HPM通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）
助理編輯：李建勳、黃俊瑋（台灣師大數學所研究生）
編輯小組：蘇意雯（台北市立教育大學）蘇俊鴻（北一女中）
黃清揚（福和國中）葉吉海（新竹高中）
陳彥宏（成功高中）陳啟文（中山女高）
王文珮（青溪國中）黃哲男（台南女中）
英家銘（台師大數學系）謝佳叡（台師大數學系）
創刊日：1998 年 10 月 5 日　　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng

第二卷 第二、三期合刊 目錄(1999 年 3 月)

羅浮宮：科學與藝術的結晶

洪萬生

臺灣師範大學數學系教授

當嘴角雙唇微開的蒙娜麗莎，向我們展現羅浮宮乃至巴黎所特有的寧靜、典雅氣質時，筆者雙腳的痠疼不覺以減輕了大半。誠然，羅浮宮的優美與高貴，絕對不只是因為它那舉世無雙的藝術收藏品而已，更難得的，恐怕也來自法國人經營巴黎那種既開闊又細緻的格局吧！正如羅浮宮與巴黎是不可分割的有機整體，它的收藏與建築也是切不開的。羅浮宮位於賽納河右岸與里沃利大街，我們從正門進入，立刻進入眼簾的，便是建築大師貝聿銘設計的三座金字塔。每天的任一時刻，這三座透明的、以現代科技打造的金字塔（一座主塔與兩座副塔），都有如五彩繽紛的五彩畫布一樣，不斷地變換天光與羅浮宮的倒影，真是美得令人不敢逼視。

不過，這種美的極致，應該也來自科學與藝術、古典與現代的結合。一九九五年三月，筆者與香港數學家蕭文強同赴巴黎參加『徐光啟研討會』，投宿賽納河右岸旅館，每天到河左岸拉丁區赴會途經羅浮宮正門廣場時，總喜歡細數宮牆上『罰站』的法國思想家、哲學家、科學家和數學家塑像，遙想他們對科學與藝術人文的狂熱，留下多少不朽的注腳！事實上，法國人不僅熱愛人文、藝術，對科學家、數學家更是推崇備致，譬如位於拉丁區、鼎鼎大名的巴黎高等師範大學門前馬路，即以居禮夫人命名，她與丈夫皮埃的照片，更是榮登法國 500 法郎鈔票；至於二十一歲因決鬥而去世的天才數學家伽羅瓦（F. Galois），也一再現身法國郵票，可見他們對科學文化遺產的高度重視。

偉大科學家、數學家大都出身庶民階層，這是古今中外皆然的事實，其他思想家、哲學家、文學家和藝術家，大概也是來自平民家庭居多。一個國家對這類人物的敬重，或許可以衡量她的氣度是否雍容與自在。離巴黎高等師大不遠的『先賢祠』（Pantheon），迎面可見斗大銘文 － 『偉人們，祖國感謝你們！』而有幸長眠於斯的，則是盧梭、雨果、左拉和伏爾泰等思想家和文學家，至於所謂的英明帝王和蓋世英雄，則永遠不在入祀之列。筆者深信正是因為這樣的文化空間，所以，當我們從羅浮宮遠眺香榭里大道時，盡收眼底的不僅是宏偉、壯闊，而且是美不勝收的驚歎！一九九五年夏天筆者曾兩度造訪北京天安門廣場，感覺宏偉有之、壯闊有之，但從不曾感動，原因何在，固不辯自明矣！

是的，羅浮宮傲世的正是西方科學和藝術的完美結晶。在離開巴黎的前一天下午，筆者從容地進入羅浮宮欣賞名畫『蒙娜麗莎的微笑』時，彷彿看到達文西在他自己的臉部素描上所畫的『黃金矩形』。所謂美，對希臘人、達文西乃至法國人而言，都是指『好的比例』（well-proportioned）。由此看來，羅浮宮的裡裡外外，不都是美的見證嗎？

另一個千禧蟲

謝佳叡助教
台灣師大數學系

一個百年壽辰在即的人翁 在眾人將為他大肆慶祝的前夕
才發現其實今年他只有九十九歲~~~~

相信每一個中國人在被問及年齡時，總會有著到底要回答虛歲或實歲的困擾？有人說這有什麼困擾，當然回答有利的，該年輕時就回答實歲，反之亦然。有人說這有什麼關係，反正誤差不過一、兩歲。但如果這一、兩歲剛好是關鍵可就大有關係了。中國對於年齡的計算採用受孕日為人之初，也就是從呱呱墜地當天往前推算約十個月開始，粗算為一年，故出生便是一歲，爾後每遇春節（另一說為冬至吃湯圓）便多一歲。儘管科學性不足，卻反映出中國的傳統及父母期盼幼子成長的心理，如筆者為十一月初出生，而出生兩個月後即算兩歲，虛歲之稱莫此之明。反觀西洋的算法是以出生日期始，次年的生日才滿一歲（實歲）。當然這樣的算法在年齡的統計上較能達到統一性與精確性。卻有以下兩個問題：（一）在法治國家的社會，在腹中的胎兒便享有司法的保障，而基督教社會的反墮胎就是認定胎兒已有生命，這與以出生日為年齡之始的作法的確互相矛盾。（二）以這樣對年齡的算法，未滿周歲算一歲還是零歲？（總不能是 0.8 或$\frac{173}{365}$歲吧。）

人類對於時間的度量-- 年、月、日--都來自自然現象的觀察，地球公轉、月球公轉、地球自轉，換句話說年、月、日的度量長度都依循著自然規律。但另一些計算人類歷史時間的單位－年代（decade）、世紀（century）、千禧年（millennium）卻是取決於生物的機率現象－人有十隻手指。十的倍數從某種角度來看也是一種基本單位，再遇到 10 的冪次方，意義就更不一樣了。聰明的人類在我們生活的這一條時間流上標示了刻度，每個刻度都是一個特定時間，而接下來的刻度--公元 2000 年--已在倒數計時了。2000 年，多麼特殊且富有意義的數字，不但跨世紀，更是千年一現的千禧年（試想，上一個千禧年蘇東坡都尚未問世！）。

撇開象徵性的意義不談，這一年實無異於其他。實在找不出什麼大事一定得在這樣的一年內發生，唯一比較實際的困擾就是電腦中所謂的千禧蟲了。姑且不論千禧蟲的問題是否已完全獲得解決，另外一個有關千禧年的問題卻已到來，那就是今年是否真是本世紀的最後一年？儘管這樣的問題其象徵的意義遠超過實質的意義，卻不容忽略。因為對於某些人（甚至大部份人）來說，有意義的生活也是一種生命的動力。你可以想像一個百年壽辰在即的人翁在眾人將為他大肆慶祝的前夕，才發現其實今年他只有 99 歲的窘狀嗎？

