# HPM通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）
助理編輯：李建勳、黃俊瑋（台灣師大數學所研究生）
編輯小組：蘇意雯（台北市立教育大學）蘇俊鴻（北一女中）
黃清揚（福和國中）葉吉海（新竹高中）
陳彥宏（成功高中）陳啟文（中山女高）
王文珮（青溪國中）黃哲男（台南女中）
英家銘（台師大數學系）謝佳叡（台師大數學系）
創刊日：1998 年 10 月 5 日　　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng


第二卷 第四期 目錄(1999 年 4 月)



## HPM 隨筆（二）：數學史與數學的教與學


洪萬生

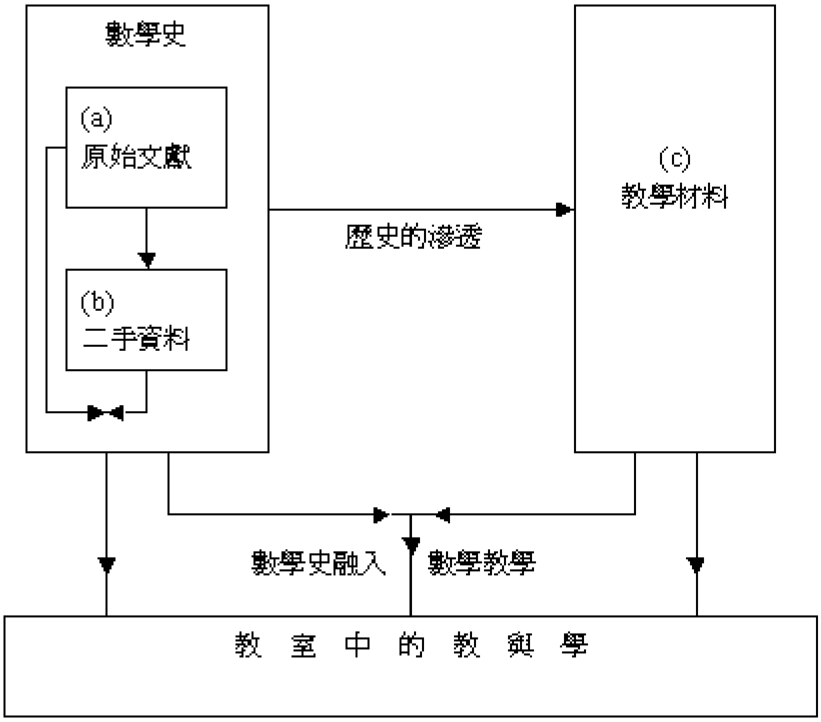
臺灣師範大學數學系教授


誠如大家所熟悉，HPM 作為國際數學教育委員會（ICMI）的一個研究群，它的組成動機完全出自對於數學的教與學之強烈關懷，因此，它的主要目的在於將數學「教好」或「學好」，而不是讓教師或學生去直接去教或學「數學史」，除非課堂中的「數學史」活動，可以切實地提升數學教育的成效。當然，如果因此導致教師或學生對「數學史」如醉如痴，那麼，她（他）們最終一定可以體會「數學史」乃是數學有機體不可分割的一部份，從而為數學的教與學賦予更深刻的意義。

無論教師與學生如何對待「數學史」，要想在以專業技術知識（technical knowlledge）講授為主的數學教室中，為它尋找一個具有正當性的「位置」，則數學史如何「融入」數學課程（包括教材）及其教學活動之中，顯然是 HPM 成立二十幾年來所面臨的最重大課題了。

為此，ICMI 特別支持贊助 HPM 編撰 ICMI Study Book 一書（預定明年出版），以便推動整合 HPM 的相關學術與教育資源，深化 HPM 在國際數學教育界中的意義與重要性。（請參考拙文「HPM 馬賽行」，見本刊第一卷第二期）現在，謹就我所參與的兩個相關的小組 WGA2 及 WGB2 之報告初稿，摘錄一些針對數學史「融入」數學教室的 know-how，願與國內數學教育專家及數學教師分享，尤盼大家集思廣益，提出具有本土自主意識的批判觀點與意見。

