HPM通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）
助理編輯：李建勳、黃俊瑋（台灣師大數學所研究生）
編輯小組：蘇意雯（台北市立教育大學）蘇俊鴻（北一女中）
黃清揚（福和國中）葉吉海（新竹高中）
陳彥宏（成功高中）陳啟文（中山女高）
王文珮（青溪國中）黃哲男（台南女中）
英家銘（台師大數學系）謝佳叡（台師大數學系）
創刊日：1998 年 10 月 5 日　　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng

第二卷 第五期 目錄(1999 年 5 月)

『數學教師專業發展』之研究的他山之石

洪萬生

臺灣師範大學數學系教授

俗話說：『名師出高徒！』所以，數學學得好的名師，數學當然教得呱呱叫！不過，這樣的『說法』現在看來，可能只說對了一半，因為它的『脈絡』有問題，大家可能都忽略了一個事實：即使是菁英教育的環境，從教師的『自我學習』到『教導他人學習』之間，仍然經常出現極難跨過的鴻溝！癥結之所在，或許是我們始終不把教師與學生各自的智識發展（intellectual development）之間的連結，當作促進『教師專業發展』的首要任務。現在，請讓我們一起學習如何去面對吧。

本文是一篇中文摘要，也不小心地摻雜了筆者自己的一點心得，請讀者不吝指教。原文是 Thomas Cooney 所寫的 “Considering the Paradoxes, Perils, and Purposes of Conceptualizing Teacher Development”，預定提交『1999 年數學教師教育就學術研討會』(五月 10-14 日，台灣師大數學系)。教師（專業）發展的概念化是本文的重點。它主要研究『教師改變』（teacher change）-- 從遵循成規的靜態世界到奉探索與反思為圭臬的（動態）世界的個人的智識歷程。至於內容則涉及知識論(epistemology)，道德哲學(moral philosophy)以及數學教師的培育與專業發展(teacher professional development)，份量頗重，值得精讀。

本文第一節的主題是『教師改變及其道德蘊含』（The notion of teacher change and its moral implications）。作者 Cooney 首先引述杜威所主張的教育之目的－提供手段或工具讓受教者可以最佳方式控制自己的命運。為此，杜威認為受教者必須學習如何通過反思活動（reflective activity）去重新建構或組織過去的（學習）經驗，以便賦予意義，同時也強化往後（學習）經驗之主導能力。因而，教育的功利觀點過分窄化它的價值，不符合民主社會的要求。既然如此，對杜威而言，教育顯然有了道德意涵，亦即它混合了知識（knowledge，實然）與行動（conduct，應然），而且前者對後者提供了『知會』之功能。

Ball and Wilson (1996) 呼應了杜威的觀點，他們認為：在教學上，智識層面與道德層面往往是不可分割的。如果數學無關道德，何以它的教學涉及道德？其答案不僅在於知識內容本身，也與吾人如

何獲得這些知識內容有關。譬如教師有責任提供學生機會去把握那些需要論證與澄清的概念。一旦學生的論證過程導致錯謬的結論時，那麼，傾向結果導向教學（product orientation toward teaching）的教師，就會面臨是否讚許此一論證過程的道德兩難。然而，以建構主義（constructivism）為教學導向的教師，對這樣一位學生的學習，一定會賦予完全不同的評量。顯然，此一評量差異取決於信仰（belief）的不同，連帶地所依賴的證據（evidence）也就莫衷一是了。

這種信仰的取捨，當然也影響『優良教學的概念』（the notion of good teaching）。是的，如果所謂的『優良教學』是勤勉講解（telling）與諄諄善誘（caring），那麼，『結果導向教學』就成為最自然的選擇了。在這種情況下，關於教師角色的比喻，職前教師大都選擇『教練』、『園丁』以及『諧星』，因而『師資培育的道德維度』（moral dimension of teacher education）的相關問題，譬如，師資培育課程究竟如何實施？我們打算培育什麼樣的教師？當然都關聯到培育者所採取的立場了。