就在世界準備迎接公元 2000 年到來的同時，伴隨迎接的正是新世紀、新千禧年的到來，但仔細一想，這是同一件事嗎？或許可以這麼問，新世紀的到來應該是 2000 年的 1 月 1 日還是 2001 年的 1 月 1 日？前者顯然較受大家歡迎，但堅持後者的亦不在少數，舉例來說，澳洲政府已決定在 2000 年 12 月 31 日才開始各項慶祝千禧年的活動。當然這種爭議不是誰大聲就贏，雙方各據其由，有的引經據典，有的訴諸權威，有的更從數學史與數字加以闡述。而從這些爭辯中不難發現，類似的問題也充斥在我們生活中，如：倒數計數是否比依序計數更具科學性？過生日到底應插幾根蠟燭？請四小時假

應算幾天？

2000 年的論點

支持 2000 年的人提出一個很簡易的計算方式：所有二十世紀中的任一年，公元記法的前兩碼都為 19，所以我們知道 1997 在 20 世紀;同樣的，1897 在 19 世紀，如此算來 2000 年理應在 21 世紀，當然新的千禧年從 2000 年開始。

另一種論點可以這樣看：假如我已 20 歲表示我至少已經活了 20 年，換言之，我已 19 歲表示我正在過我第 20 年的生活，則我第 20 歲的生日就是指下一個到來的生日，而這個生日不但是我第二個十年的結束，同樣也是第三個十年的開始。同樣的如果我今年 1999 歲，則下一個生日將是我這個千禧年的結束，也是下一個千禧年的開始，而這一日就是 2000 年 1 月 1 日。

另一些支持 2000 年的人並未提出解釋，只是認為就是應該在 2000 年，2001 年就是不對勁。有人則認為即使 2000 年是錯的，還是有慶祝的理由，除夕、元旦啦，甚至可以給他狂歡一整年。有人則認為無論如何，2000 就慶祝一定不會錯過（大不了 2001 年再慶一次）。若不顧這些論點之正確與否，2000 年看來確實較能虜獲大家的認同。看那些以百年為單位的歷史事件與活動的記錄表，大都是以--00 到--99 為區間，新世紀的開端更是強調在一00 年;輝煌的 19 世紀文學家如歌德、席勒、雨果在他們名著中都記下 1800 年為 19 世紀的第一年。而由 Wilhelm 皇帝統治的德國就在 1900 年慶祝 20 世紀之始。

2001 年的論點

支持 2001 年得人當然有著強而有力的憑據及歷史事實。一個最簡易的計算方式：以常用模型為例，邊長為 1 的立方體積木，每 10 個可拼成 1 長條，每 10 條可拼成 1 正方面（每面 100 個），10 面可拼成 1 大立方體（含 1000 個）。若一個一個放置，當放置到 10 個時，則完成了第一條，而第 11 個積木是下一個長條的第一個。相同的，若你放置了 1000 個你才完成了第一個大立方體，第 1001 個才是下一個大立方體的開始，以此類推，2001 個才會是另一個新的大立方體的第一個。這個論點清楚明瞭，卻有一個較受爭議的問題，就是時間是否可以被分割成一些有意義的小單位？

另一種算法是：在你第一年的生命中你會說你只是零年幾個月，但在我們使用的公元記法（BC-AD）並沒有 AD 0 年，第一年是 AD 1 年，所以 AD 10 年是第一個 10 年（first decade）的最後一年，AD 100 年是第一個世紀（first century）的最後一年，而 AD 1000 年是第一個千禧年（first millennium）的最後一年，由此可知，2000 年是第二個千禧年的最後一年，而 2001 年才是第二個千禧年的第一年，這個解釋基本上可說是無懈可擊。然而真是如此嗎？

AD（Anno Domini）的記年法是六世紀基督教的一位修道僧侶，Dionysius Exiguus 所創，當時歐洲採用的記年系統來自羅馬城成立的時間（AUC），但當時在位的羅馬皇帝 Diodelian 卻迫害基督徒，他便決定改以耶穌誕生計年代替。然而有學者指出，Dionysius 所採用的耶穌誕生年比實際晚了四年，

而且系統遺漏 AD 0 年（用來描述第一年未滿）。Dionysius 不採用 AD 0 年是可以理解的，除了『0 年』實在不存在於當時的其他曆法內（即使現在也看不見），連 0 這個數字都不存在於羅馬的計數系統（別忘了『0』這個字在數學史上出現可晚多了）。你或許會說既然記年是人定的，只要將 AD 1 年的前一年再訂為 AD 0 年那原先的問題不就解決了嗎？反正 AD 系統也有了四年的誤差。但變化往往有其宿命，八世紀有一個 Anglo-Saxon 的修道僧侶 Venerable Bede 發明了 BC（Before Christ）記年法，他將舊有的 AD 法加以延伸，定 AD 1 年的前一年為 1 BC（公元前 1 年），以此類推。這個延伸的系統當然也保留了 AD 被提出的錯誤--忽略了 0 年，更糟的是在被慣用後，連 0 年插入的機會有被排除了，而產生一條異於實數線的時間數線。

BC　AD
10 9 8 7 6 5 4 3 2 1　1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

當然也導致一些歷史與數學學者的困擾，如公元前十年（10 BC）出生的人在公元 10 年（AD 10）並非 20 歲，而是 19 歲。AD 0 年成了名符其實『失落的一年』。

代替方案出現

BC—AD 系統也困擾了天文學家，顯然連續且規則的實數線式的時間軸比離散的日期記錄法精確且不易混亂。例如歐洲通用的『羅馬朱利安曆法』（Julian calendar，凱撒大帝在公元前 46 年使用之曆法）在被取代成『格利果曆法』（Gregorian calendar，公元 1582 年教皇格利果 13 世制訂而成，即現今用世界通用的陽曆）時有 10 天失落了。而且 AD 0 年恰巧是一個閏年，若換成 1 BC 年則算法必便無一致性。新曆法隔年（1583 年）義大利人 Joseph Scaliger 發現了此一問題，便發展了一套天文學專用的記年法，他由文獻記載中可尋之最早年份（4713 BC，記載於巴比倫文獻）當成新曆法之始，可粗算約距今 250 萬天前。AD 1740 年，法國天文學家 Jacques Cassini 作法可就更直接了，他將 1 BC 直接記為 AD 0 年，而 2 BC 記為 −1年，以此類推。但這兩種算法對於解決 2000-2001 的問題只有更加困擾了。

