HPM通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）
助理編輯：李建勳、黃俊瑋（台灣師大數學所研究生）
編輯小組：蘇意雯（台北市立教育大學）蘇俊鴻（北一女中）
黃清揚（福和國中）葉吉海（新竹高中）
陳彥宏（成功高中）陳啟文（中山女高）
王文珮（青溪國中）黃哲男（台南女中）
英家銘（台師大數學系）謝佳叡（台師大數學系）
創刊日：1998 年 10 月 5 日　　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng

第二卷 第八、九期合刊 目錄(1999 年 9 月)

數學千禧年：歷史、文化與教育

洪萬生教授
台師大學數學系

在邁入另一個千禧年之際，我們決定接受 HPM 國際研究群主席 Jan van Maanen 委託，並且有幸得到國科會的贊助，將於公元 2000 年 8 月 9-14 日舉辦「數學千禧年：歷史、文化與教育」國際研討會。此一研討會的英文名稱為"History in Mathematics Education: Challenges for a new millennium" (簡稱「台北 HME」)，是時間稍早（公元 2000 年 7 月 31 日-- 8 月 6 日）在日本召開的第九屆國際數學教育會議（ICME-9）之衛星會議。

這種衛星會議的設計早有先例。譬如說吧，1988 年的「佛羅倫斯 HPM」就是布達佩斯 ICME-6 的衛星會議，同樣地，1992 年的「多倫多 HPM」也是緊接著魁北克 ICME-7 之後舉辦，至於筆者應邀參加的 1996 年葡萄牙「Braga HEM」，則是西班牙 Sevilla 的 ICME-9 的衛星會議。依筆者上次與會的經驗來看，這種研討會設計所以吸引參與者，其原因或許是她（他）們可以就近依序參加 ICME 與 HPM（或甚至於 PME）-- 當然，後者的註冊費不能收得太高！同時，也因為 ICME 的盛會動輒數千人，討論的問題包羅萬象，自是無法深入任一特定主題，所以，以「衛星會議」功能來設計的 HPM 研討會，恰好可以讓學者專家從容參與，一起來分享 HPM 研討會所洋溢的數學與文化結合之價值與意義。

「台北 HME」當然也不例外。它的目的，完全打算為關懷 HPM 議題的學者、專家及中小學教師，創造一個彼此可以對話的論壇。在這研討會期間，我們期待每一個與會者都能對數學史如何惠及數學的教學、學習與課程，提出發人深省的研究成果，並帶動廣泛且深刻的討論。

台灣這塊曾是葡萄牙水手眼中的福爾摩莎島，從第十六世紀以來，就不斷地學習適應各種東、西文化的衝突。顯然，它也從這些歷史的插曲中學到不少教訓與智慧。如今，在面向一個新的千禧年的關口，地理位置特殊的台灣成為此一研討會的東道主，為國際數學教育學界提供這樣一個難得的機會，讓大家可以團團圍坐，分享數學知識的交流經驗，讓我們倍感榮幸與壓力。

我們預估屆時會有兩、三百位左右的數學史家、數學教育家與中小學數學教師參與此一盛會。其中來自國外的與會者，約略將有一百位左右。為了讓國內學者與中小學教師充分暴露在國際學術的討論環境中，我們希望至少能催生國內學者五十篇論文發表，為台灣的 HPM 研究樹立一塊里程碑！

在這同時，我們當然期待亞洲也能建立其他的 HPM 研究據點。事實上，此次研討會籌備時，HPM 兩位前後任主席確有在亞洲鼓動風潮之考慮。於是，除了在國際委員會名單中納入日本的佐佐木力教授（東京帝大科學史研究所）、蕭文強教授（香港大學數學系）以及筆者之外，在五位主題演講者之中，與亞洲數學史、科學史研究有關的就佔了三位 -- 金永植（南韓）、林力娜 (Karine Chemla) 及古克禮（Christopher Cullen）。這種安排對我們或許不無啟發吧！幾年來台灣學術界開始「比較恰當地」面向東南亞，尋求區域合作的價值與意義。如今當我們面對台灣原住民的「民族數學」研究時，尤其感同身受。無論如何，加強多邊合作關係，實在很需要周到與細緻的規畫與作為。上週筆者到新加坡參加第九屆東亞科學史研討會 (The 9th International Conference on the History of Science in East Asia, August 23-27, 1999)，難得遇見菲律賓與越南的學者與會，實在非常高興。在當今後殖民時代，台灣的歷史遭遇與處境，有太多的經驗可以跟這些東南亞的國家交流與分享。因此，我們至盼亞洲國家學者都能積極與會，為東西方（甚至南北）的交會，寫下互惠的歷史記錄。

現在，就讓我們對「台北 HME」的一些近期資訊貼在下文，供大家參考。我們也至誠歡迎國內學者共襄盛舉。如有指教與建議也請隨時示下為荷。

「數學千禧年：歷史文化與教育」國際研討會

History in Mathematics Education: Challenges for a new millennium
August 9-14, 2000, Taipei
A Satellite Meeting of ICME-9

一 組織

國際籌備委員：Glen Van Brummelen, John Fauvel (HPM 前任主席), Gail FiztSimmons, Lucia Grugnetti, Wann-Sheng Horng (洪萬生), Victor Katz, Jan van Maanen (召集人，HPM 現任主席), Eleanor Robson, Chikara Sasaki (佐佐木 力), Siu Man Keung (蕭文強), Eduardo Veloso (HEM Braga 1996 承辦人)
國內籌備委員：國立台灣師範大學數學系全體教職員

二 研討會內容

1. 主題演講
2. 專題研究報告

S1. 亞洲與太平洋地區的數學
S2. 1800 年以前的數學教育
S3. 數學史在數學教學中的有效性：實證研究
S4. 東西方數學理念的對比與傳播
S4. “ICMI-Study Book – HPM” 的推薦與討論
S5. 科學史與科學教育（特別針對國內學者）

3. 工作坊
4. 圓桌討論
5. 小組報告
6. 展覽
7. 非標準媒介的數學史（作品）呈現

三 研討會時程（暫訂）

八月九日（星期三）下午：報到與開幕
八月十日、十一日： 全天研討會
八月十二日（星期六）：參觀旅遊
八月十三、十四日：全天研討會
八月十五日（星期二）：研討會、閉幕

四 註冊資訊

註冊費（尚未決定，但以不超過美金 150 元為度。國內學者請自行利用研究計畫吸收。中小學教師與會將尋求各種管道提供補助）
其他住宿將在「第一輪通知」中披露。

五 研討會使用語言：英文（但若人力許可，將提供中文摘要）

六 重要日期

1999 年 10 月：寄發第一輪通知
1999 年 12 月：寄發第二輪通知
2000 年 4 月 1 日：預定「提交論文」報名截止
2000 年 6 月 1 日：寄發研討會資料。論文彙編截稿。