在本文第二節中，作者評介五篇關於『教師改變』（teacher change）的研究論文（以 Journal of Mathematics Teacher Education 刊載的論文為主），分別是 (1) Wilson and Goldenberg (1998)；(2) Grant, Hiebert and Wearne (1998)；(3) Schifter (1998)；(4) Jaworski (1998)，以及(5) Frykholm (1999)。Wilson 與 Goldenburg 針對一位已經有 21 年經驗的中學教師教學改革進行研究，結果發現成效極其有限。Grant 等人研究十二位企圖改革教學的小學教師，結論是『教師改變』的過程，正如同他（她）們對數學及其教學的信仰一樣複雜。Shifter 探索兩位中學教師對數學的瞭解與數學教學的關聯，證明教師專業發展（的成效）可以轉化進去實際教學之中。Jaworski 針對教師的教學提供了一個行動研究（action research），結果發現參與研究的教師在反思活動的循環中（cycles of reflective activity），對數學及其教學的觀點與實踐，有了很大的改變。Frykholm 考察了 63 位中學教師對 NCTM 標準（Standards）的反應，這些職前教師在三年間接受了以此為基礎的師資培育改革課程，不過，她（他）們很少注意到這些標準只是某種教育哲學的再現，對於這些標準與實際教學的脫節，也甚表困惑，因此，Frykholm 建議我們應該鼓勵職前教師檢視她（他）們的信仰與教學決策之間的矛盾。

Cooney 將上述所有這些研究結果，拿來對比 Guskey 的『教師改變』模型，可是他無法確定：對教師而言，究竟是信仰（beliefs）還是實際教學（practice）改變在先？他認為這畢竟不全是一個取決於證據的經驗問題，因為教師關於數學及其教學的信仰，顯然決定了何者可視為證據。如此一來，信仰如何被建構也因此變成了必須被正視的問題了。

於是，在本文第三節中，Cooney 針對「教師改變」的一個理論性觀點（a theoretical perspective for teacher change）提出討論。他指出：關於信仰是如何被建構的研究文獻並不多見。在本節中，作者首先說明「知曉」（knowing）與「相信」（believing）的差異，並引述 Scheffler (1965) 對信仰所下的定義。接著，介紹 Green (1971) 對信仰的建構所做的形上學分析，以便回答「信仰可以改變」是怎麼回事。在這個關聯下，Cooney 特別指出吾人信仰中都有兩個關鍵的成分，亦即懷疑（doubt）與證據（evidence）。

基於此，如果我們認為信仰的改變應該先於實際教學的改變，那麼，師資培育者理應考慮哪些經驗可以充當改變的證據。另一方面，如果認為教師信仰之改變必須由可以察覺的學生之學習表現來證明，那麼，問題就變成哪一類證據可以解釋學生的更佳表現。無論採取哪一種立場，「懷疑」這個概念都十足重要。即使在前述 Guskey 的模型中，信仰的改變都必須伴隨著對現行教學方式之懷疑。

既然吾人承認『改變』繫乎『懷疑』，那麼，考慮各種介入個人懷疑之意願的方案（scheme），就變得很有意義了。於是，Cooney 依次引述 Perry (1970, 1990)及 Belenky, Clinchy, Goldberger, and Tarule (1986) 關於個人智識發展階段（stages of intellectual development）的研究，指出進階（的可能性）來自於個人有意願以在脈絡的方式觀察情境（willingness to see situations contextually），因為『在脈絡』（contextuality）孕育懷疑，而後者正是改變的條件。

以上述 Perry 與 Belenky 等人的論述為基礎，Cooney 也引述了 Baxter Magolda (1992) 的研究成果。Baxter Magolda 研究 101 位男女大學生在大學四年間的智識發展，歸納出四個互異的思維階段：絕對性的知曉（absolute knowing），過渡性的知曉（transitional knowing），獨立性的知曉（independent knowing），以及在脈絡性的知曉（contextual knowing）。其中比較本質的變遷出現在第三個階段，亦即『獨立性的知曉』，此時的個人，不同於前兩個階段時的動輒訴諸權威，而認定知識大都是不確定的（most uncertain）。至於 Baxter Magolda 所謂的『在脈絡性的知曉』，是指所有知識所以不確定，全都是在脈絡中被定義（contextually defined）的緣故。她也發現研究對象中，只有 57%到畢業時達到第三個階段，至於達到第四階段者，則只有 12%！

基於類似的考慮，King and Kitchener (1994) 注意到個人智識發展過程中，反省的傾向極為關鍵，因此，他們發展出針對反省的思維發展模型，其中分成三個層次，即前反省的思維（pre-reflective thinking），準反省的思維（quasi-reflective thinking），以及反省的思維（reflective thinking）。這最後一個思維層次，是指知識是以在脈絡的方式被理解，而且其相關證據也不斷地被重新檢驗與評估。King and Kitchener 發現反省的思維模式最可能出現在大四學生身上，至於其它的學生，則多半以前兩個層次的思維為主。