結論

下一個千禧年始於何日，若忽略歷史記法而從數學的觀點來解答，他看起來是明顯的。但事實上有很多人卻投資在錯誤的看法（2000）上，畢竟慶祝兩次的千禧年的確帶會來不少商機。較謹慎的作法是由一群在皇家格林威治天文台的人所提出的，根據國際子午線協會在 1884 年會議，同意以 2001 年 1 月 1 日午夜為新千禧年之始。但必須留意的，這裡所說的午夜指的是以格林威治的本初子午線（Prime meridian）為準，以免這盛大的全球性活動因各地時區不同而無法共襄盛舉，屆時將有全球性的大活動。但另一方面，他們也販賣天文台的贊助機會，讓商家展示『格林威治子午線 2000 標誌』，也同時參與整年的慶祝活動，以從各方獲利。

對於正在從事教育工作的老師，這將是一個很好的機會讓學生做一些測量時間的探討，以及明瞭曆法的歷史與製作等。甚至讓學生自己動腦思考，動手尋找，提出自己的觀點，找出問題所在，相信

必有所獲。

資料來源：

amt (the australian mathematics teacher :The Journal is an official publication of the Australian Association of Mathematics Teachers Inc.) volume 54 number 3 1998 , p18-21

教師十誡

G.波利亞

台師大數學系學生 何耿旭、陳彥宏翻譯

新竹竹北高中洪誌陽老師 校訂

過去這五個學期以來，我的所有課程都在對中學教師演說，這些教師在歷經幾年教學後，又再回到大學來接受外加的訓練。在了解到他們需要一個對日常教學直接有所助益的課程，我便試著去設計這樣的課程；無可避免地，在課程中我必須重複地表達個人對教師日常工作的看法。在我的論點中試圖先假設有一固定的形式，最後，我將它們歸納濃縮成十條規則，或稱『十誡』。

為了清楚說明十誡的意義，本應加上例子，但鑒於空間有限，在此便不再贅述。不過，在我的《數學解題》一書中，舉例說明了一些觀點；而在其他著作中，也可以看到關於此一主題的論述。現在，我將『十誡』列舉如下：

教師十誡

2. **對你所教授的科目有興趣。**
3. **瞭解你所教授的科目。**
4. **試著去"讀"學生的表情、瞭解他們的期許與困難；設身處地為學生著想，將自己當作是學生。**
5. **明瞭學習的途徑：學習任何一件事的最佳途徑就是親自獨立地去發現其中的奧祕。**
6. **不但要教授學生知識，而且要讓他們知道技巧、訣竅，學習正確的心態及有系統工作的習慣。**
7. **讓學生學習去猜測。**
8. **讓學生學習證明。**
9. **留意現在手邊的問題，從其中找尋一些可能對於以後解題有幫助的特徵— 試著去揭露潛藏在目前具體情境中的普遍形式。**
10. **不要一次就洩露出所有的祕訣—在你告訴學生之前，讓他們去猜測—讓他們盡可能地自行去發現。**
11. **啟發問題；讓學生勇於發表，不要填鴨式地硬塞給學生。**

說明

最初，我是針對課堂上的參與者—中學數學教師，來說明前述的十誡。儘管如此，這些規則適用於任何的教學環境、任何層級的任何科目；不過，一般來說，數學教師有較多、較好的的機會去運用它們。現在，我們開始一個一個來考慮，其中將會特別針對數學教師的教學：

1. 要明確地預測某種教學方法是否奏效幾乎是不可能的；然而有一件事是可以確定的：如果你對自己所教授的科目感到厭煩，那麼你也將會使你的聽眾感到厭煩。

   以上應足以說明十誡中的**第一誡：對你所教授的科目有興趣。**

2. 若教師對所教授的科目沒有興趣的話，他也將無法使學生去接受此一科目，因此，興趣是一個教學不可或缺的必要條件；但光有興趣是不夠的，當你對一個科目不瞭解時，再多的興趣、教學方式也無法讓你清楚地對學生解釋一個論點或看法。

這也應該說明了十誡中的**第二誡：瞭解你所教授的科目。**

3. 甚至在有了興趣、瞭解所教授的科目之後，你仍然有可能是一位差勁或相當平庸的老師。我承認這種狀況雖不常見但也絕非罕有：大部分的人便曾遇過這樣的老師—他們雖瞭解所教授的科目，但在班上卻無法建立與學生接觸的管道。所謂教學應該是教授的一方可以引起他方的學習， 因此，在教師與學生之間必須有某種接觸的管道：教師應當明瞭學生的處境、支持他們的目標、理由。這就是十誡中的**第三誡：試著去“讀”學生的表情、瞭解他們的期許與困難；設身處地為學生著想，將自己當作是學生。**

4. 前三誡包含了良好教學的要素，它們共同形成了一種充分必要的條件 —如果你對你所教授的科目有興趣、瞭解它，並且可以看清學生的問題，你已經或即將成為一位好老師了；你所需要的就只是經驗了。

經驗是必需的，實際的經驗使你明白在教室中教師與學生的“教”與“學”，讓你熟悉獲取知識與技能的過程—包括學習、發現、創造、瞭解…等等許多方面。心理學家已經做過很多有關學習過程的實驗並發表了一些有趣的論點。對一位非常善於接納與理解的教師來說，這些實驗與論點具有刺激的作用；但是就我們這裡主要討論的教育方面來說，它們還沒有完善到可以對教師的教學直接有所助益，因此，教師首先必須倚賴個人的經驗與判斷。

根據近半世紀的研究與教學經驗，以及深入內省後，對於課堂教學所需，我在這裡提出一些我認為對課堂教學極為重要的學習歷程的觀點。有一件事是一再地被強調著：主動積極的學習優於被動消極、“僅僅只是接受”的填鴨式學習；愈積極主動便愈好：學習任何一件事的最佳途徑就是親自獨立地去發現其中的奧祕。

事實上，在一個理想的教學計畫中，教師像是一位心靈的“助產士” —給予學生機會自行去發現亟待學習的事物。而往往因為缺乏時間的關係，此一理想實際上很難達成，但卻可以引領我們通往正確的方向—這就好像沒有人能到達北極星，卻能藉由觀望它而找出正確方向一樣。