上述 WGA2 的主題是「數學史融入數學教室之方式的解析性綜述」（Analytical Survey of Ways of Integrating History of Mathematics in the Classroom），初稿由以色列的 Abraham Arcavi 與希臘的 Costas Tzanakis 負責，將我們小組在馬賽討論過的觀點與材料綜合成編，再分送小組成員審定。目前全篇大致底定，其論述基礎是我們共同討論出來的一個架構，底下就針對它，做一些必要的說明。




首先，請特別注意此一架構的主體是最底層的「教室中的教與學」(Classroom Teaching / Learning)，也就是它的其他支架或成分都是為這主體服務。至於(a)、(b)項所分布的支架，可以說是數學史學範圍的工作（Primary and Secondary Source Materials），而(c)項這個支架，則是我們平常所熟悉的教學材料（Didactic Source Materials），只不過它已經受到數學史的啟發而被「滲透」了 （Presentation inspired by History）。這兩個支架的實質內容以及它們的結合，一起匯入底層，共同撐起「教與學」的主體。事實上，教與學的實施結果，也一定反過來回餽(a)與(b)的數學史學支架以及(c)項教學材料支架。譬如，我們常常可以發現孩童的學習特色或困擾，對數學史家的問題意識極具啟發性（請參考拙文「康熙皇 帝學符號代數」，載本刊第二卷第一期）。另一方面，教師的實務經驗，當然也一定 會敦促教師對教材選擇及教學方式進行反省，蓋「教學相長」故也。

現在，讓我們介紹數學史「融入」數學教室的一些 know-how，供有心採用的教師 參考：

1) 歷史「花絮」(snippets)，譬如數學家的遺聞軼事、數學問題的起源以及古今方法的簡單對比等等；
2) 學生以歷史文獻為本的研究專案（project work），譬如下列專題「一次方程式：歷史的回顧」、「任意角三等分」、「何謂代數學？」以及「歐幾里得 vs. 劉徽」等等，都可以讓學生組成小組，寫出專案研究報告；
3) 數學史的原始文獻（primary sources），譬如【幾何原本】與【九章算術】的研讀與討論等等；
4) 練習題（worksheets），其設計通常圍繞著簡短的歷史選粹（historical extracts），伴隨著歷史背景的說明，再輔以了解數學知識內容的問題、所涉數學議題的討論、今昔解法或處理的比較，以及這些選粹中的題解（solving problems）或它們所引發的類似題解；
5) 可立即供 2-3 堂課使用的「歷史套裝」(historical packages)，譬如「古代數碼與數系」,「古埃及算術」,「與圓周長」,「巴比倫的二次方程解法」以及「九章算術的分數計算」等等；
6) 恰當地使用歷史上出現的謬誤（errors）、另類概念（alternative conceptions）、觀點的改變（change of perspective）、隱含假設的修訂（revision of implicit assumptions）以及直觀論證( intuitive arguments）等等；
7) 歷史上的問題，譬如古希臘三大作圖題，Goldbach 猜測，不同文明所提供的畢氏定理證明，以及

引出解析數論的質數定理等等；

8) 歷史上曾經出現的畫圖工具（mechanical instruments）；
9) 回到過去的數學實驗活動，譬如使用古代的記號、方法及論證，來學習數學；
10) 編劇本，譬如「柏拉圖 vs. 孔子」、「歐幾里得 vs. 劉徽」及「伽羅瓦的悲劇一生」等等；
11) 電影及其它視覺工具，譬如英國空中大學（Open University）所發行的數學史教學影片等等；
12) 戶外數學古蹟的教學活動；
13) WWW 網路的使用。

以上這些 know-how 的例證無法在此細說，不過，我們會陸續利用本刊做比較詳盡的介紹。我們也希望發展更多的例證，來豐富或增添上述 know-how 的內容。有志之士，盍興乎來！