所以，研究數學教師的信仰，絕對不能忽略上兩段的結論。為此，Cooney, Shealy, and Arvld (1998a) 特別提供了一個刻劃數學教師信仰的概念架構，其中描述了四種立場：即孤立論者（islationist），素樸的理念論者（naive idealist），素樸的關聯論者（naive connectionist），以及反省的關聯論者（reflective connectionist）。粗略地說，這四種立場都是針對教師如何處理教材內容（content）與教學方法（pedagogy），不只反映出數學教師抗拒或調適新教學法進入他（她）們的教學方案之中，同時也展現了教師對數學及其教學的反省導向。當然，擁有不同立場的數學教師，也在他（她）們對數學及其教學的信仰是否可以改變，表現了相應的特色。當然，反省的關聯論者被認為是能夠在脈絡中反省教學活動或策略的數學教師。因此，我們必須幫助教師瞭解教學活動或策略本身無所謂好壞，要緊的是他（她）們必須體認是『脈絡』決定了有效與否。

上述這些關於智識發展的方案，都指出了決定個人如何有知的多種方式中所涉及的認識論議題。誠如 Hofer and Pintrich (1997) 所說的，檢視這些論述，『將有助於我們瞭解關於學生與教師對知識與對知識的思維之信仰。從而這一資訊，也可以幫助我們更好地瞭解教室中的教學與學習過程。』因此，這些方案的確可以作為研究教師專業發展的概念性架構。

在本文第四節中，Cooney 利用五個教學上的解題（pedagogical problem-solving）之例子說明 Hofer and Pintrich 的觀點。根據他自己三十多年培育中學準教師的經驗，Cooney 發現：檢視學校數學（school mathematics），是研究教師對數學及其教學的信仰系統之最佳切入點。這是因為在此，相對於數學及

教學法而言，『懷疑』很容易出現。所以，Cooney 認為教材內容與教學方法如何（『在脈絡地』）整合（integration of content and pedagogy），可以測試準教師的反省思維能力。而這正是他設計這五個例題的主要考慮。這也就是說，這些題目被呈現的『脈絡』，完全是基於讓教師有機會重新反省他（她）們對數學及其教學的信仰之考慮，同時也鼓勵他（她）們有機會發展自己的數學教學之哲學。

根據本文的論述，準教師對數學及其教學的信仰顯然大大地『乖違』我們的改革導向之師資培育課程，其中所顯現的弔詭與險阨，也很容易察覺與辨識，尤其是把它們放置在本文所提供的理論性觀點下，更可以深入地分析。至於本文討論智識發展方案與模型的主要目的，則在於一方面，教師可以利用它們作為學童教育的基礎，而在另一方面，則是我們師資培育者，也可以利用這些模型去將教師如何對世界賦予意義加以概念化，如此一來，我們的培育工作就會擁有方向與目的。再者，正如我們希望教師以一種『科學的』方式 -- 亦即依據他（她）對學生知識背景的瞭解 – 進行教學，我們對教師的教學，也應該奠基於對他（她）們的世界之實用性詮釋。而這也正是我們目前亟需的師資培育的科學（the science of teacher education）！

幾何原本第Ⅶ卷定義之解讀（下）

謝佳叡助教
台灣師大數學系

牧羊人對著數學家說：『既然你覺得數學無所不能，就用數學將這草原上的羊全關進眼前這小小的柵欄裡。』
數學家悄悄的走進柵欄，趕走裡面僅有的羊後關上柵欄：『定義我站的地方為柵欄外，完畢！』

常將這段對話說與友人，往往換來莞爾一笑，但更多的是對數學家幾近『無賴』的評語，顯然『定義』之用仍難以被其他人所體會。無可否認的，一個好的定義有助於釐清模糊的問題，甚而能為問題闢出一條明確的解決之道。舉個例子，倘若定義『雞』為『動物界-脊索動物門-鳥綱-雞形目-雉科之禽類』，而定義『雞蛋』為『雞所生的卵』，如此，『先有雞還是先有蛋』這個一直爭論不休的問題哪還需要爭辯？當然了，不同的定義導致討論結果的差異是必然的。例如改將『雞蛋』定義為『能孵出雞的受精卵』，則相同的問題會得到截然不同的推論。