音樂中的數學

謝佳叡

台灣師大數學系助教

對於自己所從事或研究的科目，由於是興趣的所在，研究層次也較他人更深更廣，在與其他各領域之間的關聯上，往往為凸顯其地位價值而強調其重要性，這是自然而然的事。誰也無可否認，任何一門學科是難以長期單獨發展的，有各領域的相輔相成才能讓一門學科跨出自身的囿界，而有更成熟、更多樣的發展。古希臘人對數字的崇敬影響了他們對自然與哲學的理性態度；沒有了透視、射影方法，就難以產生歐洲文藝復興時期主要的繪畫風格；邏輯學經由數學的論證方法與符號系統跨出了關鍵的一步；物理學更是數學的好伙伴，藉由數學的幫助，天文學、地理學、力學、航海學、經濟學…等也更加多采多姿。相對的，這些學科也刺激了數學的發展，將數學的理論付諸實踐，讓數學不只是一門只能在腦中、紙上運作的抽象之學。

音樂也不例外。音樂史的研究與振動學、聲學、冶金、製造等科學技術一直有著密不可分的關係，自古以來，音樂和數學更有著不解之緣。當然了，這不是說每個音樂家都是精通數學，或是每個數學家都彈得一手好鋼琴，而是這兩門學科的發展史上，有著相伴而行的階段，尤其在音律上。音樂理論的基礎包含了「律學」，而「律學」是「聲學」的一部份，它是以物理和數學理論發展而出的，因為對於各種不同的律制和各音階音高的精密性，必須進行數學的推算與研究方能確定，光靠感覺是難以達到需求和統一的。

古希臘著名的畢達哥拉斯學派其信條是「萬物皆數也」。他們發現了兩件事實，觸發了用數學來整理音樂之念：（一）彈撥繃緊的弦所發出的聲音，其音高取決於弦的長度。（二）當彈撥長短不等的弦，其長度成「簡單」整數比時(請注意，對他們來說任兩線長都會成整數比) 就會產生諧音。因此畢達哥拉斯學派把音樂聯結為數和數之的簡單關係。前一項是各音階產生的原理，這個簡單實驗可由吉他的琴格上看出來。例如彈撥吉他一弦和其半長的弦，音高恰好差八度；而一弦長所發出的音高如果為 C（即 Do），則其３／４長所發出的音為 F（即 Fa），其２／３長所發出的音為 G（即 So）。

後一項是和聲學的基礎，當部份長度成簡單整數比的弦同時發出聲音時（此指的是同材料、同緊度的弦），就會產生諧音，我們稱做和弦（chord）。一條旋律線配上和弦之後使得音樂的構造更充實且富有變化，便產生了「和聲」(harmoious)的觀念，而「和弦」及「和聲學」可以說是西方音樂發展的命脈，音樂成了「萬物皆數」的最佳實例。另一方面，數學也解釋了部分音樂的現象。例如將兩個三度音程接在一起所產生的和弦稱做「三和弦」，若三和弦是一個大三度接一個小三度，就叫做「大三和弦」（如 1-3-5）；相反的，小三度接大三度，就叫做「小三和弦」（如 6-1-3），但如將這兩個和弦做一對比，則「大三和弦」聽起來更為和諧。那是因為「大三和弦」的比為 4：5：6，較「小三和弦」的比 10：12：15 更接近「簡單」整數比。

該學派也把行星運動聯結為數與數的關係。他們相信物體在空間運動時會發出聲音。物體運動的越快所發出的聲音也越高（管樂即是利用空氣運動，以發出不同音高的聲音）。根據他們的天文學，離地球越遠的行星運行越快，發出的聲音也越高，而且都配成了諧音，此即所謂的「天體音樂」，可以猜想在他們心中，行星的運行速度及距離的遠近也存在一個美妙的關係，宇宙天體的模型理論必然

遵循數學的原則。故算術(純粹數)、幾何(固定數)、與音樂(應用數)、天文(運動數)聯結在一起，併稱為希臘的四學科。甚至到中世紀，這「四學科」仍被包括在學校課程中。

克卜勒（Kepler,1571-1630）承接了這個理論，在他了著作 Harmonices Mundi (Harmonies of the World,1619)裡，企圖找出這些星球成和諧比例的關係，在試過了體積，質量、速度，週期及公轉半徑…後，最後終於得到答案。土星的遠日點和近日點比為 4：5，是一個大三度；火星的為 2：3，是完全五度。木星的遠日點與土星的近日點恰為 1：2（八度），他甚至發現，若將這些行星關係給一個共同調性，由土星的遠日點開始算起恰為一個大調音階，近日點算起則為小調音階。克卜勒的這個發現與他不朽的三大定律息息相關。

	I	II	III	IV	V	VI	VII	I
音　階	C	D	E	F	G	A	B	C
大二度	8 : 9							
小七度		9	:		16			
大三度	4 :	5						
小六度			5	:	8			
完全四度	3	: 4						
完全五度				2	:	3		
完全五度	2	:	3					
完全四度					3	: 4		
大六度	3	:	5					
小三度						5 :	6	
大七度	8	:		15				
小二度							15 : 16	
八度音階	1	:		2				

畢達哥拉斯這個希臘哲學家兼數學家用數學方法研究音階的定義法則，找出了音樂史上影響深遠的「五度相生律」；柏拉圖的老師阿基塔斯（Archytas，400-365 B.C.）在音程方面一些理論上的創見創造了「純律大三度」的音程；數學家伊拉托斯瑞那斯（Eratosthenes 276-195 B.C.）發現了「純律小三度」音程（順道一提，此人利用了一根竹竿及一口井算出了地球圓周，與近代測量的數目誤差僅 100 公里）；天文學兼數學家托勒密（Ptolemy ？－168）構造了一種純律的「四音列」。畢氏學派成員之一尼克馬庫斯（Nichomachus 大約紀元後 100 年）把各種比分類並加以命名，認為研究比例對自然科學和音樂非常重要，並且稱 $a:\frac{a+b}{2}=\frac{2ab}{a+b}:b$ 為「音樂比例」。（請不要將這個比例想得太複雜，仔細觀察內項便能發覺妙處，代入 $a=1$ ， $b=2$ 就更能體會為此稱呼的精神。）

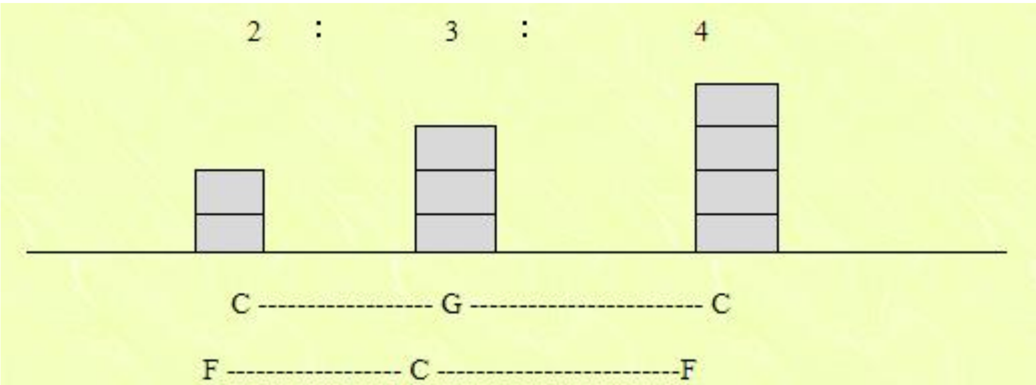
尋找幾何平均數對音階的確定有著絕對的影響，阿基塔斯利用兩個數之間的兩個比例中項去解決「倍積」問題，相同的它被用在音階的找尋上，有機會我們將更深入的探討。而「音樂比例」在音樂理論中就是試圖確定八度音階，尋找１和２之間的幾何平均數，有人認為這是導致無理數發現的因素之一。

