活動，後者則提供論壇，讓數學家抒發他們對數學教育的熱情關懷與高

韜理想。另一方面，NCTM 則處在另一個極端，它是「全國數學教師協會」(National Council of Teachers of Mathematics) 的簡稱，出版品中有針對中小學數學教師為訴求對象的 The Mathematics Teacher 與 The Arithmetic Teacher，內容主要涉及具體的教學策略與方法，可見 NCTM 是數學教育專家 (mathematics educator) 與中小學數學教師的自主團體。

至於 MAA 則在體制上比較符合中庸之道。譬如，它的組成份子就容納了專業數學家、大學與中、小學數學教師等各個層面，尤其難得的是，像 George Polya 這樣的偉大數學家，就曾經是 MAA 的忠誠會員。再者，MAA 的刊物 Mathematics Magazine 雖然內容稍偏大學數學層次，但是，教育與人文關懷相當濃厚，所以，它比起 American Mathematical Monthly 來，顯得「世俗」(secular) 一些，然而，就觸及數學知識活動來說，它相較於 The Mathematics Teacher 與 The Arithmetic Teacher，則無疑「深刻」(deep) 多了。

正因為如此，所以，Mathematics Magazine 於 1975 年提出此一「看圖說話」專欄構想，原先只是用以「補白」(use as end-of-article fillers)，沒想到後來主編 J. Arthur Seebach 與 Lynn Arthur Steen 竟然進一步強調：利用一個令人歡喜的圖示，來提出一個重要的數學觀點，這比起原先目的，恐怕再也不能更好的吧？顯然由於此一專欄的大受歡迎，因此，MAA 的另一份刊物 The College Mathematics Journal 在八十年代的稿約中，就不斷地聲明：本刊除了歡迎側重解釋性的論文之外，「也邀請其他類型的撰稿，尤其是不用文字的證明 (Proofs without words) (Proofs without words)，數學詩篇，遺聞軼事引述，......」

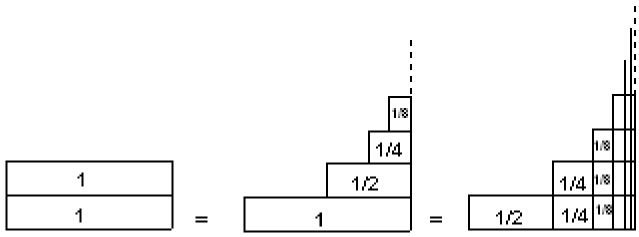
不過，誠如 Proofs Without Words: Exercises in Visual Thinking (MAA 出版，1993) 的編者 Roger B. Nelsen 所指出，這種「看圖說話」卻早已不乏先例。事實上，Martin Gardner 就曾在 1973 年十月號的【科學的美國人】(Scientific American) 討論這種「不用文字的證明」。他將這種圖形視為「一瞥就懂」的圖形 ("look-see" diagrams)，這是因為在很多時候一個蠢笨的證明，若能輔以一個幾何的類比圖形 (geometric analogue)，則後者的簡潔與美妙，讓讀者幾乎可以一瞥即對定理的真實性瞭然於胸 (the truth of a theorem is almost seen at a glance)。

此外，Nelsen 還特別指出：在數學史上，這種圖形也常常出現。誠然，中國趙爽、劉徽（三世紀）與印度巴斯卡拉（十一世紀）對畢氏定理所提供的「弦圖證明」（圖二），就是十分著名的例子。可見，它們也曾經在數學史上扮演相當有意義的角色。針對此一例子，古典希臘的歐幾里得所提供的證法之附圖（圖三）

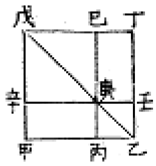
，大概就少了一目瞭然的特性。究其原因，圖形只被他們認為具有輔助思考的功能而已。對歐幾里得影響深遠的柏拉圖，在他的【理想國】(The Republic)

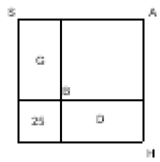
中甚至強調吾人在心靈 (mind) 思考數學客體（即形式 (forms) 或理念 (ideas)）時，千萬不可被圖形所迷惑或左右。在這種情況下，圖形作為認識或核證數學知識的一種憑藉，希臘數學家對它的「正當性」一定相當保留，於是，他們對文字論述的方式，當然更加全力以赴了。

在數學史上，數學家言說或論述方式總是受限於符號的使用 -- 當然，這也常常關聯到他（她）們對於某些關鍵概念的透明清晰度之掌握，因此，利用圖形的「自我解說」(self-explanation) 能力，往往是他（她）們呈現數學知識的一個重要策略。譬如說吧，十四世紀巴黎學派的 Oresme 就使用了下列圖四，發現 / 證明了下列級數和:



至於他所根據的理由則是：「一個有限面積的平面區域，可以照我們所喜歡的程度去拉長或變高它的延展性，而不改變它的尺寸大小。」可見，無窮級數如何求和對他來說，數學符號與術語大概都不足以「講明白，說清楚」，因此，想辦法去建構一個圖示，或許是最具說服力了。

所以，偶而在課堂上利用這種圖形，應該可以帶來意想不到的學習結果，至少我們可以利用這種難得的機會，拉近學生與古代數學文本的距離。尤其，當代數符號演算對初學者極為抽象時，幾何圖示 (geometric demonstration / illustration) 往往可以發揮相當大的澄清或說服功能，譬如【幾何原本】中的平方和公式之圖示（圖五）