『雞』和『蛋』的存在並不會因為定義的差別而有任何的改變，因為它確有實物；但定義卻影響了判斷『雞』和『蛋』存在的先後關係等心智活動，數學正是心智活動的典型例子。從另一個角度來看，並不因為有天文學家的觀測，天體才因而運行；但如果沒有數學家的定義，任何地方都不會有正七邊形，甚至不會有質數。希臘哲學家亞里斯多德就認為『定義』告訴我們某物的意義，但並不保證其存在；蘇格拉底的對話錄也說出了數學本質上是研究不存在的東西，但數學能夠找出跟他們有關的所有真理。

古希臘人將定義區分成真實的定義（real definitions）和名義上的定義（nominal definitions），由此看來，數學處理討論的應屬於後者。而哲學家萊布尼茲（Leibniz,1646-1716）對數學所研究的定義並不十分放心，他提出：如果不能確定其是否存在而證明了與它相關的定理，其結果可能是愚蠢的。古希臘人顯然也注意到此一問題，在討論數學定義的存在與否，亞里斯多德和歐幾里得便以--是否能『作圖』--來確保它的存在，這也是希臘人把投在數學上的努力大都擺在幾何的原因之一了，因為可作圖才能讓他們的工作看來言之有物。另一方面，亞里斯多德強調，除了一些無法再被分解的原始名詞外，定義必須是用先前已經確定的術語來描述，也就是無定義名詞的需要性及定義的系統性，可惜，爾後的數學家忽略了這種需要，直至十九世紀末 Hilbert(1862-1943)才又重新思考這個問題。

《幾何原本》將數區分成質數和合數。上回我們作了些有關質數定義的探討，在數論上，質數的重要性固然是不可取代的，但相對於質數的『合數』（composite number）亦有其不容忽視的地位。且看定義 13：

定義 13.合數是能被某數所量盡者（A composite number is that which is measured by some number.）。

仔細思考，合數就是定義 8、9、10 中的『偶倍偶數（偶數量得偶數）』、『偶倍奇數（偶數量得奇數）』、『奇倍奇數（奇數量得奇數）』。上次提到這三個定義出現的頻率少之又少，整本書中只出現在第Ⅸ卷 32、33、34 三個命題，甚至『奇倍奇數』一次都未出現，這種備而不用的定義應是為了系統

的週沿性而生，因為在強調完整性的定義中，給這樣的定義一個位置是必須的（當然，沒有必要再定義『奇倍偶數』了）。僅管如此，這三個定義卻並非三分『合數』的天下，套句現代的術語，這三個定義的集合不是合數的一個『分割』，因為前兩個有著密不可分的糾纏關係，例如 24 既是偶倍偶數（6×4）也是偶倍奇數（8×3）。柏拉圖徒弟 Iamblichus（一位經常評判歐氏者）就認為不應該在如此講求嚴謹的著作中出現這種模糊現象，而應將『偶倍偶數』定義為連續取半（直到單元）皆為偶數的數，簡單的說，就是單指二的冪次方數。但由第Ⅸ卷 32、33、34 三個命題可看出歐幾里得對他的定義是無疑且執著的。暫先跳離來談一談這三個定理吧！

Ⅸ. 32 每一個由二開始連續倍增的數，僅是偶倍偶數。

Ⅸ. 33 若一個數的一半是奇數，則它僅是偶倍奇數。

Ⅸ. 34 若一個數既不是由二開始連續倍增的數，它的一半也不是奇數，那麼它既是偶倍偶數也是偶倍奇數。

Ⅸ.32 指的即是 Iamblichus 的『偶倍偶數』定義，而歐幾里得的定義範圍更為廣泛。這三個定理也提供了一個判別的技巧--『取半』，可惜，他並未進一步探究這種同時滿足兩個相異定義的數的特性。

越仔細琢磨這三個定理越覺得有趣，Ⅸ.34 的第一句是Ⅸ. 32 的逆敘述，第二句是Ⅸ. 33 的逆敘述，但它們的逆敘述結果並非將『僅是』改成『僅非』，而將『僅是』改為『不僅是』，用個易懂的例子：『只吃肉（only）』的反義是『只有不吃肉（only not）』，還是『不只吃肉（not only）』呢？