十八世紀起，歐洲進入了十二平均律時期，所謂十二平均律就是把一組八度音，按頻率等比分為 12 個「半音」，後一音頻率為前一音的 $\sqrt[12]{2}=1.05946$ 倍（又是幾何平均數），由 A＝440.00 赫茲開始，

例如上一個半音升 $A = 440 \times 1.05946 = 466.1624$ 赫茲，以此類推。它的優點之一就是易於轉調（你可以由任一音當 Do 開始音階），這除了用數學方法解釋外別無他法，因為每個音之間都前後公比都一樣，而十二平均律對音樂的影響，尤其是近代的鍵盤樂器，更是無法估量。

之後，法國音樂理論家拉莫（P.Rameau 1683-1764）深受笛卡兒(R.Descartes）的影響以物理學作為和聲理論，完成了【和聲論】，奠定了近世和聲學基礎。振動弦（vibrating string）所引發的問題更帶來數學界無限的活力，如偏微分方程、富立葉級數、集合導論，不少１８世紀的數學家因而致力於常微分方程和偏微分方程等新興學科的研究。泰勒（B.Taylar 1685-1731）在確定振動弦的形狀問題時，首先引進二階常微分方程，導出了一根伸張的振動弦的基頻。丹尼爾·伯努利（D.Bernouli，1700-1782）和他父親約翰·伯努利（J.Bernouli，1667-1748）都曾為音樂理論做過工作。但在弦振動的諧音或高階模式方面丹尼爾超過了泰勒和他父親，對顫弦上較高泛音及和聲有更深一層的認識。尤拉（Euler 1707-1783）也做過這方面的研究，得到與丹尼爾很相似的結果。

至於在中國這邊，古籍中記載律學理論，以【管子·地員篇】為最早，該書相傳為管仲所作。書中把五音的精密作了完全合乎科學的論斷，即從數學的角度提出了「三分損益」律。把一個振動體（如琴弦）在長度上三等分，捨其一形成三分之二，稱為「三分損一」；加其一形成三分之四，稱為「三分益一」，如此繼續相生而成各律。這種方法分別得到２：３與３：４的振動體，形成了純五度和純四度的音程，這與畢達哥拉斯所創的五度相生律完全相同。



繼管仲後，【呂氏春秋·音律】把三分損益法由五律推廣到十二律，使音樂調式的範圍擴大，可在十二律上進行「旋宮轉調」，也可看出儘管在不同地區，這種純粹的知識是有其共通性的。而由各音為主音所構築出來的音階對旋律的外形與情緒有極大的影響 (因為比例有了調整)，將之分為宮、商、角、徵、羽五種調性，每一種調性都被賦予一種心情的代言。受陰陽五行之說的影響，五聲「宮、商、角、徵、羽」與「金、木、水、火、土」及方位被聯繫起來。十二律按陰陽分為陽六律和陰六律，和十二地支，星象十二宮、十二月分也相聯繫，產生了許多與命理有關的論點。

對於學生會問「學數學有什麼用？」這句話，老師常常感到困擾，總覺得無論怎麼回答總令人不滿意，也說服不了自己。西元約 500 年的斯托比亞斯（Stobaeus）記載了一個故事，一個學生在開始學「幾何原本」的第一個命題時，就問學了幾何後將得到什麼，歐幾里得對僕人說：「給他三個錢幣，因為他想在學習中獲取實利」。我們永遠無法掌握哪些知識對我們未來是有幫助的，只有廣學，才能避免「用時方恨少！」的悔恨。而當學生想要在學習中獲得實利時，大部份的狀況是學生對學習該科已失去興趣了，這時費心地解釋或引再多古人的名言是不會有太多的效用的（一個對電腦遊戲有興趣

的孩童，才不會計較玩電腦遊戲有無用處）。如果讓他們覺得數學和生活中有這麼多相關，甚至讓他們自己動手去找尋相關性，相信對教學或學習必有幫助，也希望能拋磚引玉，在不久的他日出現「OO中的數學」。

參考書目：

1. Victor J. Katz, A History of Mathematics , Harpercollins College Publishers, 1993.
2. Morris Kline, 數學史---數學思想的發展 （上）（中），林炎全等譯，九章出版社。

數學小品之一：數學，音樂，明星臉

謝佳叡整理

台灣師大數學系助教

音樂史上有個偉大的組合「三 B 瀰﹁ B 貝多芬、布拉姆斯」象徵古典音樂的頂峰
數學界裡也有個偉大的鐵三角「尤拉、高斯、黎曼」象徵數學史上的黃金時代
不同的文化卻有驚人的相似

在歐洲音樂史上，有個奇特又醒目的組合「三 B」，三位德國的作曲家，無疑是歐洲文化的驕傲，也是整個人類的驕傲。巴哈（Bach），德語原義 是「小溪」，是一個家族姓氏，在當時當地簡直成了音樂家的同義語，浩浩的兩百年中，巴哈家族先後出現了五十多位音樂家，「音樂之父」之稱的 Johann S. Bach 只是這眾多小溪中最出色的一條，巴哈的藝術不只在於創作大量的作品，以及將未確立音樂形式加以定型，他的音樂甚至被認為具有科學性（不少研究報告指出其音樂思維與數理邏輯、大腦功能，甚至遺傳基因、人工智能等領域都存在著高度的同構關係。）莫怪乎貝多芬在第一次看到他的作品時，發出這樣的驚嘆：「他不是小溪，是大海。」

面對「樂聖」貝多芬這樣的一位音樂大師，任何的言語都是多餘的，儘管對他的生活、愛情及人際關係的評論近乎「不可理喻」，就連他的學生也說：「他不像歐洲第一大音樂家，倒像是荒島上的魯濱遜！」他的手稿，好像打翻了墨水般地髒亂，但在音樂上，他的名字就是一個品質保證。如果說巴哈是這一條古典音樂巨龍的龍頭，那麼貝多芬便是那騰耀的龍身了。如此，布拉姆斯（Brahms）則毫無疑問地居於精鍊的龍尾地位，然而，他對自己嚴格的要求使他一點都不辜負這個名號。巴哈的作品幾到了信手拈來，一筆成形的地步，而貝多芬對自己的作品總是一改再改，甚至不惜從頭來過。布拉姆斯對完美的追求更勝於貝多芬，花了數十年的時間寫了無數的室內樂，最後願意發表的卻屈指可數，他的第一首交響曲更在四十歲後才寫出，因為貝多芬的九首交響曲給他一道無形的標準，他曾在信中說：「你想一想，當我還聽得見貝多芬這樣的巨人所留下的步伐時，要做這一類的創作需要多大的勇氣。」

不可思議的巧合，不禁讓人懷疑是否真是造物者刻意的安排，數學與音樂顯然不是相同的學門，卻出現驚人的相似。數學史上也誕生了三位傳奇--尤拉、高斯與黎曼，任一個在數學上的貢獻都是令人讚嘆的，如同「三 B」之於音樂界，這三位在數學發展史上的地位簡直「超凡入聖」。