，以及阿爾花拉子摩 (Al-Khwarizmi) 利用配方法 (completing the square) 來圖示二次方程 （圖六）

，都是非常值得參考借鏡的文本，值得我們珍視與利用。

附註：阿爾花拉子摩的原題敘述成「平方加上 10 根等於 39，問平方是多少？」，至於解法則寫成：「取根的係數 10 的一半，即 5，自乘得 25，加上 39 等於 64，其平方根是 8，在減去根的係數 10 之半，餘 3。這就是根，它的平方根是 9。」

參考文獻

李文林主編 (1998) 【數學珍寶】，北京科學出版社。
洪萬生 (1999) 【孔子與數學】，台北明文書局。
Neil, Hugh (1994): The History of Mathematics. Essex: Longman Group Limited.
Stillwell, John (1989): Mathematics and Its History. Springer-Verlag.

幾何作圖---「規矩」vs.「規」「矩」

謝佳叡

台灣師大數學系助教

生活上，如果有人告訴你某件事是不可能的，
意味著這件事很難完成，或是其結果很難被接受。
數學上，如果有人告訴你某件事是不可能的，
意味著可以不用再浪費時間了，除非你另有目的。

一個古老的遊戲，如果可以抗拒時間的考驗而歷久不衰，一定有它獨特的吸引力，而無論從何角度來看，「幾何作圖」都稱的上是其中的佼佼者。這個遊戲不但歷經了兩千多年的時光，也橫越了區域的限制到達世界各個角落，參與者從頂尖的數學家到一般的中學生，探討的面向也由學術論文到學校的教科書。不少數學創作的靈感來自這個遊戲，更有企圖解決這個遊戲規則所產生的「bug」，而無意中闖入另一個新的領域，最深刻的例子，就是孟納赫莫斯（Menaechmus）為了解決倍立方體問題而發現圓錐曲線。最難能可貴的是，這個遊戲規則一直沒有被更動過，儘管其間不少人做了些「品種改良」，但這些改良並沒能將原始的規則取而代之。

提起作圖，便不能忽略古代中國的製圖技術，而規、矩的使用更早早出現在文獻記載上。《孟子》離婁章句中有云：「離婁之明，公輸子之巧，不以規、矩，不能成方、圓。」《墨子》裡也有：「輪匠執其規、矩，以度天下之方、圓。」《淮南子》中有：「非規矩，不能定方圓；非準繩，不能定平直。」尸佼《尸子》卷下亦有云：「古者倕（古代相傳巧人名）為規、矩、準、繩，使天下倣焉。」甚至山東漢武梁祠石室留有「伏羲氏手執矩，女媧氏手執規」的造像，在在顯示中國早有以規、矩製圖的事實，而且是最主要、基本的工具，甚至「規矩」一詞已被當為標準、典範之意。

然而，就此認定中國古代即具備「幾何作圖」的概念，倒又言之過甚。綜觀這些古代文獻，不難發現這些規、矩的使用乃基於實用價值，這與古希臘柏拉圖所創「尺規」的使用規則與意義並不相符。「矩」俗稱曲尺，是兩條不一樣長的尺互相垂直併合而成，能直接畫出垂直線；「準」即水平儀，而「繩」就是墨斗。就「幾何作圖」中，「尺」只能用來畫連接兩點的直線，且不能有刻畫的限制來看，「幾何作圖」更像是利用「規」與「繩」的作圖，也就是說，對古希臘人而言，成方、圓不必靠規、矩，「規」「繩」足矣！

古希臘人將邏輯演繹證明引入數學，連帶地影響幾何學的發展。古希臘人也有畫直角的工具，但他們卻寧可用更單純、更原始、幾近理想化的工具代替，對數學公理化的精神展露無遺，事實也證明「直尺」並不辜負所託，有別於其他幾個古文明如巴比倫、埃及和中國把幾何當成實際技藝，「尺規

作圖」脫離了實用的價值而進入了邏輯演繹體系。不可否認的，古希臘人的數學深受哲學影響，這從那些遺留下來的關於數學的文獻便可看出端倪。無論巴比倫的泥板有關數學部分的記載、埃及的紙草文獻或是中國的《九章算術》，都採用「問題--解法」的形式，反觀古希臘「極獨特」的公理化方法，倒成了不折不扣的「民族數學」，不過也應了一句古話：有「理」走遍天下。

「幾何作圖」限用直尺、圓規，且規定使用的方法簡直到了吹毛求疵的地步。但若就此認為諸多限制必定妨礙「幾何作圖」的發展，則又輕忽邏輯演繹的威力。柏拉圖規定：

1. **直尺只能用來畫通過已知兩點的直線。**
2. **圓規只能用來畫已知圓心且通過另一點的圓。**（註一）

除了以上兩個規定之外，不能移作他用。有幾點必須提醒的是：

1. **依據柏拉圖的規定，至少要先存在兩點才能使用尺、規。**
2. **不能無限次地使用尺規，且不得合併使用。**
3. **在演繹下，尺、規的使用可以作一些延伸。**

在（一）中，一些現在常用的動作如「以某點為圓心，任意長為半徑畫圓」、「過一點畫一線…」都不被直接允許的，一定要有已知兩點（頗像 GSP 作圖）。而且這些點是不能任意取的（如在圓上任取兩點 A、B），必須經由「合法」程序得到這些點。所謂的「合法」包含：