你或許會問：『奇倍奇數』不是也沒滿足Ⅸ.32、33。細細推敲，其實歐幾里得很有技巧地避開了奇倍奇數，Ⅸ.34 中那句『它的一半也不是奇數』已經暗示了他只討論『可以一半』的數。高招！

定義 14.互為合數的數，是指那些能為『某公度數』所量盡的數。

這個定義相對於定義 12 的互質，甚至只是一詞之差（an unit 改成 some number）。互為合數的重要議題在就是在找其最大公度數，這至今仍是重要課題。質數、合數、互質和互為合數幾乎是這三卷的組成架構因子，一些精彩的定理至今亦仍被使用著，如算術基本定理（Ⅸ.14）、輾轉相除法（Ⅶ.1），質數無窮多證明（Ⅸ.20）等，或許敘述方式及用語與現今不同，但精神卻一樣，甚至於可看出命題的敘述方式裡已提供了解題的策略。

《幾何原本》在數的範疇中並無『不可公度的數』，因為不互為合數者必互質，這是『數』與『量』最大的差別，關於『不可公度量』的討論可複雜多了，那就是佔了最多篇幅的第Ⅹ卷的主要內容了。

定義 15 是定義『乘（multiply）』：

定義 15.所謂一個數乘一個數，就是被乘數自身相加幾次而得出的某數，而『數次』是另一數中單元的個數。

簡單的說，乘就是累加，這與現今並無不同，但必須注意一點，這裡兩個數的意義已經不同了。第一個數（即被乘數）就是定義 2 中由許多單元合成的數，是一個實的物。但第二個數是『數次』，是第二個數中單元組成的個數，這已脫離實的物而進入抽象的意義。『一個 7』和『1 數七次』不盡相同，就像『七隻羊』與羊的個數『7』是不同意義的（前者可吃，後者連看都看不到）。其實定義 8、9、10 中已隱含了這個意思，而在此更明確的描述出來。

『一個實物』乘『一個實物』是沒有意義的，而『一數』乘『一數』依照定義 15 可以轉換成『一數』的累加而仍是一個數，所以是可存在的，也就是藉由定義 15 使得『乘』這個運算視為有效的，這是本定義最重要的意義了。

接下來的定義 16 將告訴我們，兩數相乘後所得的數也不同於一般數的定義，而產生了第三個意義。

定義 16.兩數相乘所得的數稱為面（plane），其兩邊（sides）就是相乘的兩數。

所以，如果仍將乘後的數視為定義 2 中的數，此定義就沒有意義了。這三個數的意義可如下表示：

數 × 數

（許多單位合成；邊）（單位組成次數；邊）

= 數（第一個數累加；面）

歐氏在《幾何原本》內討論圖形面積之間的關係，如同底等高之三角形、平行四邊形面積相同（第Ⅰ卷命題 36-37）；等高兩三角形面積比等於底的比（第Ⅵ卷命題 1），但歐氏卻無給出單一三角形、平行四邊行或圓形的面積公式，原因可能在於當時並未能掌握『量』的乘積，但『數』的乘積顯然是可以處理的，所以定義中的『面』並不是指面積，而是面數（plane number），甚至於也將數稱為邊，這種數與幾何間若即若離的微妙關係，使得在閱讀上必須更加留意。在命題裡，面數並未單獨出現，被討論的是面數之間的比（如Ⅷ.5），這種作法倒像是歐氏處理面積時慣用的手法，而數的乘積也不被單獨討論，但相乘後仍將得到數卻一再提起（可參閱Ⅶ.17-18）。

柏拉圖將『面數』分成平方數（square number）及矩形數（oblong number）兩類，其中平方數就是定義 18 所述。而矩形數就是非平方數，歐幾里得的繼承者（如 Nicomachus、Theon、Iamblichus）將矩形數討論得更細，分成 $n(n+1)$ 及 $n(n+m)$ 兩類，至於為何如此細分，有一說法是古希臘人喜歡研究擬形數（如多邊形數），而奇數的和（$1+3+5+\cdots$）可得到完全平方數，若是偶數的和（$2+4+6\cdots$）就是得到 $n(n+1)$，如 $2=1\times 2$，$2+4=2\times 3$，$2+4+6=3\times 4$，$\cdots$。如此的特殊當然要自成一格。