尤拉（Euler）與巴哈同是十八世紀的人，兩人同是在貴族的贊助下工作（這是當時的傳統），兩人的天資都在早期就受人注目了。他們的生活與個性有如燦爛陽光般的直率，加上才氣縱橫，一坐下來就能完成定稿，絕少拖泥帶水。所以在專業領域上，他們都屬多產，所遺留的經典無論在質或量上都是無法超越的。尤拉的全集超過了七十巨冊，巴哈的全集更是難以估計（大部分已失佚。今年八月，一家唱片公司收集出版了他的作品全集，就有一百六十二張 CD 之多。）尤拉非凡的創造力、記憶力與計算能力，簡直令人不可置信，涉獵領域甚至涵蓋了物理學多方面。一個粗略估計，假設有人要收集十八世紀後七十五年間，出現所有有關數理方面的刊物，大約有三分之一是來自尤拉的手筆。還有個有趣的巧合是，這兩人在傳宗接代上也都是多產的，兩人在晚年也皆為視力減退所苦，逝世時則完全失明。

相較之下，高斯（Gauss）就顯示了它的執著，對於作品以「量少質精」為準則。他和貝多芬一樣，在未滿足自己嚴格標準之前，絕不發表手稿。這使得許多同時代的數學家，在他們花費多年的時光鑽研一個問題後，結果只換來高斯簡單一句「我早就知道了」！高斯與貝多芬都是德國人，誕生的日期相隔七年，出生地也僅僅相距二百公里，都出生於貧寒之家，也都有位嚴厲的父親。他們應該沒見過面，但他們各自在專業領域上的地位，應早讓彼此在意識上相識了，如同上天派遣兩兄弟，來提升世人的理性與心靈。貝多芬的音樂是藝術、是文學、是哲學；而高斯的論文亦是全面的，從純數到應用數學，從物理學到天文學，甚至在土地丈量上，都留下了偉大貢獻。被戴上數學第一人的桂冠，名符其實。

巧的是，黎曼（Riemann）和布拉姆斯也差七歲，小高斯幾乎五十歲。他出生時，高斯正在他的家鄉進行土地丈量，隔年，高斯完成了一篇題目為「對於彎曲面的一般性研究（Disquisitiones Generales Circa Superficies Curvas）」的論文，誰也料想不到，這位新生兒將承接這個想法，達到另一個高峰。高斯是位吝於讚揚同行的數學家，但當高斯讀到黎曼的博士論文時簡直愛不釋手，讚不絕口，他們的延續關係就好像是注定的。黎曼與布拉姆斯同是生活在紛擾的十九世紀中葉，非凡的天分與樸實的個性讓同行將之視為「大師」的繼承人，他們也責無旁貸的接受了。面對這個沈重的擔子，他們更加嚴以律己，對作品的精雕細琢更是不敢怠忽絲毫，流傳下來的作品，有如百般提煉後萃取而出的精華，滴滴香醇。

另一件耐人尋味的例子，相同的年代，數學界也有個像巴哈一樣的家族--伯努利（Bernoulli）家族。這個家族前後共出了十幾位數學家，這兩個家族是否有交流已不得而知，但他們的貢獻確有著相伴而行的部分。巴哈（J.S.Bach）首創十二平均律，這是多麼數學的音樂創新；伯努利（D.Bernoulli 及 J. Bernoulli）以數學處理振動弦問題時又是分不開音樂。Eli Maor 在他的「e—The Story of a Number」一書裡創作的一篇對話錄「當伯努利遇上巴哈（A Historic Meeting between J.S.Bach and Johann Bernoulli）」正是討論十二平均律的數學背景。一則藉此闡述數學在嚴肅的背景下也有輕鬆、應用的一面，再則也為這個有趣的巧合添加一筆，令人玩味！

註記：

音樂	數學
Johann S. Bach 1685-1750	Leonard Euler 1707-1783
Ludwig Van Beethoven 1770-1827	Carl F. Gauss 1777-1855
Johannes Brahms 1833-1897	George F. B. Riemann 1826-1866

參考書目：

1. Eli Maor , e: The Story of a Number, Princeton University Press , 1994.
2. Robert Osserman, 宇宙的詩篇 ，葉李華、李國偉譯，天下文化，1997 年初版
3. Homer Ulrich, 音樂欣賞，汪育理、康綠島譯，全音樂譜出版社，1992 年。
4. 張友珊，西方音樂家的故事，林鬱文化，1993 年初版

易經與數學--焦循的數理《易》學--

蘇俊鴻老師
新店高中

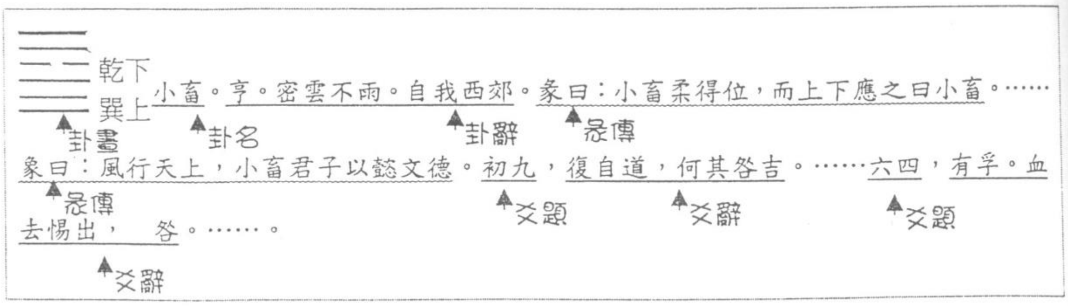
《周易》，在漢代儒家奉為圭臬後，吸引許多人探賾索隱，歷代作注解疑之書，可說是層出不窮。甚至當德國數學家萊布尼茲從拉丁文譯本《周易》讀到八卦的組成結構時，都驚訝地發現陰爻(--表 0)與陽爻(—表 1)的變化與二進位制不謀而合呢！今天向各位介紹的則是清代數學家焦循在易學上的偉大創舉—透過數學原理將《周易》加以抽象符號化，成就獨特的易學體系。在介紹此一體系之前，讓我們先對焦循有些了解。

焦循，字理堂，一字里堂，生於乾隆二十八年(1763)，卒於嘉慶二十五年(1820)。焦循學《易》是家傳，曾祖父、祖父及父親三代均未履官仕職，致力於《易》學的研治。焦循學識淵博，“經史、曆算、訓詁諸學無所不精”。其一生概略可分成二階段：(1)曆算學著述時期(1787-1801)；(2)易學著述時期(1802-1815)。可以得知早年研究曆學的經歷，對焦循治《易》有著重大的影響。他在〈易通釋自序〉寫道：

> 循既學洞淵九容之術，乃以數之比例求《易》之比例。向來所疑，漸能理解。……用是憤勉，遂成《通釋》一書

焦循因研習算學洞淵九容之術，早年學《易》的疑惑，得以解決，寫成《通釋》一書。這是焦循易學體系的開端，焦循晚年以注《易》為其首任要務，終於在 1815 年完成《易學三書》。

在說明焦循的易學體系之前，對《易經》的輪廓作個介紹。我們現在所談的《易經》通指《周易》一書，由「經」和「傳」兩部份組成。「經」就是通常所說的《易經》，它包含了卦畫、卦名、卦辭、爻題及爻辭(見下例「小畜」卦)。