# 幾何原本第Ⅶ卷定義之解讀（上）

謝佳叡助教

台灣師大數學系

*何謂質數？教科書上說：大於 1 的整數，除了 1 和本身以外再沒有其他因數*
*幾何原本說：只能被一個單元所量盡者*
*同乎？異乎？*

歐幾里得《幾何原本》稱的上是世界名著，在各國流傳之廣，影響之大，大概僅次於基督教的《聖經》。其偉大的歷史意義，在於它是以公理法建立起演繹體系的最早典範，將零碎、片段的數學知識，如同磚瓦般的建構起一棟巍峨的大廈，演繹方法扮演的是這棟大樓的鋼架，而歐幾里得就是建築師。建築師並無創造這些材料，但將現有的材料建成大廈亦是不平凡的創造，公理的選擇、定義的給出、內容的編排豈能沒有高度的智慧。當然，這些絕非個人的功勞，在歐幾里得之前已有許多數學家參與此項工作，但歷史證明只有歐幾里得的《幾何原本》得以經起時間的考驗。

數學是一門累積的學科，它的過去將永遠融會於它的現在以至未來當中。一個已被證明為真的定理，絕不會因為時代的演進或文化的遷移而變成偽的，這是數學的特性，也使的學習它的發展史更富有意義及價值。倘若如此，兩個誠然有別的敘述卻意指同一件事實時，這兩個敘述必須被要求是等價的。如果這麼樣的兩個敘述等價條件又是如此地難以察覺，是否必須具備一些內在的知識或是認知？這將是本篇主要的論述內容。然而，要將這一部偉大的著作有系統的作一個全面性的介紹，既非篇幅所容許，更非筆者能力所及。在此只抽取其中之一小部份，獻上個人的一絲心得，望能拋磚引玉，引起更深入的討論。

《幾何原本》共有 13 卷，其中第Ⅶ、Ⅷ、Ⅸ三卷寫的是數論。古希臘人談「數論」不用數，當真難言其妙處，更絕的是，定義了數卻整整三卷都不用數字。你或許會問，「數論」出現在《幾何原本》內是不是有些不符其名？古希臘人重視幾何是個不爭的事實，而幾何也是他們獲致嚴密性的不二法則，未透過演繹所得結果，雖真亦假。更重要的是，幾何給人的強烈直觀印象難以取代，以此觀之，數論出現在《幾何原本》裡是得以理解的。再者Ⅶ、Ⅷ、Ⅸ三卷的確也都以幾何形式呈現，以線段表數，以面積表數的乘積，說是幾何亦無不可。再要往前說，歐幾里得此書原名為 elements 譯為《原本》似乎更為恰當，「幾何」二字乃明朝徐光啟（562~163）與利瑪竇（1552~1610）合譯時所加，「幾何」在中文原指多少、若干之意，不啻指點、線、面、體構成的圖形之學，故《原本》內包含數論亦無不妥。

以「幾何」處理「數論」問題（如線段代表數、面積代表數的乘積）存在一個本質上的差異。「幾何」基本上是處理連續量的問題，而數論處理的卻是離散量，這有什麼差別？舉個例來說，「幾何」裡一個原長度為 2 的線段我們可將之分成四段（每段 $\frac{1}{2}$ ），每一小段當作 1 單位，則原線段就成了 4 單位長，合理；但 2 個繩結就是 2 個繩結，分都分不得。那麼，以「線」代表「數」有何好處？筆者認為至少有底下兩點：

（一） 讓數論得以接受幾何尊貴的洗禮（燙個金身），且搭上這一班專為幾何設計的嚴謹列車更有

品質保證之意味。

（二） 線段可講求相對大小（如 1：2 的線段可代表 1 和 2，也可以是 2 和 4）在討論數時可「一以貫之，一通百通」。這對數論記號（或代數符號）尚未成熟的當時，不正是一把將數論推向演繹之門的利器。 除此之外，「幾何」在此三卷的作用是極為有限的，幾乎見不到幾何方式的討論，命題和證明的敘述也幾是一般用語詞，所謂的圖示也令人覺得可有可無，幫助不大。