定義 17 是討論三數相乘，稱為體數（solid number），同樣指的不是立體，真正的立體出現在第 XI 卷定義 1，也就是可被分成三數相乘的數。定義 19 定義完全立方數，而定義 20、21 討論是比例式，前文說過乃複製自第Ⅴ卷，不在此贅述。只提出一點，在《幾何原本》裡最多只討論三數相乘，四個數以上相乘是不被討論的，因為找不到其幾何意義。

定義 22 是完全數的定義：

定義 22.完全數是等於自身所有部份和的數。（A perfect number is that which is equal to its own parts. ）

用現在語言來說，完全數就是等於其所有真因數和的數，如 6、28、496、8128。自畢達哥拉斯學派始，完全數就一直受到注目，被賦上的象徵意義遠超過所代表的數量值。同樣是數，它就是不凡，在滿天繁星中永遠閃亮著最耀眼的光芒，人們為它的美所吸引，為它的精妙而發出讚賞，所以在這一系列中儘管它是多麼與眾不同，也一定為它留一個位置。

即使追溯到畢氏學派，關於完全數的定理至今仍值得記載的只有第Ⅸ卷的最末一個，也是唯一的一個。這個定理簡單敘述如下：

$$\text{若}\ 1+2+4+8+\cdots+2^{n-1}\ \text{是質數，則}\ \left(1+2+4+8+\cdots+2^{n-1}\right)\times 2^{n-1}\ \text{是一個完全數。}$$

例如$1+2+4$是質數，則$\left(1+2+4\right)\times 4=28$是一個完全數。亦可更簡單表達為：若$2^{n-1}$是質數，則$2^{n-1}\left(2^{n}-1\right)$亦是質數。一般相信這是歐幾里得所提出的形式，兩千年後，Euler （1757）證明了每一個偶的完全數都具備如此形式。其中 6 這個完全數不但其『部份的和』等於本身，『部份的乘積』也等於本身，這麼樣的一個神奇的數豈能等閒視之，才有上帝用了六天創造世界的說法（詳細內容可參閱本刊第一卷第二期『數學小故事：上帝與月球-6 vs 28 完全數』)。

至今，在數論中仍留下了許多關於完全數未解的問題：偶完全數是否有無限多個？是否存在奇完全數？是否存在微盈的數（即真因數和比本身大 1）？

知識的累積是進步的要素之一，用於數學一科更是得體。歐幾里得所繼承的希臘『數論』，儘管有很多概念已經不合時宜，但數論之光芒可垂之永遠，則是不爭的事實。或許，我們不會用兩千年前的天體模型來解釋現今行星的運行，也不會用兩千年前的樂器來演奏現代流行音樂，但是質數無窮多的事實永遠不會改變，畢氏定理也永遠不會消失，永遠。

參考書目：

1. Euclid, Elementa, Heath, Thomas Little, ed. and tr., The thirteen books of Euclid's Elements
2. 歐幾里得『幾何原本』 ，藍紀正, 朱恩寬譯 ，九章出版社, 1992[民 81]
3. 數學史-數學思想的發展, Morris Kline 著,林炎全、洪萬生等譯
4. 數學對話錄, A. Renyi 著 ； 戴永久譯,凡異出版社, 民 75.

不懂數學嘛也通

彭君智老師

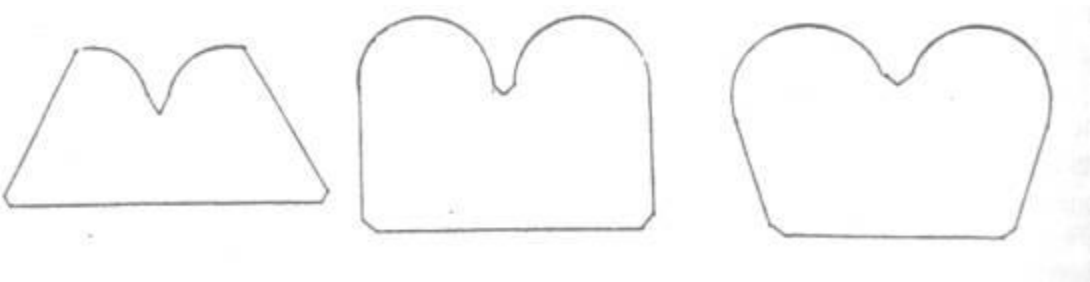
台北市景興國中

三年前，曾以一個很歐幾里德的元宵節參加中小學教師自製教學媒體展，適逢立體教材第一次編入正式課程（補充教材早見於高中數學統合上冊），今年寒假，便找幾個「義工學生」，將校園迴旋梯間閒置已久的溫室，給打扮打扮，順道給數學來點新的風貌。元宵節當天，學校還隆重地舉辦點燈儀式，用鏡面將日光引進龍眼，**燈龍點睛**，夠炫吧！