所謂的卦畫，即是利用我們所說的八卦：〈乾☰〉、〈坤☷〉、〈震☳〉、〈巽☴〉、〈坎☵〉、〈離☲〉、〈艮☶〉、

〈兌☱〉。由下而上，兩卦相疊而成。每一卦畫均有一卦名，如『小畜』；卦名之後爲卦辭，如“亨。密雲不雨。自我西郊。”每一卦均由六爻組成，依序由下而上稱爲「初」、「二」、「三」、「四」、「五」、「上」。凡陽爻稱爲「九」；陰爻稱爲「六」，因此「初九」、「六四」稱爲爻題，爻題後有一段爻辭解釋它。

「傳」則是對經文的解釋和闡揚。現存的《易傳》有七種十篇，包括《彖傳・上》、《彖傳・下》、《象傳・上》、《象傳・下》、《繫辭傳・上》、《繫辭傳・下》、《文言傳》、《說卦傳》、《序卦傳》、《雜卦傳》。分別由各方面說明經文的意涵，是我們認識《易經》最重要的參考文獻。[3]

焦循認爲其學《易》所悟得有三，爲‘旁通’、‘相錯’、‘時行’，乃焦氏易學體系的三大支柱。焦循透過對經文傳文的“實測”，觀察爻卦的變動，歸納得知爻卦變動的升降之妙是出於‘旁通’；比例之義是出於‘相錯’；變化之道則是出於‘時行’。其易學系統便是由此三者推衍而生，環環相扣！[4]再來容筆者更進一步地介紹此三者的意義與內容。

焦循的易學體系，首重旁通法則，何謂‘旁通’？即卦爻間陰陽置換的規則。爻動規則與順序爲：二與五易、初與四易、三與上易。若卦經易動後與原卦相同，則旁通於原卦反對之卦(即陽爻與陰爻互換)，再如同上述規則易動。焦循更作成「旁通圖」，以便了解六十四卦兩兩相通的道理。特摘錄二例說明：

䷀乾　二之坤五(䷌同人)　四之坤初(䷈小畜)　上之坤三(䷪夬)

䷁坤　五之乾二(䷇比)　初之乾四(䷗復)　三之乾上(䷎謙)

䷌同人　四之師初(䷤家人)　上之師三(䷰革)

䷆師　二之五、五之二(䷇比)　初之同人四(䷒臨)　三之同人上(䷭升)

如上，乾(䷀)與坤(䷁)互爲反對之卦，乾卦本身經二之五、初之四、三之上的易動，因全爲陽爻。故仍爲乾卦，所以旁通於反對的坤卦。故二之坤五成同人(䷌)、四之坤初成小畜(䷈)、上之坤三成夬(䷪)。再舉同人(䷌)爲例，因二爻與五爻互易後成大有(䷍)，故毋需與師(䷆)相通。但初四、三上之互易，則仍需與師(䷆)旁通。除「旁通圖」外，焦循更舉出經、傳文的例証以為說明，以上圖為例：

> 〈同人・九五〉:「大師克相遇。」若非〈師〉與〈同人〉旁通，則〈師〉之相克、〈師〉之相遇，與〈同人〉何涉？

由上例可知，旁通的種種變化必由兩兩互為反對之卦推衍而得。焦循將反對、旁通所得之卦相較，發現其卦爻的變化，如同算學中的‘維乘’一般；以數之比例，類求《易》之比例。焦循認為“《易》之繫辭，全主旁通”，因此以旁通之理貫之，可見經傳互相發明之妙。如前所提，旁通變動之順序為二之五、初之四及上之三，焦循稱依此次序為‘當位’，若變動不依此法，則稱為‘失道’，作為判斷卦爻吉凶禍福的依據（‘當位’則吉；‘失道’則凶）。惟吉可變凶，逢凶亦可化吉，如何變通呢？這時就必須利用‘時行’的概念，這是下一段所要論述的重點。

‘時行’的闡發，是在旁通的基礎上，對卦爻的當位與失道予以消解，使卦爻按一定法則轉換，讓不通趨於通。法則為何？‘元貞利亨’也。焦循對‘元貞利亨’的定義是：二五先行為‘元’；初四應之為‘下應’，三上應之為‘上應’，上下應之則為‘亨’。如果二五得中且上下應之，則為‘元

亨’，反之，為‘利貞’。時行便是元亨利貞的反覆循環，生生不息，推至於無窮。摘錄焦循「時行圖」一例說明：

䷀乾	䷌同人	䷌同人
䷁坤	䷇比	䷆師
䷜坎	䷇比	䷇比
䷝離	䷌同人	䷍大有

以此例來說，〈乾〉二與〈坤〉五互易、〈坎〉二與〈離〉五互易，則〈乾〉、〈離〉均成〈同人〉；〈坤〉、〈坎〉成〈比〉。若繼而以〈同人〉上之〈比〉三；〈同人〉四之〈比〉初，則成兩〈既濟　〉，六爻皆定，乃‘道窮’的卦象。必須變而通之，故〈同人〉旁通於〈師〉；〈比〉旁通於〈大有〉，又可續行二五之道，變化無窮。

由上述論述可知，焦循在卦爻旁通的基礎上，所展延的時行原則，是將《易》的六十四卦當成一個整體來考量，不囿限於一卦一爻，左論右述的經傳文。依筆者的考察，深覺焦循試圖經由對整體卦爻的歸納，建立簡潔的關聯法則，期以建立符號化的易學系統。接下來，討論焦循易學中的最後一個支柱—‘相錯’。

‘相錯’法則也是指在爻位的變動規則，其規律是：初通於初；二通於二；三通於三；四通於四；五通於五；上通於上。這與先前所提的‘旁通’法則不同，它爲補‘旁通’法則不足而提出。[6]焦循認爲‘相錯’一詞的本意是指〈乾☰〉、〈坤☷〉、〈震☳〉、〈巽☴〉、〈坎☵〉、〈離☲〉、〈艮☶〉、〈兌☱〉等八卦兩兩組合成六十四卦的方法。如〈乾䷀〉、〈坤䷁〉等，它是各卦生成的本源，能變化而成萬物。摘錄焦循「八卦相錯圖」中一例，以爲說明：

䷇比	䷄需
䷍大有	䷢晉

若是將卦的六爻分成上三爻(上卦)及下三爻(下卦)，相錯的法則便是將此之上卦與彼之下卦互換；彼之上卦與此之下卦互換。如〈比〉的上三卦配上〈大有〉的下三卦即成〈需䷄〉；而〈大有〉的上三卦配上〈比〉的下三卦便是〈晉䷢〉。

焦循也由經傳文中找出許多例証支持他的說法：

〈比〉、〈大有〉相錯為〈需〉、〈晉〉，「〈大有〉，眾也。」則〈晉〉稱「眾允」；「〈比〉，樂也。」則〈需〉稱「飲食燕樂」。

論述至此可知，焦循經由對全體經傳文的‘實測’，整理歸納出‘旁通’、‘相錯’的法則，將《易》經傳所指的義理涵括。其倚仗的便是卦爻的‘比例’關係。焦循利用‘比例’原理將每對具有旁通與相錯關係的卦爻連繫起來，相互通達。而焦循的比例原理，是由數學的比例原理衍生而來。在《易圖略》卷五中，焦循便自述其悟得'比例"測《易》的因由：