5. 知識(Knowledge)包括了知識性的訊息(information)和技巧訣竅(know-how)。技巧訣竅是一種技能，它是處理知識性的訊息、善用知識性的訊息以達目標的一種能力；可以說是一連串適當的心智活動，最後會讓我們的工作變得有系統。在數學上，技巧訣竅是解決問題、建構證明、批判診斷解答與證明的能力；比起純粹知識性的訊息的獲取，技能重要多了，因此，對數學教師而言，接下來的第五誡是相當重要的：不但要教授學生知識，而且要讓他們知道技巧、訣竅，學習正確的心態及有系統工作的習慣。也正因為在數學教學中技巧訣竅比知識來得重要，“如何教”就比“教什麼”更值得我們去重視了。

6. 「先猜測，再證明」—通常發現的過程也是這樣開始的。從經驗當中，你應該知道這件事，而且你應該知道數學教師擁有絕佳的機會去顯示猜測在發現過程中的地位，也因此讓學生銘記思維活動的重要性。關於後 者並不(雖然應該)廣為人知，很遺憾地，鑒於篇幅有限的關係，在此也 沒有辦法詳盡地討論。不過，我仍然希望在這一方面你別忽略了你的學生：讓他們學習去猜測。粗心大意的學生很有可能作出毫無根據的猜測。當然，我們所要教授的並非毫無根據地亂猜，而是有

憑有據、合理地猜測。合理的猜測是建立在明智地使用歸納與類推結果的基礎之上，根本上包含了在科學中扮演重要角色的合理化推理之所有過程。

7. 「數學是一個學習如何合情推理(plausible reasoning)的好學科。」這句話簡述了前述法則蘊涵之意，雖然它聽起來陌生且非常新穎；事實上，筆者是相信它的。「數學亦是學習論證推理(demonstrative reasoning)的好學科。」這句話聽起來則很熟悉—它的某些形式幾乎跟數學本身一樣古老。實際上，更真實的是：數學和論證推理是共存的，論證推理遍及於各個科學學門中，同時將它們的概念提升至充分抽象、明確的數學邏輯層次(mathematico-logical level)；在這樣的高層次之下，例如，在日常生活當中,已沒有實際論證推理的餘地了(換言之，已不適合實際論證推理)，不過(並不必要去爭辯這樣一個被廣泛接受的論點)，除了基本的東西之外，數學教師仍必須讓所有的學生知道論證推理：讓學生學習證明。

8. 技巧訣竅是數學知識中較有價值的一部分，比單單只是擁有訊息更有價值。但我們應如何傳授此項技巧訣竅呢？學生可以透過模仿與練習來學得它。當你提出一個問題的解答時，適切地強調其中的教育性的特徵(instructive features)。如果一個特徵值得仿效，那麼它就是具教育性的，也就是說，它可以用來解答眼前的問題，更可以解決其他的問題 —愈常用到，便愈具教育性質。但強調教育性特徵的方式並不只表現於誇讚學生(因為對某些學生反而會產生反效果)，更應表現在教師的行為中(如果你有表演天份的話，稍微裝一下效果會更好)。一個適切強調的特徵能將你的解答轉入“答案典型”(model solution)，藉由讓學生模仿可以解決更多問題的答案也能讓它轉變為一個令人印象深刻的形態，因而法則即是：留意現在手邊的問題，從其中找尋一些可能對於以後解題有幫助的特徵—試著去揭露潛藏在目前具體情境中的普遍形式。

9. 我希望能夠在這邊指出一些在課堂上容易學到且教師們應該要知道的祕訣。當你開始討論一個問題時，試著讓學生去猜答案。讓那些猜想或甚至敘述臆測的學生陷入進退兩難的情況：他們必須跟隨著求解的過程來看他們的猜測是否正確，且必須要專心一致。這只不過是下列法則(本身是從法則四和法則六的某些部分推敲、拼湊出來的)的一個特殊的情形而已：不要一次就洩露出所有的祕訣 —在你告訴學生之前，讓他們去猜測 —讓他們盡可能地自行去發現。

10. 有一個學生一行一行地進行一個冗長的計算，我在最後一行看到了一個錯誤，但我忍住而沒有馬上糾正他。我寧可帶著學生一行一行地檢查：「剛開始蠻不錯的，你的第一行寫對了，下一行也正確了，你做了這個和那個…。這一行真不錯，現在，你覺得這一行如何呢？」錯誤就發生在這一行，如果學生自己發現了，他便有機會學到一些東西。然而，如果我在發現錯誤後立刻就說：「這裡錯了！」學生或許會感到不愉快，而且再也聽不進去之後我所說的話了。如果我太常立刻就說：「你這裡錯了！」的話，學生很可能會恨我，也很可能開始討厭數學，那我在之前對這個學生所花費的苦心就全都白費了。盡量避免去說：「你錯了！」可能的話，改口說：「你是對的，但…」如果你這樣做的話，你非但不是偽善的而且是通人情的，法則十便隱含了你應該這樣做的說法，我們可以讓它更加地清楚：啟發問題；讓學生勇於發表，不要填鴨式地硬塞給學生。

於準老師的課程上，上述的十誡簡單明瞭但卻不容易遵循，且我們也沒能夠讓教師們可以易於遵循，例如，教師們的大學學習鮮少能幫助他們去遵循這些誡條。而且，我們在準中學教師的課程上遭遇到一些棘手的問題。我並沒有足夠的時間、空間和方法(或者勇氣)去充分地處理這類問題，然而，

有些觀點我卻不得不提出來，這些觀點被在一所北美中學教授代數、幾何、三角學(及少數更高階的科目)的老師們所關心。“一般數學(general mathematics)”或諸如此類多一般性、少數學性的學科並不是我所關切的重點。我不能忍受在我班級的參與者講出這樣的話:「準老師被數學系及教學法的課程惡劣地對待；數學系講的課我們聽來有如一塊嚼不動的牛肉，而教學法的課卻像一碗沒有肉片的淡湯。」我遇到好幾位教師表達了同樣的意見，但或多或少是覺得害臊的。這些意見的來源到底是什麼呢？每個人都知道一些例子，比如說教授代數或幾何的老師對這門學科的瞭解程度比學生所追問的還要少；如果我們所談論的講師不是教練或家政老，而是數學教師的話，這種情況就更容易發生了。但不論這類例子是何等異常和普遍的，我可不希望去討論。