說到這三度空間的立體數學（除了立方體常被拿來做代表），從國小、國中到高中，幾乎都只在平面幾何打轉，到了大學，非相關科系的，大概也與之無緣，故透過勞作（製作燈籠）來呈現多面體，期使 3D 立體更生活化。一套立體做起來，有簡有繁，加上凹凹凸凸及色彩的變化，甚是漂亮。立體燈籠高高掛，彩色模型桌上放，好奇的學生可以低頭研究研究，而一看到數學就頭大的學生，只需抬頭欣賞就好。有興趣，咱們可以做勞作、談數學；沒興趣，只要覺得漂亮，喜歡就好，管他數不數學。數學殿堂之美，讓你不懂數學嘛也通。

當初有這點子，是逛師大夜市時，偶然在拼圖專賣店(註一)瞥到的，買了一組摸索，不小心就推廣到整套立體，當初參展前，還怕侵犯到智慧財產權，特地與專利所有人聯繫，蒙謝大哥看得起當成朋友。有興趣，不妨到其店面欣賞一下(也歡迎來景興走走)。以下簡介製作技巧：拿直尺、量角器量量圖一，相信您可以找出秘訣(註二)。

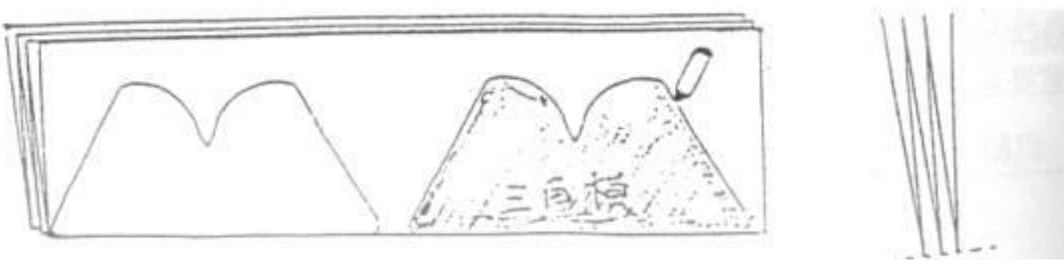
圖一

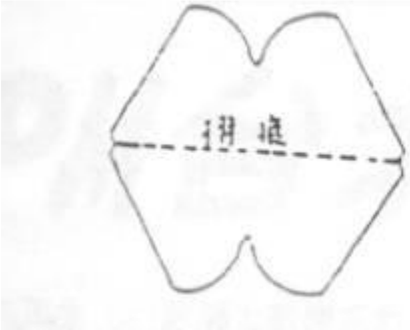


【步驟】

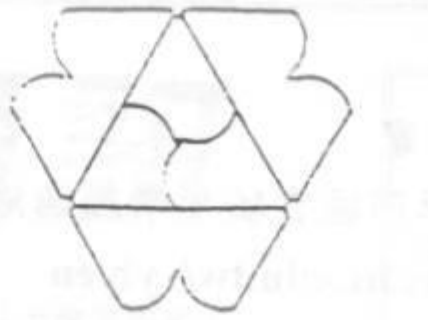
1. 用厚紙板裁出上述圖形，稱為 *n* 角模
2. 將薄的雲彩紙如扇子般摺疊(約三折，底部對齊)
3. 將 *n* 角模對好扇子底部，描輪廓，剪下

已畫好的三角件　　以三角模描輪廓　　扇底對齊(3 折)





剪下的三角件



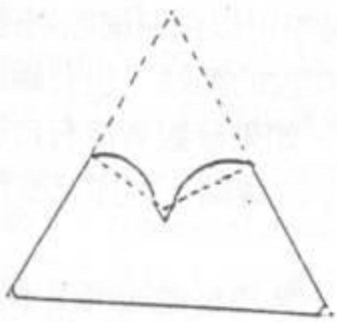
三片三角件順時針層疊成正三角形

剪下的紙片稱為 *n* 角件，將 *n* 片 *n* 角件統一順(逆)時針方向層疊，組成一正 *n* 邊形，燈籠便如立體拼圖般黏貼完成，特色即為利用 *n* 角件不同的層疊量，透過燈光後產生不同的陰影效果，最後配上中國結、流蘇，相信一定讓你愛不釋手。