乾隆丁未，余始習九九之術。既明《九章》，又得秦道古、李仁卿之書，得聞洞淵九容奧義。讀《測圓海鏡．卷首識別》一冊，而其所謂「正負寄左，如積相消」者，精微全在於此。極奇零隱曲之數，一比例之，無弗頟豁可見，因悟聖人作《易》，所倚之數，正與此同。夫九九之要，不外齊同、比例；以此之盈，補彼之朒，數之齊同如是，《易》之齊同亦如是。以此推之得此數，以彼推之亦得此數；數之比例如是，《易》之比例亦如是。說《易》者執於一卦一爻，是知五雀

之俱重，六燕之俱輕，而不知一燕一雀，交而適平；又不知兩行交易，遍乘而取之，宜乎左支右詘，莫能通其義也。余既悟得旁通之旨，又悟得比例之法，用以求經，用以求傳，而經傳之微言奧義，乃可得而窺其萬一。

焦循因能對《易經》卦爻間賦予‘比例’關係，歸納出卦爻間的旁通法則與相錯法則，又以時行變通的道理，使其易學系統得能生生不息。

日本寺廟內的算學挑戰

蘇意雯

師大數研所博士班

前言

本篇文章是從《日本數學教育學會誌》第 80 卷第 7 號（1998 年）的「教材研究專欄」裡節錄出來。作者大山 誠為群馬縣立桐生高等學校教師。他在平面幾何的授課中，除了圖形性質的解說，及定義、公準、公理、定理、練習題的講解外，並輔以桐生市內供獻的算額題原文（即漢文和圖），從中挑出題目講解其題意，誘導學生利用現代的算法解決，最後再加以檢討。本文是他的一個教學案例，以下即為筆者之摘譯。

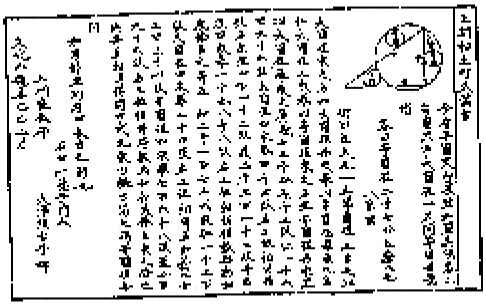
早期日本的寺廟及神社兼有教化的功能，和算家常把算題放在寺廟裡，供有心人士演練。依據《賽祠神算》（1830 年編）記載，關流（即關孝和學派）第五代傳人石田玄圭的門人大澤熊吉在天滿宮（今日桐生市天神町一丁目）提供了一則算題，同年的十月，最上流的大川榮信也在此地獻上算題。有趣的是，後者的題目與前者雷同，但其解則較前者改良。於是，展開了關流和最上流的論戰。

1. 研究焦點

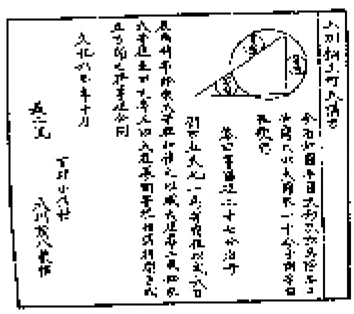
自 1962 年度最後一屆入學生後，在日本作為高中數學理論學習的主要教材—平面幾何也隨之消失。直到大約 30 年後，從 1994 年開始的新教育課程中，此部份才於數學 A 的選擇教材中再度登場。1996 年作者為新教材首度實施的一年級學生授課。利用三個月的時間指導平面幾何。由於有時間的關係限制，整個授課是以認識圖形的基本性質、一些定理的證明、以及練習為中心。在授課的最後有關例題的應用上，作者提供了上述天滿宮的算題，讓學生以學校上課所教的平面幾何教材內的算法求解。

2. 研究內容

圖（一）和圖（二）分別為關流和最上流兩派的原文，用現代的符號與術語就是如圖（三）所示，原題意可以改寫成：「大圓和一直角三角形相交如圖，內部三小圓為等圓。若已知大圓直徑為一尺，求等圓之直徑為何？」而後者只是把大圓之直徑寫成十寸，兩者為相同的問題。接下來我們利用圖(四)作出現代的解法。



図－1



図－2

大圓直徑 $=D=2R$ ，等圓直徑 $=d=2x$ ，如圖（四）所示， F 和 G 為弦之中點。 $\overline{OF}=\overline{OG}=R-2x$ ，

又由 $\overline{AE}$ 為圓 O 之直徑， $\overline{ED}=\overline{EC}=2\cdot\overline{OF}=2\left(R-2x\right)$ 。

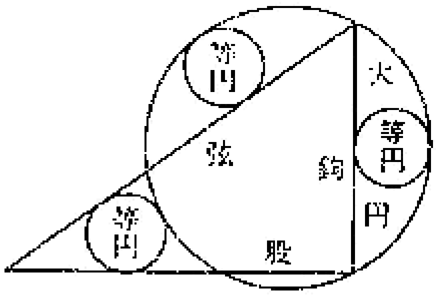


圖-3

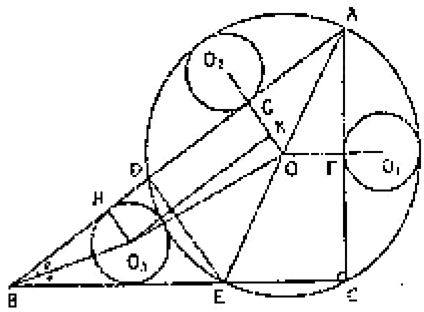


圖-4

由題意，大圓直徑 $=2R=10$（寸），所以等圓直徑 $=2x=2.7587...$（寸）
因此兩派的答案，前者的「2 寸 7 分 5 厘 8 毛 8 糸弱」和後者的「2 寸 7 分有奇」都是正確的。

大圓直徑 $=D=2R$ ，等圓直徑 $=d=2x$ ，如圖（四）所示， F 和 G 為弦之中點。

$\overline{OF}=\overline{OG}=R-2x$ ，又由 $\overline{AE}$ 為圓 O 之直徑， $\overline{ED}=\overline{EC}=2\cdot\overline{OF}=2\left(R-2x\right)$ 。

在 ΔAOF 中，由於 $\angle AFO=90^\circ$ ，因此 $\overline{AF}=\sqrt{R^2-\left(R-2x\right)^2}$

$\therefore \overline{AD}=\overline{AC}=2\cdot\overline{AF}=2\sqrt{R^2-\left(R-2x\right)^2}$ 。

設 $\angle B=2\theta$，則 $\angle A=90^\circ-2\theta$ ，由於 $\overline{AO}$ 為 $\angle A$ 的分角線，

$\angle OAF=\angle EAC=45^\circ-\theta$ ， $\dfrac{\overline{OF}}{\overline{AF}}=\tan\angle OAF=\tan\left(45^\circ-\theta\right)$ ，

$\therefore \dfrac{R-2x}{\sqrt{R^2-\left(R-2x\right)^2}}=\dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$ ， $\tan\theta=\dfrac{\sqrt{R^2-\left(R-2x\right)^2}-\left(R-2x\right)}{\sqrt{R^2-\left(R-2x\right)^2}+\left(R-2x\right)}$ 。