一、「起點集（starter set）」：包含了給定的「已知點」和「交點」，這裡的「交 點」是指已知的線與線、線與圓、圓與圓交點。
二、「作圖點（constructed point）」：經由作圖程序所得到之新的線與線、線與圓、圓與圓交點。

經由這些點方能使用尺規。

不能無限次與合併使用尺規，這個規定倒容易被接受，本身也有執行上的困難。而（三）中有一些特別的意義，在圓規的使用規定中，圓規是不能離開紙面的，也就是不能用圓規來量長度，這樣的圓規又稱作「歐氏圓規（Euclidian compass）」。這也是為何《幾何原本》第 I 卷第二個命題：「**以一已知點為端點作一線段等於已知線段**」裡，現在看來兩個步驟就可完成的事，歐幾里得要如此大費周章。但只要經由這個命題後，歐氏圓規就與現代使用的圓規無異了，即所謂的延伸。所以對於上一段所提「不被直接允許」的動作，經由演繹後也都保障了可行性。

另一個耐人尋味的地方，在柏拉圖的直尺使用規則中，並未同意直接延長一個線段，但《幾何原本》一開始的第二個設準（postulate，註二）就同意了這件事。細心的歐幾里得當然不會忽視這個問題，在前面的定義 3 中就指出「線的兩端是點(The extremities of a line are points.)」，因此就將設準二合法化了。這除了可以從另一個角度思考為何歐氏會在定義中加入這個的定義 3 外，更為歐氏與柏拉圖彼此交心的說法，提出另一個例證。《幾何原本》對作圖的規定（公設）顯然遵循了柏拉圖的作圖規定，而尺規作圖也因本書的影響，成了幾何學的金科玉律。

事實上，對作圖工具的限制並沒有實際的意義，卻表明了古希臘人對數學的態度。只須稍稍的放寬限制，所謂的「幾何難題」就可被輕易地做出，然而正是這種不能妥協的嚴謹態度，與不可抑止的挑戰激情，才會引出現代數學的光輝燦爛。數學家甚至不滿足尺、規的使用限制，提出了更多嚴厲的限制來做到相同的事。1547 年，義大利人費拉里（Ferrari, Ludovico 1522-1565）證明了：「**限定圓規張開的角度是固定的，也可完成所有的幾何作圖題**」。這樣的圓規有一個特別的名稱--「鏽蝕圓規（rusty compass）」，有人相信這個名稱來自十世紀的阿拉伯數學家 Abul-Wefa（940-998），他留下不少關於這方面的研究。

1672 年，丹麥人莫爾（Mohr, George1640-1697）發表了《丹麥的歐幾里得》一書，書中證明了：**如果已知與求作的幾何要素都是點，則所有的幾何作圖都可以只用一支圓規完成。**大約隔一百年後，義大利人馬歇羅尼（大約隔一百年後，義大利人馬歇羅尼（Mascheroni, Lorenzo 1750-1800）重新且獨立地解決了這個問題，如今我們都稱為「莫爾—馬歇羅尼定理」。現在我們要問：如果只用直尺而不用圓規，是否可以完成所有的作圖呢？很多人會有一個直接的印象，認為大概沒有一個作圖可被完成，因為連最根本的「求中點」都做不到，也無法複製線段。然而，目前已被證出至少可以複製角或平分某些特定角，也可以探討射影幾何的許多性質。

儘管，單用直尺無法完成所有的幾何作圖，但離完成卻只一線之差。1822 年，法國數學家彭色列（Poncelet, Jean-Victor 1788-1867）從馬歇羅尼的結果得到靈感，提示了：**所有的幾何作圖，都可以只用一支直尺與平面上一個已給定的圓完成。**1833 年，德國數學家史坦納（Steiner, Jacob 1796-1863）給出了詳細的證明，這就是著名的「史坦納直尺問題」。這個問題可類推為：**所有的幾何作圖，都可以只用一支直尺與一個已給定的正方形完成。**而這個定理也可推出：如果給的尺是兩邊皆可畫線的「平行尺」，而這個定理也可推出：如果給的尺是兩邊皆可畫線的「平行尺」，**那麼只要這支尺，亦能完成所有的幾何作圖。**

如果用的是每次都**只能畫出固定長的尺**（想像成排列牙籤），則所有的幾何作圖亦能被完成；更令人訝異的是，如果**單用直尺，卻能在直尺上作記號**，則不但所有的幾何作圖能被完成，連尺規無法做到的事也能做到，如三等分角問題、正多邊形作圖問題等。在此也提供一個思考問題：如果只用一支直尺與一個倍角器，能做到什麼呢？（註三）

最後，不能免俗的談談「幾何三大難題」。之前說過，這三大難題來自尺、規使用限制所生的「bug」。這些問題在轉換成代數問題後才被徹底解決，而這已經是兩千年後十九世紀的事了，因為以古希臘當時的數學發展是無法解決的。他們留下未解的問題而不去修改遊戲規則，一則從幾何本身要去證明「一個作圖不能被完成」是困難的，他們也無法確信是否真不能解決，再則修改限制來達到目的並非數學的精神。在「三大難題不能被完成」的嚴密證明被提出後，仍然有人想獨步古今中外，日以繼夜的想解決其中一個問題，甚至不少人也宣稱他們已然解決了其中一個問題，這與前些日子鼓躁一時的「圓週率為有理數的提出」倒有些契合與令人啼笑皆非，或許具備一些基本的數學素養才是我們所應該努力的，你們認為呢？

（註一）：參考 George E.Martin(1998):Geometric constructions,p30.
（註二）：設準二是說：可以持續延長一條直線
[It is possible] to extend a finite straight line continuously in a straight line.