有一件事發生地比起如我們所願的還要頻繁：一個能夠勝任和合乎意向的數學教師對中學數學背景瞭解地不夠深，以至於他無法滿足較好的學生的好奇心或知道他們的反應。(有一些觀念應該要,但卻沒有廣泛地被知道：例如無限小數、無理數、可除性、立體幾何的第一個證明…等等)。為何會如此？大半的準老師們不瞭解或帶著不穩的中學數學知識便離開了學校，而他們應該在何時何地再來學中學數學呢？數學教師修習一些由數學系所提供的相關進階課程，他將會有很大的困難去跟上(或通過)這些課程，因為他的中學數學知識並不充分；他再也沒辦法將這些課程與中學數學相連接。或者他會去修習一些由教育系所提供的有關教學方法的課程，這些課程基本上符合了教育系只教方法而非科目主體的原則。準老師們或許會(幾乎沒有計劃地)接受下面的觀感：教學方法與學科主體的不夠瞭解息息相關。無論如何，他對中學數學的瞭解仍然是最低限度的。

在這裡我要提出一個我覺得更甚於其他的觀點。老師一直被勸告去做很多“漂亮”的事：他該給他的學生不只是資訊而且要讓他們「知道如何做」、鼓勵他們的創意和富創意性的工作，同時讓他們熟知發現的喜悅和張力。然而，教師本身呢？他有機會在他的課程中獨立做數學研究工作嗎？或是有機會獲知他打算傳達給學生的技能嗎？答案是否定的！就我所知，並沒有任何一所大學能給予教師一個還算不錯的機會去發展他在數學方面的技巧訣竅與技能技能。

對於這樣明顯的缺點，我介紹一個補救方法：一個數學教師的『解題討論班』(a seminar in problem-solving)，這個討論班所需的知識僅僅只要有中學的水平就可以了，所討論的問題的難度也稍在中學水平之上而已。如果透過適當引導的話，這樣的討論班可能會有很好的效果。首先，參與者將會有很好的機會透徹地獲知中學的數學知識—真正的、隨時可用的知識，不單單只是記憶而是透過將其應用於有趣的問題之上。然後，參與者可以獲得一些處理中學數學的技巧訣竅、技能及解題要素的洞察力。此外，我也利用討論班讓參與者練習去解釋問題和引導答案；事實上，我也給予他們練習教學的機會，因為他們在平時課堂裡並沒有這樣足夠的機會。經由下列的方式去實施：在某些練習單元的開始，每個參與者會收到一份不同的問題(每個人一題)，打算讓他在這個單元解決，但他不能和同事們討論，不過，他可以由引導者給予些許幫助。

在此單元與下一單元之間，每個參與者都應完成、回顧、盡可能地簡化解答並留意其他的解題方式…等等。他也應該為如何在討論班中演示問題與解答詳加計劃一番。關於以上幾點，他有機會可以向引導者請教，然後在下一個練習單元中，所有的參與者組成數個討論小組；每一個討論小組盡量由四位意氣相投的成員組成，其中一位扮演老師的角色，另外三位則充當學生，按法則九及其他誡條，老師對學生演示他的問題，且試著引導他們得到解答。當獲得答案後，接著便會對演示進行一段簡短而友善的評論。然後換下一個成員擔任老師且演示他的問題；這個過程一直反覆進行到每個人都輪過

為止。有一些特別有趣的問題或特別好的演示過程稍後會再對整個討論班演示一遍並進行討論。

用討論小組的方式來進行解題相當受到歡迎，而且我覺得整個討論會相當成功。所有的參與者都是有經驗的教師，他們很多人也都感覺他們的參與給他們的班教學帶來了許多有用的點子。

淺談數學史中的二元一次方程式

林倉億老師

長安國中

黑暗大廈

二元一次方程式在數學中是十分基本且重要的概念，下面將對中國、巴比倫和印度數學史中的二元一次方程式做一簡介。由於筆者才疏學淺，資料來源又以中文為主，所以自覺這篇文章有三點不足之處：一、未考量時代背景與數學發展背景。二、未述及解析幾何中的二元一次方程式。三、未述及西方數學對二元一次方程式和二元一次聯立方程式解法的發展。此外，在收集資料的過程中，發現關於二元一次方程式的資料很少，論及二元一次聯立方程式的更少，猜測這或許與絕大多數的二元一次聯立方程式題目都可以用一元一次方程式來解決有關。

中國—《九章算術》

《九章算術》成書於漢代，集之前數學知識之大成，是中國最重要的一本算書；劉徽為其作注時，全面的證明其中的公式與解法(註一)，不但對中國後世的數學發展，甚至鄰近地區的數學發展都有深遠的影響。

《九章算術》第八章《方程》中共有十八個問題，都是關於一次聯立方程的問題，其中二元的問題有八個，三元的問題有六個，四元的問題有二個，五元的問題有一個，屬於不定方程(六個未知數五個方程)的有一個(註二)。屬於二元的是第二、四、五、六、七、九、十、十一問，其中第二問是：

> 今有上禾七秉，損實一斗，益之下禾二秉，而實一十斗；下禾八秉，益實一斗，與上禾二秉，而實一十斗；問上、下禾一秉個幾何？
> 答曰：上禾一秉實一斗五十二分斗之一十八，下禾一秉實五十二分斗之四十一
> 術曰：如方程。損之曰益，益之曰損。損實一斗者，其實過一十斗也。益實一斗者，其實不滿一十斗也。

術曰就是解法。〝如方程〞便是列出方程式，用現今之符號(上禾一秉 x 斗，下禾一秉 y 斗)列出：

$$\begin{cases}(7x-1)+2y=10\\ 2x+(8y+1)=10\end{cases}$$

〝損之曰益，益之曰損。損實一斗者，其實過一十斗也。益實一斗者，其實不滿一十斗也。〞就是指常數項的移項，原方程式變成：

$$\begin{cases}7x+2y=11 & \cdots(1)\\ 2x+8y=9 & \cdots(2)\end{cases}$$

至於接下來的算法便是利用方程術，由於方程術是在第一問(三元一次)後所提出的，所以第二問中就

沒有再寫出計算過程，下面是我用現在的符號改寫方程術的計算過程：

(2)乘以(1)的 x 項係數 7，得 $14x+56y=63\cdots(3)$
用(3)去減(1)，直到(3)之 x 項係數為 0，得 $52y=41\cdots(4)$
(1)乘以(4)的 y 項係數 52 後，再一直減去(4)，到 y 項係數為 0 止，得 $364x=490$，再除以原 x 項之係數 7(即(1) x 項之係數)，得 $52x=70\cdots(5)$
由(4)、(5)可知上禾一秉實一斗五十二分斗之一十八，下禾一秉實五十二分斗之四十一。

其實方程術相當於利用係數列出一增廣矩陣後再做運算，也就是將上述的過程寫成：

$$\begin{array}{cc} 2 & 7 \\ 8 & 2 \\ 9 & 11 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc} 14 & 7 \\ 56 & 2 \\ 63 & 11 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc} 0 & 7 \\ 52 & 2 \\ 41 & 11 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc} 0 & 364 \\ 52 & 0 \\ 41 & 490 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc} 0 & 52 \\ 52 & 0 \\ 41 & 70 \end{array}$$