在 ΔBDE 中， $\angle BDE=90^\circ$ ， $\dfrac{\overline{DE}}{\overline{BD}}=\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ ，

$$\therefore \overline{BD}=\frac{\left(\dfrac{1}{\tan\theta}-\tan\theta\right)\overline{DE}}{2}=\frac{4\left(R-2x\right)^2\sqrt{R^2-\left(R-2x\right)^2}}{R^2-2\left(R-2x\right)^2}\text{ 。}$$

$\overline{AB}=\overline{AD}+\overline{DB}$ 代入， $\overline{AB}=2\sqrt{R^2-\left(R-2x\right)^2}+\dfrac{4\left(R-2x\right)\sqrt{R^2-\left(R-2x\right)^2}}{R^2-2\left(R-2x\right)^2}$ ，

$$\therefore \overline{AB}=\frac{2R^2\sqrt{R^2-\left(R-2x\right)^2}}{R^2-2\left(R-2x\right)^2}\ \ldots(8)$$

$KGHO_3$ 為長方形，$\overline{GH}=\overline{KO_3}=\sqrt{\overline{OO_3}^2-\overline{OK}^2}=\sqrt{2\left[R^2-\left(R-2x\right)^2\right]}=\sqrt{2}\,\overline{AF}$ 。

在 ΔBHO_3 中，$\overline{HO_3}=x$ ，由 $\overline{HO_3}=\overline{BH}\tan\theta$ ，

$$\overline{BH}=\frac{x}{\tan\theta}=\frac{\sqrt{R^2-\left(R-2x\right)^2}+\left(R-2x\right)}{\sqrt{R^2-2\left(R-2x\right)^2}-\left(R-2x\right)}x=\frac{R^2+2\left(R-2x\right)\sqrt{R^2-\left(R-2x\right)^2}}{R^2-2\left(R-2x\right)^2}x$$ 。

$\overline{AB}=\overline{AG}+\overline{GH}+\overline{HB}$ 代入，

$$\overline{AB}=\sqrt{R^2-\left(R-2x\right)^2}+\sqrt{2\left[R^2-\left(R-2x\right)^2\right]}+\frac{R^2+2\left(R-2x\right)\sqrt{R^2-\left(R-2x\right)^2}}{R^2-2\left(R-2x\right)^2}x\ \ldots(9)$$

由(8)和(9)，

$$\frac{2R^2\sqrt{R^2-\left(R-2x\right)^2}}{R^2-2\left(R-2x\right)^2}=\sqrt{R^2-\left(R-2x\right)^2}+\sqrt{2\left[R^2-\left(R-2x\right)^2\right]}+\frac{R^2+2\left(R-2x\right)\sqrt{R^2-\left(R-2x\right)^2}}{R^2-2\left(R-2x\right)^2}x$$

經過整理後，可得

$$\left[\left(12+8\sqrt{2}\right)x^2-\left(10+8\sqrt{2}\right)Rx+\left(3+\sqrt{2}\right)R^2\right]\times\sqrt{R^2-\left(R-2x\right)^2}=R^2x$$

兩邊平方整理後可得

$$\begin{aligned}&\left(1088+768\sqrt{2}\right)x^5-\left(3072+2176\sqrt{2}\right)Rx^4+\left(3312+2336\sqrt{2}\right)R^2x^3-\left(1696+1200\sqrt{2}\right)R^3x^2+\\&\left(413+296\sqrt{2}\right)R^4x-\left(44+24\sqrt{2}\right)R^5=0\end{aligned}\ \ldots(10)$$

在這裡，$\frac{x}{R}=t$ ，又 $0<3x<R$ ，因此 $0<t<\frac{1}{3}\ \ldots(11)$

把(10)用 t 表示可得

$$\begin{aligned}&\left(1088+768\sqrt{2}\right)t^5-\left(3072+2176\sqrt{2}\right)t^4+\left(3312+2336\sqrt{2}\right)t^3-\left(1696+1200\sqrt{2}\right)t^2+\\&\left(413+296\sqrt{2}\right)t-\left(44+24\sqrt{2}\right)=0\end{aligned}\ \ldots(12)$$

將(12)式的左方因式分解，可得到下列兩個方程式：

$8t^2-8\sqrt{2}t+9-4\sqrt{2}=0\ \ldots(13)$

$8t^3-8\sqrt{2}t^2+5t-\left(12-8\sqrt{2}\right)=0\ \ldots(14)$

解(13)式得 $t=\frac{\left(2\sqrt{2}\pm\sqrt{8\sqrt{2}-10}\right)}{4}$ ，但由於 $t>\frac{1}{3}$ ，故不合。

因此，我們解(14)，設 $f\left(t\right)=8t^3-8\sqrt{2}t^2+5t-\left(12-8\sqrt{2}\right)$

對 t 微分可得 $f'(t)=24t^2-16\sqrt{2}t+5$，當 $f'(t)=0$ 時，

$t=\frac{\sqrt{2}}{4}$，$\frac{5\sqrt{2}}{12}$。當 $t=\frac{\sqrt{2}}{4}$ 時，有極大值 $\frac{\left(17\sqrt{2}-24\right)}{2}(>0)$

當 $t=\frac{5\sqrt{2}}{12}$，有極小值 $\frac{\left(457\sqrt{2}-648\right)}{54}(<0)$。

另外，$f(\frac{1}{3})=\frac{\left(192\sqrt{2}-271\right)}{27}=0.01...(>0)$。

因此，在 $0<t$ 時，函數 $f(t)$ 的增減可由下表所示：

t	0	…	$\frac{1}{3}$	…	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	…	$\frac{5\sqrt{2}}{12}$	…
f	+	+	+	+	0	−	0	+
f'	−	↗	+	↗	+極大	↘	−極小	↗

從上表我們可得知，方程式（14）的實數解有一個在 $0<t<\frac{1}{3}$，而有兩個存在於 $\frac{\sqrt{2}}{4}<t$。因此滿足方程式（11）的 t 只有一個。接著我們利用勘根定理找出 t 的近似值，$f(0.27587)=-3.83\times10^{-6}<0$，$f(0.27588)=2.01\times10^{-6}>0$。因此，我們可以得到 t 值為 $t=0.27587...$

$\therefore = Rt = R\times0.27587...$
由題意，大圓直徑 $=2R=10$（寸），所以等圓直徑 $=2x=2.7587...$（寸）
因此兩派的答案，前者的「2 寸 7 分 5 厘 8 毛 8 糸弱」和後者的「2 寸 7 分有奇」都是正確的。

3. 以算題作為教材

因為在算題中，以漢文所表達圖形的問題很多，因此造成現代的數學老師敬而遠之。作者認為若能蒐集現存的算題，在授課中穿插與學生參考，相信對數學的學習會有所幫助。

後記

節錄本文之主要目的，是覺得他山之石，可以攻錯。今日民族數學（ethnomathematics）逐漸受到各國的重視。中國的古算書例如《九章算術》，也就是一本很好的數學補充教材。中國數學家劉鈍在其所著《大哉言數》中提到「要真正了解中國的傳統數學，首先必須撇開西方數學的先入之見，直接依據目前我們所能掌握的我國數學原始資料，設法分析與復原我國古時所用的思維方式與方法，才有可能認識它的真實面目。」這些話確實相當深入。