（註三）：由於直尺本身就能達到複製角的功能，所以多了倍角器並無提供更多的幫助。

參考資料

Martin, G. E. (1998): Geometric constructions, New York.
Eves, H.: A Survey of Geometry
Heath, T. L. (1956): The Thirteen Books of The Elements, New York.
梁宗巨（1995）:《數學歷史典故》，台北：九章出版社.

兩個證明的比較

蘇俊鴻
臺灣省立新店高中

“我們不要忘記，所謂證明，不只在不同的文化有不同的含意，就連不同的時代也有不同的含意”
Wilder,《Evolution of Mathematical Concept,1968》

在實際的教學工作中，無疑地，數學證明的教學是一項頗為艱巨的挑戰！如何將證明過程講解清楚、條理分明是一難；如何生動活潑，吸引學生注目眼光，更是難上加難。事實上，證明的過程正代表著思維的運作，不同的證明方法，表示背後所隱藏的思維模式不同。適當地釐清方法與思維模式的關聯，有助於教師對數學證明的理解與體認。在本文中，則是提供數學史上兩個圓面積公式的證明—由阿基米德(Archimedes，287B.C.?~212B.C.)與劉徽(魏晉，約 300A.D.)所提出--分別代表西方數學與中國算學的典型人物。讀者不僅將有一題多証的樂趣，更將有中西文化上差異的發現。

阿基米德對圓的研究記載於《論圓的測量》(On the Measurement of the Circle)的小冊子中，對於圓面積公式，阿基米德的敘述如下：

圓的面積等於以圓半徑及圓周長為兩股的直角三角形面積

劉徽在注解《九章算術》時，提供了圓面積公式的證明，至於圓面積公式，則是記載於《九章算術》(方田)章中的圓田術：

半周半徑相乘得積步

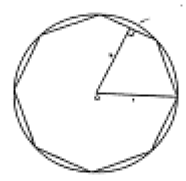
若用今日的數學符號表示，圓半徑$=r$，圓周長$c=2\pi r$，則圓面積$=\frac{1}{2}rc=\frac{1}{2}r\left(2\pi r\right)=\pi r^2$，兩者的圓面積公式是相同且正確的！接著一起來看看兩人是如何證明，簡略說明如下。解說的過程中，因考慮便利性，在不妨害證明的精神的前提下，輔以適當的現代符號。讓我們先由阿基米德的證明說起。

阿基米德的證明

設S、A分別表示圓面積與直角三角形的面積。阿基米德並不是直接證明$S=A$，而是由$S\neq A$開始。根據三一律，如果$S\neq A$，則$S>A$或$S<A$有一種情形將會成立。

(1)若$S>A$
如右圖，阿基米德由圓內接正方形開始，接著正八邊形，如此下去，總能找到一個內接正n邊形，

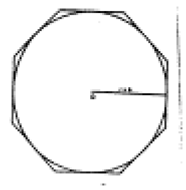
其面積與圓面積的差小於 $S-A$。設其面積為 S_n，即 $S-S_n<S-A \Rightarrow S_n>A$



但 $S_n=\frac{1}{2}\times r\times$ 內接正 n 邊形的周長 $<\frac{1}{2}\times r\times$ 圓的周長 $=A$

這與 $S_n>A$ 的情形發生矛盾，所以 $S>A$ 不可能。

(2)若 $S<A$



如右圖，此次阿基米德由圓的外切正多邊形下手，同上，我們總能找到一個外切正 n 邊形，

使得它的面積與圓面積的差小於 $A-S$。設其面積為 T_n，即 $T_n-S<A-S \Rightarrow T_n<A$

但 $T_n=\frac{1}{2}\times r\times$ 外接正 n 邊形的周長 $>\frac{1}{2}\times r\times$ 圓的周長 $=A$

這與 $T_n<A$ 的情形發生矛盾，所以 $S<A$ 不可能。

所以，$S=A$

在這樣間接迂迴的方法中，阿基米德證明了圓面積的公式。接著讓我們一起來看看劉徽的方法吧！

劉徽的證明

劉徽對圓面積公式的證明可概分為四部份，我們依解釋需要分段逐錄劉徽原文說明如下：(主要是依據數學史家郭書春的校証)

> 按半周為從，半徑為廣，故廣從相乘為積步也。假令圓徑二尺，圓中容六觚之一面，與圓徑之半，其數均等。合徑率一而弧周率三也。

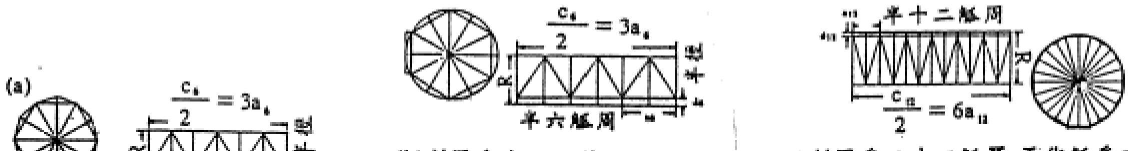
一開始，劉徽便交待其證明的主要想法是「圓出於方」，在已知正方形面積公式的前提下，證明圓面積公式！並說明 $\pi=3$ 是利用圓內接正六邊形所求得的近似值。

> 又按為圖，以六觚之一面乘一觚半徑，三之，得十二觚之冪。若又割之，次以十二觚之一面乘一觚之半徑，六之，得二十四觚之冪。割之彌細，所失彌少。割之又割，以至於不可割，則與圓周合體而無所失矣。