此三卷有關比例的問題幾乎都複製於第Ⅴ冊，但歐氏並未引用其結果，而不厭其煩的重新證明，顯是有意將數（numbers）與量（magnitudes）做一個區分，也可能歐氏認為數論可以建立在較簡單的基礎上，因此單獨加以討論。如此，之前的 22 個定義就更顯得不可或缺了。 定義 1 一開始就道出何謂「單元（或稱么元）」：

**定義 1.An unit is that by virtue of which each of the things that exist is called one.**

「單元」就是所謂的「1」，每個存在的事物都是憑藉它而存在的，它是諸類種的起源、共通部份和最小單位。希臘原文所使用的「 」指的是 monad(單子)，畢氏學派將之解釋為「limit quality(極限量)」或「limit of fewness(不能再少的少)」；亞里斯多德則將之定義為「不可再分的數量（the indivisible in the quantity）」，可見此概念遍行於當時。這種不可再割單子觀念，區分了數的不連續性，道盡了「數」「量」有別。歐氏在此用了事物（things）一詞，說明萬物起於「1」，「1」又構成數，顯然有意呼應畢氏學派的「萬物皆數也」。那麼「1」是不是數呢？我們先看定義 2：

**定義 2. 數是許多單元的合成。（A number is a multitude composed of units）**

「許多」，當然至少得 2 個以上，亞里斯多德對數的定義用的詞也是「multitude」、「combination」、「of units」、「several ones」。「數」得由多個基本單元構成，由此觀之，不但「1」這個事物憑藉存在的「單元」不能稱為數，就連現在說的有理數都不列入數的範疇。畢氏學派認為：「單元」是數和部份 （parts）的界線。可見數、單元、部份在當時被區分的很清楚，這裡的「部份」類 似現在的因數，更像未滿「1」的分數，我們且看定義 3、4：

**定義 3. 當一個數能量盡一個較大的數，則稱此小數為大數的一部份（a part）。**

**定義 4. 若不能量盡則為幾部份（parts）。**

所謂一部份就是只若干分之一，幾部份就是若干分之幾，如 1、2、3 是 6 的一部份，而 4 是 6 的幾部份。這兩個定義看似平常卻富有深意。定義 4 是依定義 3 而存在的（在原文裡，定義 4 還是用小寫連接詞起頭，絕無僅有），為何不將之合併成一個定義呢？第Ⅴ卷裡有個幾乎和定義 3 相同的定義：「當一個量能量盡一個較大的量，則稱此小量為大量的一部份。」但第Ⅴ卷裡卻找不到像定義 4 的敘述，這說明了歐氏並不將數看成普通的量。第Ⅴ卷中量討論的範圍包括可公度和不可公度，而數只需在更單 純的條件下討論。舉例來說：第Ⅴ卷可討論 1 和 $\sqrt{2}$ 的比，第Ⅶ卷就不行；又 $\sqrt{2}$ 和 $2\sqrt{2}$ 在第Ⅴ卷可以是兩個存在的量，在第Ⅶ卷裡就只能視成 1 比 2 的數來討論了（如將 $\sqrt{2}$ 看成一個單元）。

定義 5 則是定義 3 的逆敘述：

**定義 5.若大數能被小數量盡(measured)，則它為小數的倍數（multiple）。**

「部份」、「倍數」都是描述兩數之間的關係詞，相仿的定義也出現在第Ⅴ卷。全書並沒有「因數」的定義，但如果你想將「部分」視為「因數」，則必須弄清楚一些時 空背景，包含：當時的「倍數」、「一部份」、「幾部份」以及現在的「倍數」和「因數」之間的隸屬關係以及逆關係、是否含「1」與本身，掌握這些差異對古今比 較必更能體會。