由於這只是二元的問題，並不能全盤看出方程術的法則，有興趣的讀者不妨看郭書春所著《古代世界數學泰斗—劉徽》書中第 42 頁，在那清楚的演示用方程術解第一問。

《方程》章在第二問已經有了常數項的移項；第四問中不但有常數項的移項，還有未知數項的移項；而第六問中更出現了負數的情形，熟知負數發展歷史的讀者必定會明瞭此為一重大之突破；到了第十問更是出現分數係數的情形，而其解法與我們現今相同，將其化成整係數方程式後再求解。

方程術是《九章算術》最高的數學成就(註三)，劉徽亦在此基礎上創立了方程新術，使中國數學成為這一領域中的佼佼者。

《九章算術》在第七章《盈不足》中雖然不是用方程式的方式來解，但許多問題亦可劃歸於二元一次方程式的範疇，若能適當的引入課堂之中，必能啟發學生更多的興趣與共鳴。

典型的盈不足問題是共買物問題：各人所出 A，盈 a；所出 B，不足 b，求人數、物價(註四)。《九章算術》給出了一般公式：

$$\text{每人應出的錢}=\frac{Ab+aB}{a+b}$$

$$\text{物價}=\frac{Ab+aB}{A-B}$$

$$\text{人數}=\frac{a+b}{A+B}$$

《九章算術》還給出了兩盈(或兩不足)的公式，並利用這兩組公式解決了大量的一般二元一次的算術問題(含分配問題、混合分配問題等等)，因為在這類問題中，任意代入兩個數，必定是上述兩種情形之一。舉第十三問為例：

今有醇酒一斗，直錢五十；行酒一斗，直錢一十。今將錢三十，得酒二斗。問醇酒、行酒各得幾何？
答曰：醇酒二升半，行酒一斗七升半。
術曰：假令醇酒五升，行酒一斗五升，有餘一十。令之醇酒二升，行酒一斗八升，不足二。

解法意思是若買醇酒五升，行酒一斗五升，則(較三十錢)盈十錢；若買醇酒二升，行酒一斗八升，則(較三十錢)不足二錢。所以就可以利用先前的公式得：

$$醇酒升數=\frac{5\times 2+10\times 2}{10+2}=2.5\text{ 升}$$

$$行酒升數=\frac{15\times 2+10\times 18}{10+2}=17.5\text{ 升}$$

這樣的算法既直接又快速，反觀若用現在中學所教的二元一次聯立方程式來解，就解法上而言就顯得笨拙許多。至此，不禁讓我想到埃及人在解一元一次方程式時，亦是先任意假設一數再行運算，兩相比較之下，頗有異曲同工之妙！

巴比倫

巴比倫人在解決二元及三元問題時有兩種方法(註五)，第一種很類似於我們現在的代入消去法；第二種今日稱為丟番圖法(Diophantine)，但這並不是丟番圖(Diophantus,約 A.D.250)所創，而是他學習了巴比倫人的方法，這種方法特別適合於解決有一個方程式為 $x+y=s$ (s 為已知)，此時令 $x=\frac{s}{2}+w$，$y=\frac{s}{2}-w$，代入另一個方程式中便可解出 w，如便可以求得 x 與 y 了。下面舉的例子是出自於漢摩拉比王朝時代(B.C.1792~1750)的一塊泥板上，雖然是二元二次的題目，但可以看出此方法的運用：

有一長方形，將其面積加上長，減去寬得 183；長、寬之和為 27，求長、寬及面積。
解：
假設長為 x ，寬為 y ，依題意列式，

$$\begin{cases} xy+x-y=183 & \cdots(1) \\ x+y=27 & \cdots(2) \end{cases}$$

令 $y'=y-2 \Rightarrow y=y'+2$ ，代入(1)及(2)得

$$\begin{cases} xy'=210 & \cdots(3) \\ x+y'=29 & \cdots(4) \end{cases}$$

由(4)，令 $x=\frac{29}{2}+w$ ， $y'=\frac{29}{2}-w$ 代入(3)，得 $w=\frac{1}{2}$ ，

故 $x=\frac{29}{2}+\frac{1}{2}=15$ ， $y=y'-2=\frac{29}{2}-\frac{1}{2}-2=12$

在泥板上並未出現類似未知數列式的符號算式，只有敘述計算的過程，而且是六十進位制的，有興趣的讀者可參看梁宗巨著的《數學歷史典故》。讀者不難發現，丟番圖法運用時需要較高的技巧，也就是要先把其中一個方程式化成 x+y=s 的形式才可，不過不論是丟番圖法或是第一種方法，在推廣到多元一次聯立方程式的問題時就顯得十分繁雜，不如《九章算術》方程術來的簡便，但巴比倫人的方法在解決非線性的問題時便可以看出其優越性，由此可以反映出巴比倫人的泥板上有許多的非線性問題，而《九章算術》幾乎沒有非線性問題的情形。

印度

印度人在二元一次方程式方面的成就當首推阿揚巴哈一世(Aryabhata I,A.D.476~?)，他在所寫的《Aryabhatiya》中不但清楚的描述出當時印度數學的現況，更給了印度數學繼續發展的動力(註六)，關於二元一次方程式方面的成就也記載於此書中。阿揚巴哈一世他首先給出不定方程式 $ax+by=c$ 的所有整數解，其方法經傳人改進後十分類似於現今的方法(註七)，概說如下：

不妨只考慮 a ，b 互質的情形，則存在兩整數 p 、q 使得

$$ap+bq=1$$

$$ax+by=c(ap+bq)$$

$$\frac{x-cp}{b}=\frac{cq-y}{a}$$ ，令之等於 t ，t 為整數

$$x=cp+bt \text{ ， } y=cq-at$$

丟番圖也曾經討論過二元一次不定方程式的情形，不過他都只給出一組正的有理數解。至於在中國，清朝李銳的〝求強弱術〞雖只用以求 $49x+17y=A$ 的所有整數解，但其算則(algorithm)具有一般性，也就是說可以推廣到求 $ax+by=c$ 的所有整數解(註八)。