接著，劉徽利用「割圓術」，由圓內接正六邊形，分別求出圓內接正十二邊形及正二十四邊形的面積(如下圖)。劉徽進而指出，當切割的動作繼續下去，圓內接正 $6\cdot 2^n$ 邊形的面積 S_n 與圓面積 S 的差就愈來愈小。割之又割，到最後圓內接正多邊形便與圓周合為一體！這顯然是一個極限的過程，也就是

$$\lim_{x\to\infty} 6\cdot 2^n a_n = C\ (\text{圓周長})$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(S-S_n\right)=0$$



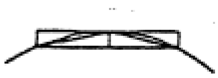
(b)割圓爲十二觚冪,再化觚爲方 $S_{12} = 3 \times a_6 \times R = \frac{C_6}{2} \times R$

(c)割圓爲二十四觚冪,再化觚爲方 $S_{24} = 6 \times a_{12} \times R = \frac{C_{12}}{2} \times R$

觚面之外，猶有餘徑，以面乘餘徑，則冪出弧表。若夫觚之細者，與圓合體，則表無餘徑。表無餘徑，則冪不外出矣。

再來，劉徽說明圓內接正$6 \cdot 2^n$邊形的每邊a_n與圓周之間有一餘徑r_n，若將各邊長乘上餘徑，其和會大於圓面積，即

$$S_n + 6 \cdot 2^n a_n r_n = S_n + 2\left(S_{n+1} - S_n\right) > S$$


(d)冪出弧表

然而當$\lim\limits_{x \to \infty} a_n = 0$，則$\lim\limits_{x \to \infty} r_n = 0$，

此時

$$\lim_{x \to \infty} S_n + 2\left(S_{n+1} - S_n\right) = S$$

這表明圓面積S是數列$\langle S_n \rangle$與$\langle S_n + 2\left(S_{n+1} - S_n\right) \rangle$的極限。

以一面乘半徑，觚而裁之，每輒自倍。故以半周乘半徑而為圓冪。此以周、徑，謂至然之數，非周三徑一之率也。

最後，劉徽對與圓周合體的正多邊形進行"無窮分割"，分成無窮多個以正多邊形每邊為底邊a^* (而圓周長$c = \sum a^*$)，圓心為頂點的小等腰三角形。則小三角形面積$A = \frac{1}{2} \cdot a^* \cdot r$，則圓面積

$$S = \sum A = \sum \frac{1}{2} a^* \cdot r = \frac{1}{2} \sum a^* \cdot r = \frac{1}{2} c \cdot r \text{ 。}$$

就這樣，劉徽就證明了圓面積公式，且明白告訴我們"此以周、徑，謂至然之數，非周三徑一之率也。"

在劉徽如此具體與直觀的證明中，學習者很容易直接掌握圓面積公式的風貌，清楚地理解圓面積公式等於半周半徑相乘！當然，劉徽能直接建構出圓面積公式，與其多次使用極限的想法有關，劉徽

敢“窮盡”割圓術！！相對於劉徽，阿基米德顯然「不敢」取極限！因此只好採取歸繆証法證明圓面積公式的正確。為何阿基米德害怕面對極限？這與希臘人無法面對「無限」有關。這完全是芝諾(Zeno)搞的鬼，他提出四個有名的悖論，有一個是大家耳熟能詳，關於阿奇里斯(Achilles)與烏龜賽跑的論証，根據芝諾嚴格的形式論証，合理地得出阿奇里斯永遠跑不過烏龜的結論，與我們生活的經驗衝突。因此被稱做「悖論」。如此一來，使得希臘人無法面對無窮的概念，是希臘哲學不可逾越的障礙。連亞里斯多德都說，無窮是不完美、未完成的，因此是不可想像的。難怪乎！與劉徽幾乎相同的起點上，阿基米德卻選擇歸謬法間接證明出圓面積公式的正確性，因此認識論上的侷限，影響方法論上的選擇，在這兒提供一個最佳的例証。

雖然無窮概念--直到十九世紀才由康托(G.Cantor)建立完整的理論基礎--對希臘人的限制很大，但絕非僅是負面的影響，它使得希臘的數學家被迫建立起間接證明相關的理論基礎。利用我們所熟知的矛盾律及排中律，在可能的情形中，羅列出所有可能的假設，除正確的假設外，其他的假設都推論出矛盾的結論。這個方法在歐幾里德的《幾何原本》中發揮了強大的作用。相對於西方數學如此成熟的間接證明方法，中國算學中似乎並不存在此種類型的證明方法？當阿基米德的圓面積公式證明曾隨著《論圓的測量》的拉丁譯本，經由徐光啟及利瑪竇翻譯成中文，引介到中國，但似乎對後世的中國人沒有造成任何影響！這樣的疑問，日本學者中村元《中國人之思維方法》一書(學生書局，1995 年)，可以提供我們思考的一個面向。透過對語言對思維論理間的探索(這當然仍有討論的空間)，他認為“中國人喜歡用從一個事象向次一個事象的因果關係或理由歸結之關係去追究的思維方法。反之，對於從作為結果或歸結的一個事象，以追溯其原因或理由，則不曾充分發揮思維能力”。