定義 6，7 是定義何謂「偶數」與「奇數」，定義法十分耐人尋味：

**定義 6.偶數是能被分成兩個相等部份的數。**

**定義 7.奇數是不能被分成兩個相等部份的數，或者它和一個偶數相差一個單元。**

在幾何裡，將一個線段分成兩相等部份何難之有？(且看第一卷命題 10)。這個定義硬是說明，當它代表數時，要能等分就必須是偶數。Nicomachus 說的更貼切，一個數在分的過程沒有單元被從中拆開者就是偶數。歐氏為何不用「2 的倍數」或「可被 2 量盡的數」定義呢？為何奇數的定義要有兩段敘述？根據這樣的定義最小的奇數是多少？

定義 8，9，10 介紹「偶倍偶數」、「偶倍奇數」、「奇倍奇數」，這不僅現今少用，既使此三卷中亦不多見。《幾何原本》竟然出現重疊的定義也真令人稱奇，我們將在下一次做更詳細的探討。定義 11 可就重要了，可說是古希臘「數論」精神之所在：

**定義 11.質數是只能為一個單元所量盡者(A prime number is that which is measured by an unit alone)**

亞里斯多德說：不能被其他的「數」量盡者為質數，而「1」不是數（表示與歐氏的 定義並無矛盾）；也說質數乃數之源，所有的數皆可由質數生成。從這個角度來看質數也有元素之意，故有些書本稱之為「素數」。Nicomachus 認為所謂質數，除了被分成與自身同名的份數外別無分法，如 3 只能分成 3 份，5 只能分成 5 份，故 3 和 5 是質數，是否暗示了自身可除自身的概念便不得而知了。但 Nicomachus 認為質數必須是奇數，所以 2 不是質數，3 才是最小的質數；畢氏學派也認為 2 不算質數，而是偶數之源。然而根據《幾何原本》，2 亦滿足質數之定義（Iamblichus）。亞里斯多德也認為 2 是唯一 的偶數質數。

至於「1」算不算質數？古今的答案倒是契合。現在的說法是：為了描述定理和公式 的「方便」，我們不把 1 當質數（教師手冊第一冊），例如破壞了算數基本定理的唯 一性；而在古希臘這可是有憑有據的：「1」連數都不是，遑論質數。

《幾何原本》與現在教科書對質數定義不同之處，除了「因數」一詞外，用自己來量自己顯然是被認為是沒有意義的，那是全等所討論的範圍。

**定義 12.：互質的數，是指那些只能為「一個公度單元」所量盡的數。 (Numbers prime to one another are those which are measured by number as a common measure.)**

筆者認為這是一個值得欣賞的定義。不難看出這個定義用的方法是集合的概念，但講的不只是「兩個數」之間的關係，這與一般直接定義兩數互質的方法並不相同，由此定義來看是可以討論同時三個數以上的互質關係，例如第Ⅶ卷命題 3 就是找尋「三個 不互質」的數的最大公度數，因此「Numbers prime to one another」是否指的是兩兩互質便可看出端倪。此外這個定義將數之間對相對關係說的很清楚，當一個數被確定後，他的「單元」同時也被確定。在一個情況下「單元」是唯一的，如此互質才能被討論，這也是以「幾何」代替「數」必需被要求的。質數與互質並沒有絕對的關係，但保有的原則是相同的。現在喜歡把兩數的最大公因數為 1 視為互質，這其實與當時的定義並未完全一樣，例如：1 和 7 是否互質？再者 6，10，15 三數算不算互質？ （未完續待）

# Reader's FeedBack 【HPM 台北通訊】讀後感

卓朝賜老師
台南縣善化國中

在【HPM 台北通訊】上，有一篇文章開頭就寫道：「長久以來，有不少人都錯誤的認為，學習數學等同於瞭解定理的證明，背誦及套用公式，熟讀例題，操練習題。因此數學遂成為枯燥乏味的學問。」以上的說法，相信很多人都有同感，但是這種情形 為什麼會普遍的存在呢？因為我們的老師就是這樣教的；聯考就是這樣考的。亦即老師們是依現實考量而已，也不能算錯。