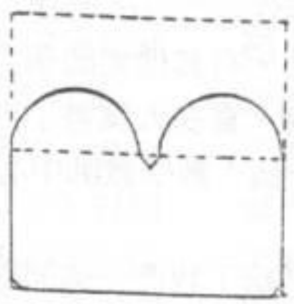
大學時常聽到一句廣播詞：快樂，就是把看不懂的數學公式，當做外星人寫的詩。每次聽到這句話，總和同學相顧而笑，然後當作我們繼續準備高「危」、「負」變考試的一針強心劑。其實，生活可以很數學，數學也可以很生活。您覺得如何？Don’t worry, just do it.

註一：雷諾瓦拼圖專賣店。紙藝燈籠造型專利：邦興實業
謝榮堯　先生　(02)23629921　北市貴陽街 2 段 216 號 1F

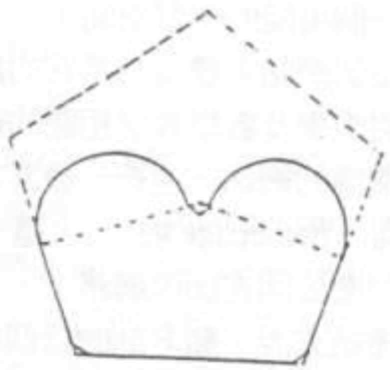
註二：



三角模



四角模



五角模

三角件組成正三角形，可拼成正四面體、正八面體、正二十面體及各面凸出角錐的星狀多面體；四角件組成正方形，可拼成正六面體及各面凸出角柱的柱狀多面體；五角件組成正五邊形，可拼成正十二面體；若將各種角件搭配(設計及製作方式稍有不同)，可拼成阿基米德半正多面體。

數說新語

(God to Kronecker)

For seven long days labored I making integers, low and then high. But now'tis day eight. It Is time to create the fractions and square roots and π.

上帝對 Kronecker 說的話：
我辛苦工作七天
製作整數持續無間
轉眼又到第八天
此時應算
創造分數、平方根和 π 的時間.

出處：The Mathematical Intelligencer, Vol. 21, No. 1, 1999.
提供者：Marion Cohen
翻譯：蘇意雯老師

網站大公開

蘇惠玉老師

西松高中

站名：老顏的家

站長：新竹科學園區實驗中學顏貽隆老師

網址：www.nehs.hc.edu.tw/~ylyen

誠如大家所知道的，由於網際網路的發達，已經改變了我們收集資料的習慣，不再只是依賴圖書館中有限的藏書，而是有更多的寶物隱藏在小小的方寸螢幕間，等著有心人士取用。

在數學與數學教學資訊的交流中，有心人想在要再廣泛的 internet 上找資料，當然就要有前輩願意花心思去架構一個網站，從本期開始，我將陸續介紹這幾位前輩及他們所構造的網路世界。首先登場的是新竹科學園區實驗中學的顏貽隆老師的「老顏的家」。

這個網站首先就給參觀者一個大開眼界的機會，讓你驚訝於動態幾何的奇妙！在 3 個小單元中，顏老師不管是自己作，或是鏈結國外的網站，都讓參觀者一窺「動態數學」的無限可能。還有一個小單元，是學生利用 gsp 作的報告，也給了參觀者另一個教學、報告與評量的思考空間。

在這個網站中，還有許多的教學資源，像是對學生的遠距教學：有微積分的網路教學、三角函數專區和奧林匹亞試題。讓學生除了在正規的教室學習外，多了一個可能的學習空間。

這個網站更豐富的是它的鏈結性，從這裡出發，幾乎可以逛遍網際網路裡，所有與數學及數學教學相關的網站。有其他老師個人架設的網站，也有鏈結到學術機構的網站，連統一發票都有，實在太厲害了！。如果參觀者沒有自己的烘焙雞（homepage 啦！），還有一個「數學教師中心」的鏈結，教你怎麼作網頁，怎麼公開在網際網路上。

總結來說，顏老師的這個網站給了我們一個開端，無論是遨遊網際網路的開端，或是動態幾何、遠距教學的想法啟發。