除了上述數學史上一些例証的介紹外，筆者也期待數學教育工作者也能進一步思考：數學證明的教學目的是什麼？事實上，數學證明的最大作用並不是核對命題的真偽，而是讓人透過它去理解命題，進而導致新的發現。如同法國以布爾巴基(Bourbaki)為筆名的數學家的一篇文章《數學的建築》所說(The Architecture of Mathematics,American Mathematical Monthly,Vol.57,1950,pp221-232)“每個數學工作者都知道，單是驗証了一個數學證明的逐步邏輯推導，卻沒有試圖洞察獲致這一連串推導的背後意念，並不算理解了那個數學證明。”(轉引自蕭文強《數學證明》(簡體版)，1992)。或許對數學教育工作者而言，波利亞的(George Polya,1887~1985)“證明是為了滿足你”(Proof is what satisfies you)，這句話更是值得深思再三！

附註：蕭文強寫的《數學證明》一書，值得閱讀，如有興趣，九章出版社有繁體字版。

柏拉圖【米諾】中的數學哲學對話

洪萬生教授
台師大數學系
北縣福和國中 陳昭蓉老師譯

柏拉圖的數學哲學論述，主要發表在他的著作【米諾】(The Meno) 之中。在本書中，對話的人物共有四位，即蘇格拉底、米諾、Anytus 與米諾家的一位（奴隸）男孩 (slave boy)。不過，Anytus 並未介入數學哲學對話。至於對話一開始，則是米諾向蘇格拉底請教下列有關「德性」(virtue) 之問題：

德性是否被教育而能？或者它是自行修練得來？或者它既不是被教育而能也不是修練得來，而是與生俱來的稟賦？

按米諾是一位年輕的貴族，曾向辯者 (Sophist) 兼修辭家 (rhetorician) Gorgias 學習，頗有知識思辨的品味。針對此一問題，蘇格拉底回答說：

我對德行完全一無所知！當我根本不知道某事物究竟是什麼時，我如何可以知道它的性質呢？

於是，在一連串攻防對壘之後，蘇格拉底歸結到「靈魂」(soul) 的不朽與轉世之主張上，從而斷言「追尋與學習不過是重新收集而已」(seeking and learning are in fact nothing but recollection)。為了強化他的論證，蘇格拉底就舉「數學學習」作為例子，而這正是【米諾】第二部份對話的主要內容。

這一段對話是由陳昭蓉老師翻譯，她根據了 John Fauvel and Jeremy Gray eds. History of Mathematics: A Reader 一書所收入的摘錄。這是數學教育史上的一段「經點」對話，值得閱讀。有關數學教育研究者對它的反思，本刊會繼續推介。

M：你說人們並不學習，我們所謂的學習其實是一種記憶的追溯。這是什麼意思呢？你能教教我嗎？

S：才剛說你是個壞蛋呢！我說了，教學並不存在，只有記憶的追溯；而你卻要求我教你。很顯然的，這不是要讓我落入自相矛盾的境地嗎？

M：不不不！說真的，我可沒有這個意思。「教」這個說法已經成了習慣了，我只希望你說清你的意思，並展現它的真實性。

S：這倒是不容易。不過既然你這麼要求，我就盡量試試看。你這兒似乎有不少侍從，請任選一名到這兒。我將藉此來闡述這個道理。

M：沒問題。*(M 召喚一個僕人 B 過來)*

S：他是希臘人，說我們的語言嗎？

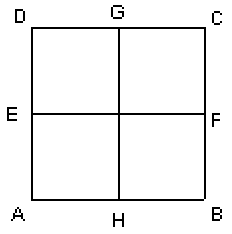
M：沒錯，生在這裡，長在這裡。

S：仔細聽好，看看接下來的過程中，我是在教他，或只是在提醒他。

M：好的。

(S 在腳邊的沙地上畫了一個正方形 ABCD，並對僕人 B 問話)

S：孩子，你知道正方形是這樣的形狀嗎？



B：我知道。

S：四個邊是否都等長？

B：沒錯。

S：對邊中點的連線 EF 和 GH 是否也等長？

B：是的。

S：這樣的圖形大小可以改變的，對嗎？

B：對。

S：如果這個正方形的邊長是 2 英尺，整個的面積會是多少？這麼說吧，如果是一邊長 2 英尺，另一邊長只有 1 英尺，面積是不是 2 平方英尺？

B：是。

S：既然現在是兩邊都長 2 英尺，面積就會是 2 平方英尺的 2 倍囉？

B：對的。

S：算算 2 平方英尺的 2 倍是多少，告訴我。

B：四平方英尺。

S：那麼你能畫一個相似的圖形，四個邊等長，但面積卻是 ABCD 面積的兩倍嗎？

B：可以。

S：這個圖形的面積會是多少？

B：八平方英尺。

S：告訴我它的邊長應該是多少。原來的圖形邊長是 2 英尺，面積變成 2 倍的新圖形邊長是多少？

B：很明顯啊，是原圖形邊長的兩倍。

(S 轉向 M 發問)

S：看到了嗎？我沒有教他什麼，只是發問。他認為他知道面積 8 平方英尺的正方形邊長是多少。

M：沒錯。

S：但是他知道嗎？

M：當然不知道。

S：他認為是原來邊長的兩倍。

M：是的。

S：現在看看他如何正確的循序漸進，追溯回憶。

(他再度轉向僕人發問)

S：你說把邊長成為原來的兩倍，面積就會是原面積的兩倍。我所謂的形狀相似是說各邊等長，而非邊長有長有短。心的圖形必須各邊等長，而且面積是 8 平方英尺。再想一下，是不是仍選擇讓邊長是原來的兩倍？