我大學念的是生物系，畢業後分發到一所鄉下學校任教，由於配課的需要，教務主任請我們寫下第二專長想要任教的科目。一般老師常寫的是童軍、輔導活動、體育，基於從小對數學就有興趣，我選擇的是數學，因而開始教數學。幾年下來，對教材算是相當是熟悉，一至六冊都能有系統的加以講解，重要、常見的例題，亦能信手寫來，不需閱書。若以段考成績來評定教學效果，成效益很好。但是坦白說，我是相當心虛的，因為如果你要我以生活化的方式來教數學，我真不知道要如何下手。這也是 這次想要來研習的主要原因。

大部分的老師基於聯考的現實考量，把焦點放在例題的演練上，是可想而知的。為了讓學生有更活潑的學習方式，將數學史融入教學之中，應該是可行的好方法。第一：以故事來呈現主題，比較有吸引力。在國文上，以成語故事來教導成語，學生對整個成語產生的背景，會有深入的認識，學習的效果自然良好。同樣的道理，如果學生能對所學單元在歷史上的演進過程，有所瞭解，將會有更深入的理解。第二：讓學生做專題研究。平常老師教，學生學的，就是那一套應付聯考的解題方式，漸漸的，學生的思考模式就被定型了。但是在歷史的不同年代中，對同一題目，不同的人會有不同的思考方法，從中我們可以好好去體會各種解題方式之美，及其演進的情形。第三：提供數學遊戲的材料。從遊戲中學習，更能引起其學習的興趣，並且可以培養找資料解決問題的能力，達到主動學習的目標。

總之，教育的目的是使學生的頭腦靈活，而不是愈僵化，老師怎麼教，學生就那麼學。唯有多元的教學與評量，才能造就活潑又有創造力的下一代。

# 數學史與我的數學教學

台師大數學系 國中數學教師研習班學員

任教二十多年，因興趣，這兩年，才得以轉任數學教學。資歷甚淺，對於數學知識更是貧乏。有機會參與數學研習、接觸到數學領域，方感受其領域之浩瀚、解題之迷人。雖說有些課程未必全懂，然對其探索，自有其一似「不歸路」之樂趣。「數學史」，也是我第一次的接觸，由此，引發我去翻閱些數學故事，盼對數學有進一步的認識。卻發覺，近五十歲的我，仍迷於故事的生動、有趣，對數學也就更有好感。此時，不自覺地對自己的教學，有一省思。

「教書」是我熱愛的工作，因為它的對象是「人」，人有個別差異，自具有挑戰性，不能依一定的模式去教，也因而帶給自己一股進，隨時調整、修正自己。雖說中間會有挫折、會有埋怨，但克服後，

相對也帶給自己成就與喜悅。尤其，「師生情感」是我最大的收穫，擁有其真摯的滿足。因此，教書二十多年，也待班擔任導師二十多年，樂在其中，沒有倦怠，不就「興趣」、「滿足」使然。反觀自己教學，又提 起學生興趣、滿足了嗎？

從來以為「教師」是一教室的經營者，著重教室氣氛的營造，教室的管理、師生的關係；教學上，講究嚴謹、效率，要求成績的表現！今日想想，自是汗顏！一昧的追求成績，其成效不就只是片面、是暫時的！自己常感嘆台灣的教育，是填鴨式的教育，然，自己的教學，何嘗不是片面的灌輸而已！對「引起動機」→「興趣」→「自動學習」之過程，努力過沒？