註解：

註一：參看郭書春，《古代世界數學泰斗—劉徽》
註二：參看李儼、杜石然，《中國古代數學簡史》
註三：參看郭書春，《古代世界數學泰斗—劉徽》
註四：參看郭書春，《古代世界數學泰斗—劉徽》
註五：參看 George Gheverghese Joseph，《The Crest of the Peacock—Non-European Roots of Matjematics》
註六：參看 George Gheverghese Joseph，《The Crest of the Peacock—Non-European Roots of Matjematics》
註七：Morries Kline 著，林炎全、洪萬生、楊康景松譯，《數學史—數學思想的發展》
註八：參看洪萬生，《談天三友焦循、汪萊和李銳—清代經學與算學關係試論》

參考資料：

1. 李儼、杜石然，《中國古代數學簡史》
2. 洪萬生，《談天三友焦循、汪萊和李銳—清代經學與算學關係試論》
3. 郭書春，《古代世界數學泰斗—劉徽》
4. 梁宗巨，《數學歷史典故》
5. 錢寶琮，《九章算經點校》

6. Morries Kline 著，林炎全、洪萬生、楊康景松譯，《數學史—數學思想的發展》
7. George Gheverghese Joseph，《The Crest of the Peacock—Non-European Roots of Matjematics》

新書櫥窗

書名：The Fontana History of the Mathematical Sciences: the Rainbow of Mathematics
作者：Ivor Grattan Guinness
出版社：Fontana Press, London
出版年：1997
頁數：817

洪萬生教授
台師大數學系

西方數學史的通史撰述，通常都會花很多篇幅討論希臘數學史，譬如 Morris Kline 的【數學史】（Mathematical Thought from Ancient to Modern Times，1972，請參看台書名：The Fontana History of the Mathematical Sciences: the Rainbow of Mathematics 作者：Ivor Grattan Guinness 出版社：Fontana Press, London 出版年：1997 頁數：817 台師大數學系 洪萬生教授西方數學史的通史撰述，通常都會花很多篇幅討論希臘數學史，譬如 Morris Kline 的【數學史】（Mathematical Thought from Ancient to Modern Times，1972，請參看台北九章出版社八十年代所出版的中譯本）就安排了六章，極為詳盡地說明希臘數理科學的哲學背景、成就特色與榮枯成因的分析。若以全書總共五十一章來計算占有比例，那麼，希臘數學史在該書中的份量就有 $\frac{6}{51}$ 或將近 12%之多。至於影響現代數學及其教育（包括大、中、小學）的十九世紀數學史，Kline 則提供了十七章，亦即恰好全書三分之一的篇幅。儘管就全書篇幅比重來看，十九世紀相對於古希臘差不多是三比一，但考量數學的專業化與制度化在十九世紀西方世界的顯著發展，從而形塑了今日數學的風貌，希臘數學史的比重似乎稍嫌高了一點。當然，這種主觀的認定仁智互見，有時候要看寫作者所設定的讀者對象來決定。

針對西方數學史這種論述的『慣例』，英國的數學史家 Ivor Grattan-Guinnes （IGG）的新書【數學彩虹】（The Fontana History of the Mathematical Sciences： The Rainbow of Mathematic），則反其道而行，在全書總共十七章（817 頁）之中，作 者只為希臘數學史安排了一章，亦即差不多 0.6% 的篇幅而已。針對這一『另類』，Grattan-Guinnes 的解釋是：很多西方數學史書籍花不少篇幅處理古代世界、中世紀以及文藝復興等時期，但對於奠基於它們之上的近代數學發展，卻著墨不多，尤其是十九世紀，更是常常一筆帶過，敷衍了事。在這裡，我們要把它平衡過來。在本書中，十九世紀共占有九章之多。或許在篇幅上這有一點矯枉過正，不過，這絕對不是有意對較早期數學史表示不敬，而是因為 1800 年之後的數學比較貼近現代數學家或學生 -- 他 / 她們其實是本書論述的主要設定對象。此外，由於很多其他的通史著作都涵蓋了較早時期，甚至寫得極好，我推薦有興趣的讀者去閱讀這些書。是的，正因為如此，所以本書的確相當適合大學（數學系）學生來閱讀。不過，相對於 Kline 的書來說，本書雖然比較言簡意賅，但檢視書末所附參考文獻（主要是七十年代之後的研究結果），可以看到它充分受惠於過去二十年數學史學的長足進展（以國際數學 史學報 Historia Mathematica 創刊二十週年為指標）。就『新』史學的觀點而言，它非常值得我們深入研讀。

事實上，由本書目錄來看，作者的確大大地凸顯近、現代數學的份量，尤其強調了數學與物理的結合對前者所帶來的影響。儘管如此，他將科學革命之後、微積分發明之前（1540-1660）的西歐數學

發展，統稱為『三角學的年代』，實在是頗為獨到的提法。一般來說，微積分的發明有賴解析幾何的鋪路，至於後者，則是拜代數地位的提升而得以和古典幾何結合的成果。事實上，作者也指出：代數成為數學的一個分支的主體性，乃是 1620 年代以後才出現的故事。至於前此，代數則多半為人作嫁，始終被視為一種『技術』（art）而已 -- 譬如 Girolamo Cardano 的代數著作書名就稱作『偉大的技術』（The Great Art，1545），而 Franciscus Vieta 的符號代數經典書名也稱作『解析方法引介』（Introduction to Analytic Art，1591），可見即使是當時在這一方面卓然有成的數學家，也不敢隨意誇稱『代數』的理論成分。

由於直到 1620 年之後，代數的方法才逐漸取代解題結果，而成為研究的焦點，也因而代數的地位大大地獲得提昇，其最佳旁證則是『整數』（integers）與『比』（ratios）被定位成數學實體（mathematical objects）。從 Cardano 的【偉大的技術】（1545）問世以來，代數地位的提昇，原來是依附在三角學的發展之上的。為了強化此一論點，Grattan-Guinness 還指出這段時間的主要數學家及科學家如哥白尼、Cardano、Vieta、刻卜勒、費馬以及笛卡兒，都有三角學方面的相關著作問世。誠然，算術與代數最終還是獲得自主性（autonomy）的發展，因此，在 Kline 在前述經典作品中，並未特別強調三角學的重要性。這是 Kline 與 Grattan-Guinness 兩人在處理這段歷史的著眼點不同所致。他們的著作出版時間相隔二十五年，倒是都成為了二十世紀數學史學（historiography of mathematics）的歷史見證，物換星移，耐人尋味。