B：是的。

S：那好，現在我們沿著 AB 再加上與 AB 等長的 BJ，可以得到 AJ 是原線段的兩倍長嗎？

B：可以的。

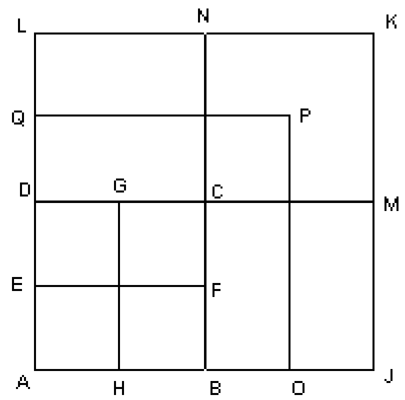
S：照你的說法，只要取四個這麼長的邊，就可以得到面積是 8 平方英尺的正方形了，對嗎？

B：對。

S：那我們按照 AJ 的長度，做出線段 JK、KL、LA，並以 AJ 為底。是否可以得到你說的 8 平方英尺的正方形？

B：當然可以。

S：*(畫上線段 CM、CN)* 這個新圖形是否包含四個與原圖形一般大小的正方形？



B：是的。

S：那麼新圖形會多大？是不是原圖形的 4 倍大？

B：那當然。

S：4 倍大和 2 倍大一樣大嗎？

B：當然不一樣。

S：所以邊長如果是原來的 2 倍，得到的新面積不是原面積的 2 倍而是 4 倍囉？

B：沒錯。

S：4 乘以 4 得到 16，對嗎？

B：是的。

S：那麼面積是 8 平方英尺的圖形又是多大？現在畫的這個面積是 16 平方英尺，對嗎？

B：對。

S：以新圖形邊長的一半做出的正方形面積則是 4 平方英尺，對嗎？

B：對。

S：所以我們要的圖形邊長會比原圖形 ABCD 的邊長大，但比新圖形 AJKL 的邊長小，對嗎？

B：我想應該是吧。

">：是的。
S：那麼面積是 8 平方英尺的圖形又是多大？現在畫的這個面積是 16 平方英尺，對嗎？

B：對。

S：以新圖形邊長的一半做出的正方形面積則是 4 平方英尺，對嗎？

B：對。

S：所以我們要的圖形邊長會比原圖形 ABCD 的邊長大，但比新圖形 AJKL 的邊長小，對嗎？

B：我想應該是吧。

S：很好，你怎麼想，就怎麼說。原來邊長是 2 英尺，新邊長是 4 英尺，是不是？

B：是的。

S：所以面積 8 平方英尺的正方形邊長必定介於 2 和 4 英尺之間？

B：想必是的。

S：試著說說看你覺得應該多長。

B：3 英尺長。

S：假如是這樣，我們加上 BJ 中點 O，那 AO 就是 3 英尺？AB 是 2 英尺，BO 是 1 英尺。在另一邊我們如法炮製，也可以得到 3 英尺長。那麼 AOPQ 就是你要的正方形。

B：沒錯。

S：如果長是 3 英尺寬是 3 英尺，面積是不是 3 乘以 3 呢？

B：看來似乎如此。

S：那麼面積是多少？

B：9 平方英尺。

S：然而我們要的原面積的兩倍卻是多少？

B：8 平方英尺。

S：但是從 3 英尺見方的圖形有得到 8 平方英尺的圖形嗎？

B：沒有。

S：那麼邊長究竟是多少？準確的說出來。如果你不想算出大小，就在圖上畫出來。

B：沒用的，蘇格拉底，我真的不知道。

管窺集：〈圓錐截痕與二次曲線：一個數學老師的無聊之舉〉

洪秀敏老師

北縣錦和中學

圓錐截痕與二次曲線：一個數學老師的無聊之舉
鄭英豪 作
民 88 年 9 月 數學傳播第 23 卷第 3 期 pp.21-33

一、前言

圓錐截痕在中學數學的課程中佔有很重要的地位。古希臘人研究它們曲線是經由圓錐截痕的觀點而加以研究的，統稱圓錐曲線，屬於空間幾何的問題。不過，根據筆者過往學習的經驗，筆者卻以為圓錐曲線在中學階段被視為一種代數題材來教授的成分還遠高於幾何題材。

因為就高中基礎數學第三冊第四章的教材而言，不管單元名稱是拋物線、橢圓抑或是雙曲線，內容無非就是：如何從圓錐曲線在平面軌跡的路徑，來定義曲線的標準方程式；如何利用圓錐曲線焦點、頂點、準線等各資料間的關係，由其中的已知求其他的未知等等。

結果，在中學數學課程中難得安排一章可能與幾何單元有關的專題教材，卻在變數 x 、 y 的詮釋之下，失去了它原蘊有富含啟發性的內容與意義。對學生而言，圓錐曲線無非就是 x 、 y 兩變數的二次方程式。充其量也不過是，不同的二次方程式代表不同的圓錐截痕：與圓錐底面平行的平面截圓錐面成一圓；若平面稍微傾斜，截痕就變成橢圓；若平面與圓錐的母線相平行，則截痕為拋物線；再傾斜，就變成雙曲線，僅此而已。原本可以是很富人文素養、啟發性的圓錐曲線，最後留存在學生腦海的，卻僅剩一些不具任何意義的名詞、定義。弔詭地是，不僅學生對於圓錐曲線的內容，感到畏懼、恐慌，就連授課的老師，本身對於教材也不見得有多深刻的認識，更談不上有感覺、或是覺得有用。