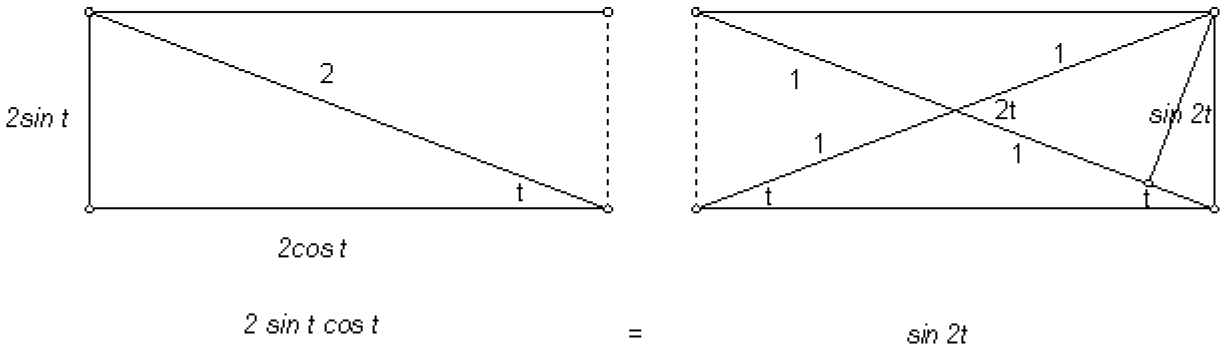
很高興經由「數學史」的課程，引發自己翻閱「數學故事」。我想：數學教學不同於數學研究。數學教學要求把抽象的東西形象化，又通過直觀的形象來身化抽象的內容。「數學故事」可藉由圖形的故事，展現抽想與形象間生動的紐帶，可激起讀者的興趣，引起學習的慾望，對學生的人格成長亦有啟發作用。誠如洪萬生教授所言，學生也可從歷史的脈絡中，比較數學家所提供的不同方法，拓寬視野，培養全方為的認知能力與思考彈性。期盼自己，也應多充實些數學知識與常識！方能運用「數學史材料」於課堂講解外，相對的，也能出些益智數學遊戲，（如：如何將一多邊形剪成一等積正方形。）給學生們做腦力激盪，增進其學習數學的興趣。

# 數說新語

一個神學上的證明： GOOD ×1/O =GOD God is infinite good.
提供者：無名氏
出處： The Mathematical Gazette, Vol. 82, N0. 495( November 1998), p. 378.

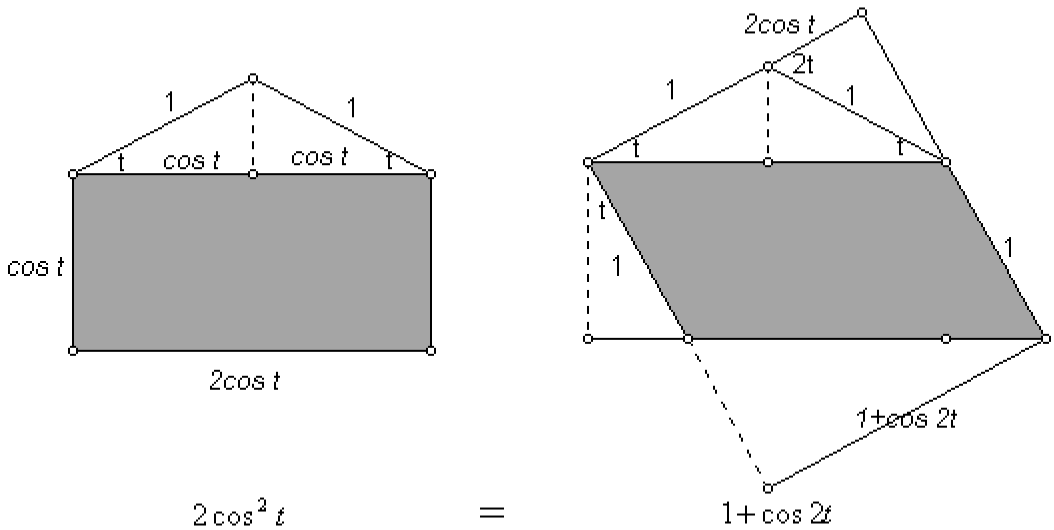
# 看圖說話

1. 倍角公式：$\sin 2t = 2\sin t \cos t$




提供者：Yihnan David Gau, 加州州立大學
出處：Mathematics Magazine, Vol. 71, No. 5, December 1998.

2. 倍角公式：$\cos^2 t = 1 + 2\cos 2t$




提供者：Yihnan David Gau, 加州州立大學
出處：Mathmatics Magazine, Vol. 71, No. 5, December 1998.