正如上述，【數學彩虹】不同於其他數學通史著作的地方，更在於 Grattan-Guinness 將 幾乎三分之二的篇幅放在十九世紀之後。至於十八、十九世紀數學史的區隔，則是法國大革命，尤其是此一重大歷史事件所帶出的數學制度化與專業化（參看【數學彩虹】第 七章），使得十八、十九世紀作為西歐數學『歷史分期的區隔』，變得十分自然而正當。這一歷史現象，固然也為 Kline 所重視－在【數學史】中，他也安排了第二十六章，專門討論『1800 年代的數學』，可是，我們仔細讀來，總覺得他並沒有特別指出數學的制度化與專業化所開啟的意義，治史器識不足故也。不過，這個評論其實有一點年代誤置式的苛求，因為 Kline 的數學史論述，一直忠誠地守在傳統『思想史』（intellectual history）的進路上，至於『對比』十分強烈的 Dirk J. Struik 之【簡明數學史】（A Concise History of Mathematics）所洋溢的馬克斯史觀，充分被七十年代之後興起的『數學社會史』（social history of mathematics）所吸納，則或許是 Kline 在晚年所不曾預料得到的數學史學之主流活動。

就數學史的專門著作而言，【數學彩虹】還有一個非常獨特的風貌，那就是它對數學與物理互動關係的特別重視，譬如 Grattan-Guinness 就安排了第十章、第十四以及第十五章專門討論。在這些章節中，作者不只討論數學知識的成長，也提供了很多相關物理史的論述。其實，Grattan-Guinness 的心目中，這些可以歸類為『數學物理』的學科，或許是古希臘『嚴正科學』（exact sciences）的延伸吧！不過，似乎也正是這些數學與物理的錯綜複雜關係，使得 Grattan-Guinness 可以從容舉例說明（科學）『常態性』（normality）、『革命』（revolution）、『創新』（innovation）、『迴旋』（convolution）所指涉的知識活動，曾經並存於 Fourier 的數學物理研究之中。由此我們也可以看出，Grattan-Guinness 師承 Karl Popper 的哲學關懷。顯然基於類似的考慮，Gattan-Guinness 也對他在本書中使用諸如『學派』（school）、『風格』（style）等比較歸屬於社會學的名詞，提出十分扼要的解釋。如此說來，本書對於比較想在數學史學中尋找所謂『結構』的學者來說，應該是具有相當大吸引力的。

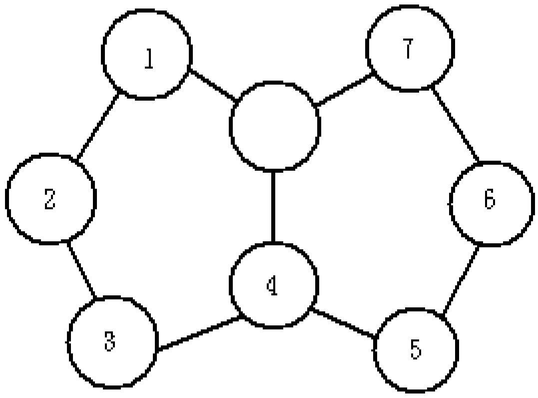
儘管如此，本書帶給我們的的最大啟示，仍然在於作者 Grattan-Guinness 總結了過去二十幾年數

學史研究結果之後，針對從遠古到本世紀初的數學知識活動，所刻劃的的萬種風情以及賦予的歷史意義吧！鑑往誠然不足以知來，不過，在尋找歷史意義的過程中，我們並不孤單！

動手玩數學

許志農老師
台師大數學系

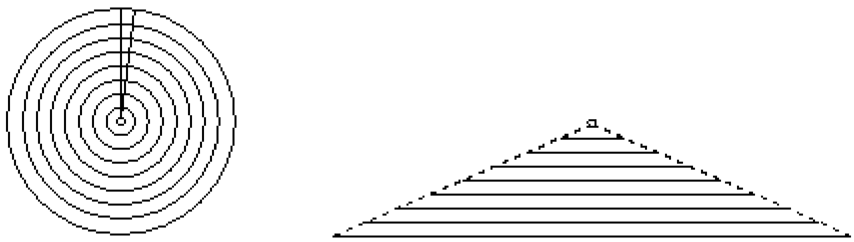
將寫有 1,2,3,4,5,6,7 的七枚硬幣擺在下圖八格中的七格，規定每次移動僅能將空白格附近的硬幣沿著路徑滑動至空白格的位置。試問：是否可以將 2 號與 4 號硬幣互換



看圖說話

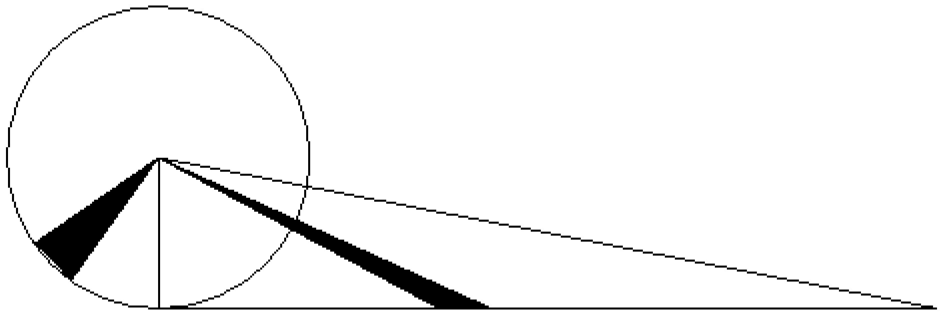
洪萬生教授
台師大數學系

1. 圓面積的阿基米德公式：$\frac{1}{2}Cr$



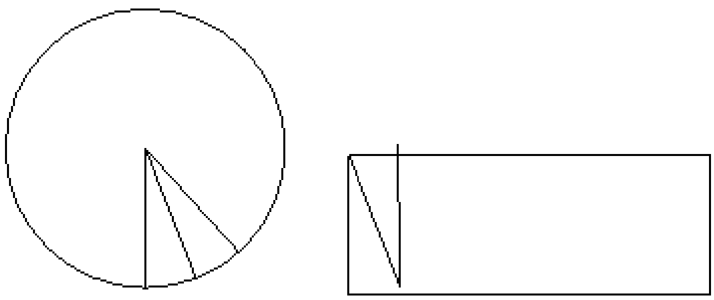
提供者：西班牙猶太數學家 Abraham bar Hiyya ha-Nasi (?-1136)
取材自 Ivor Grattan-Gùinness in《數學彩虹》

2. 圓面積的阿基米德公式：$\frac{1}{2}Cr$



提供者：刻卜勒 (Johann Kepler)
取材自 Peter Bero,"Volume Calculations in the Manner of 17th Century", History and Epistemology in Mathematics Education, IREM de Montpellier, 1993

3. 圓面積的九章公式：半周半徑相乘



提供者：中國劉徽（第三世紀）
取材自《九章算術》南宋刊本（1213 年）