面臨二十一世紀，許多的教育改革正如火如荼地展開，其中「主題式」統整課程的凸顯，堪稱是本世紀末台灣教育史上的一大突破。幸運的是，數學教師不用擔心「協同教學」、「合科教學」在實際教學上的可行性。但假如在這世紀末的教改中，數學教師也期望在數學課堂中多一點的互動，多增加一點有意義的學習，尤其在這樣一個令多數中學生感到畏懼、卻步的學習主題下，那麼去思考「如何讓數學教學活動多一點人文的關懷、少一點機械式的運算；多一點趣味盎然的教學主題、少一點制式的定義、名詞」將是絕不可避免的！

然一般基層數學教師，縱使不滿意教科書作者的取材、教科書內容的編排，但受制於學校人、事、物等各方條件無法充分配合，數學教師常常是有心卻無法針對某一特定數學主題，做深入的研究、細膩的討論，更遑論進一步反思、釐清數學教材中「可以教」與「必須教」的要務。基於以上的理由，筆者以為類似鄭英豪先生這篇論文的文章，相當值得引界給數學教師作參考。

二、論文摘要

在這篇論文中，作者一開始就針對中學階段圓錐曲線的「教與學」這主題，統整出幾項涵蓋數學、數學教育、數學哲學、數學史等各領域之重要議題。例如：到底我們視圓錐截痕這專題為「幾何」還是「代數」？身為數學教師的我們，對圓錐截痕這專題的感覺是什麼？在這一章節裡，我們到底教了什麼？為什麼圓錐曲線必須按照拋物線、橢圓、雙曲線這順序來談？有沒有特殊的意義？談了那麼多的圓錐曲線，圓錐截痕到底又在那裡？最後，基於什麼樣的理由，我（他）們要去探究圓錐截痕？

對於數學教師而言，作者所整理、分析出來的這些問題，問得不僅中肯而且深刻、實在。當然，對於這些問題，我們可以有許多不同角度的詮釋與看法。然每一種的說法，背後其實都有他可能代表的哲學思維。而作者在這裡顯然是想從歷史的角度，深入思考、探究這些面向的歷史脈絡，從中獲取靈感與啟發。

根據作者的這篇論文，我們得悉古希臘數學家之所以對圓錐曲線感興趣，起因於「倍立方」的問題：亦即要用尺規作圖，作出 $\sqrt[3]{2}$ 的長度。比例中項是希臘人所熟知的。因此，他們想到要用 $a:x=x:y=y:2a$ 這二重比例中項求解。用現代的座標幾何來看，這就等於求兩拋物線 $x^2=ay$ 及 $y^2=2ax$ 的交點。這問題開啟了希臘人研究圓錐曲線的風氣。雖然沒有實用價值，但希臘人本著求知的精神，拼命鑽研圓錐曲線的性質，到阿波羅尼斯（Apollonius）綜合前人成果，加上自己的創見，寫成《Conic Sections》一書，圓錐截痕這門知識大體已完成，後人已沒有太多可以突破的空間。直到今天我們所學的都還是當年的那些東西。

阿波羅尼斯研究得太完美了，使得後人無以為繼。直到文藝復興以後，這情形才有轉機。一方面，射影幾何的萌芽，豐富了圓錐曲線的內容。一方面，克卜勒（Kepler）、伽力略（Galilei）在自然界中（行星運行的軌道、拋體的運動路徑）發現圓錐截痕的律則。這漸漸為人所淡忘的作品才再度地受到數學家的重視。然值得注意的是，對圓錐曲線這歷史悠久的數學知識而言，這次的甦醒同時還揭示著另一個新紀元的開始--圓錐截痕完全被視為平面二次曲線，也就是今日我們所熟知的圓錐曲線。然有關焦點、準線等名詞，則是十九世紀數學家 Dandelin 的作品。

三、結語

談及數學史，尋找圓錐截痕的發展史，免不了得包含一些「嚴謹」的證明，雖然「數學」不應該等同於「證明」。但考慮到數學知識求真、求善的本質，觸及一些數學證明是有其必要的。因此建議：讀者若有時間可從容閱讀這篇論文，那麼不妨用心地對待論文中所提及的證明。若時間不允許，則筆者以為略過這些證明，事實上，倒也無傷大雅。重要的是，讀者在閱讀這篇論文的同時，是否能在圓錐曲線發展的漫漫長路中，獲得啟發？是否能洞悉作者在幾個不同的東西這一小節中，所分析的事實一我們在課堂裡再三強調的焦點、準線、長軸、短軸原本都不是直接長在那裡，軌跡更不是最先出現的！ --是每一位數學教育工作者必須深入思考的議題！因為我們的中學生是被迫將一個跨過 2000 年的數學創作，在一夕間以代數運算形成。

最後，作者這篇文章名為〈圓錐截痕與二次曲線：一個數學老師的無聊之舉〉。筆者好奇的是，這無聊之舉意指為何？筆者以為，若是作者欲指稱自己的這篇論文乃成於無聊之舉，那麼，筆者相信，這無聊之舉將是數學教師豐富自己教學思維的一個起點。數學教師若能好好把握這樣的一個起點，開

始嘗試針對教了數年或數十年的教材內容，作細膩地討論、研究，那麼多元化的數學教學是指日可待的！倘若作者的無聊之舉有更深一層的含意，譬如：影射編寫教科書的諸公們。則讀者在莞爾一笑之後，可能更要有自覺提醒自己去思考一些深沈的問題。