與古希臘人只接受演繹的邏輯推理不同，中國古代數學家不拘一格地採用各種形式的推理方法。中國古代數學是一種從實際問題出發，經過分析提高而概括出一般原理、原則和方法，以求最終解決一大類問題的體系。若我們說古希臘的數學家以發現幾何學定理為樂事的話，那麼中算家則以構造精緻的算法為己任。通過構造性的手段把實際問題化歸為一類計算模型，然後用一套機械化的算法求出具體的數值解來，此為中國古代數學最為醒目的一個標誌，因此前人把數學稱為「算學」。若教師於授課中也能補充我國古算家的一些解法，相信將能對學生有所裨益。

參考文獻：

大山 誠“桐生市天滿宮 算額題 ”，日本數學教育學會誌第 80 卷第 7 號（1998 年）pp.20~23。
劉鈍《大哉言數》，遼寧：遼寧教育出版社，1997。

網站大公開—教育資訊站數學網

站名：教育資訊站數學網
站長：列志佳
網址：http://www.edp.ust.hk/math

這個網站，看到網址後面的 hk，就應該知道是個香港的網站。這是香港科技大學在 1998 年時，在優質教育基金的贊助下所設立的一個數學教育網。其設立的目的，除了常見的那一些以外，還有一個更偉大的目標：體現數學之美。在這個網站中，這個目的實現了多少，很難評估；不過，在資料收集與呈現方面，卻大大地讓人滿意。

它的主頁即是一個搜尋引擎，只要鍵入一個關鍵字，就可以找到相關的資料。更好的是，不只人物而已，還有書籍、期刊等等的搜尋。這個網站還包括另一個網頁，數學史。其中有許多國內網站所沒有的功能與資料。包括年表，只要輸入所需年代或是國家，就可以得到數學史發展的大事紀。更好玩與有用的是，還有語錄集喔！可以選個美美的背景，找個有興趣的數學家，就可以知道他/她的知名語句（用來唬唬學生很有用的！）。這個網頁中還有各種數學符號的資料可以查詢喔！

這個網站中另一個讓人嘆為觀止的是「相關網址」這個網頁。這裡面收錄了相當完整的「相關網址」，真的是只要想得到的相關網址，都有得鏈結。包括數學哲學、數學美、數學課程、議題、教學軟體等等學科相關資源，還有許多的鏈結，真是應有盡有，包含學術機構、出版社、博物館、期刊出版社等等。

在這個網站中，你可以找到許多在國內網站中沒辦法找到的資料，更好的是，還是中文的（繁體字喔），在家裡上到這個網站的速度也還蠻快的，推薦你一定要上去逛逛，再帶一點收穫回家。

新書櫥窗—教育資訊站數學網

洪萬生教授輯
台師大數學系

◎【李學數說數學故事】 李信明 著
台北：九章出版社 1998 年 4 月第一版
總共 iii + 356 頁 定價新台幣 300 元 ISBN 957-603-155-9
劃撥帳號：1053467-6 九章出版社
email: ccmp@tptsl.seed.net.tw

本書是數學「佈道者」李信明教授的近作。他對數學研究極為狂熱，但講起數學卻十分溫柔。無怪乎讀他的數學故事，總有如沐春風之感。事實上，「把數學書寫得像童話一樣好看」，是他的夙願。「本書以親切流暢的筆調，娓娓道出數學的內涵，使讀者如促膝於老祖父之旁，聆聽其和煦的叮嚀。」

◎【衡齋算學校證】 李兆華 著
陝西科學技術出版社 1998 年 4 月第一版
總共 269 頁 定價人民幣 19.80 元 ISBN 7-5369-2601-4

【衡齋算學】是十九世紀初期中國數學家汪萊的經典作品，一向是史家研究近代中國數學史不敢忽略的文本。現在，有了李兆華（天津師範大學數學系教授）的校證，史家固然稱便，一般讀者料想也因而獲得親近它的機會。誠如中國數學史家李迪所指出：本書作者對「【衡齋算學】進行了系統的校證，原文之疑點和難點渙然冰釋，全書之數學方法與思路亦清晰可見，使我們能夠更清楚地認識汪策的數學工作。」

◎【九章算術】 郭書春 譯注
瀋陽：遼寧教育出版社 1998 年 7 月第一版
總共 512 頁 定價人民幣 22.0 元 ISBN 7-5382-4062-4

本書作者郭書春教授是「九章算術及其劉徽注」的權威學者，它的問世不僅惠及數學史家，對於想要「利用」此一古代數學文本的讀者來說，尤其是一個難得的福音。「本書包括導言、譯文、原文、及索引四部份。導言概括了本世紀以來尤其是近十幾年來的研究成果，論述了【九章算術】的版本與校勘等；原文的前五卷以南宋本為底本，後四卷及劉徽序以楊輝本為底本，並在匯校本基礎上作了重校，提出新的校勘約四十餘條，原文中還有必要的註釋，以現代數學符號及圖形詮識其解法、公式及筆算。」

◎【算經十書】（一、二） 郭書春、劉鈍 校點
瀋陽：遼寧教育出版社 1998 年 12 月第一版
總共 xxvii + 400 頁 定價人民幣 16.8 元（共兩冊）
ISBN 7-5382-5111-1/1・341

【算經十書】是中國漢魏以迄隋唐十部數學著作的總稱。本書以錢寶琮的校本（1963 年）為基礎，對版本深入分析與研究之後，再校點完成。這本書被遼寧教育出版社列入「新世紀萬有文庫」，是一本

有意深入中國古代數學文本的讀者必須收藏的書籍。

◎【數學內外：數學教育文集】 黃毅英 編
香港：天地圖書有限公司 1999 年第一版
總共 ii + 129 頁 定價港幣 40 元
ISBN 962-950-616-5

本書作者群黃毅英、列志佳、周偉文、談迺英及蕭文強都是長期關心香港數學教育的學者專家。由於「香港數學課程改革正進入決定性階段，於此時刻，集思廣益實為至要。」因此，本書「從數學、教學、課程改革和數學課程四個角度暢談數學內外，讀者定能對數學教育及其近來發展得知梗概。」

◎【數學哲學中的革命】 鄭毓信、李國偉 合著
台北：九章出版社 1999 年 5 月一版一刷
總共 ii + 220 頁 定價新台幣 200 元 ISBN 957-603-174-5
郵政劃撥帳號：1053467-6
email: ccmp@tytsl.seed.net.tw

本書共有六章及附錄一篇，其題目依次是「前言：數學哲學中的革命」,「數學活動論」,「數學：模式的科學」,「經驗和擬經驗的數學觀」,「數學的文化觀念」,「數學哲學對實際數學活動的意義」以及「數學哲學與科學哲學的相互影響」。由此可以預料「本書之內容就是集中地對現代的數學觀作出系統的分析和論述。書中亦特別強調數學哲學對數學教育的特殊重要性，本書希望幫助教師們通過數學哲學的學習，建立起正確的數學觀。」

◎【孔子與數學 -- 一個人文的懷想】 洪萬生 著
台北：明文書局 1999 年 8 月修訂一版
總共 v + 339 頁 定價新台幣 280 元
郵政劃撥帳號：01436784 明文書局

本書一本數學史雜文集，共收入 34 篇文章，其中 16 篇是初版（1991 年 10 月問世）原有。這些文章都是作者出入歷史場域，說明數學知識活動的價值與意義之結果。數學的真善美固然有它的高度抽象性，但是「貼近」它的途徑卻可以十分具體與人性化。現在，作者誠懇邀請大家從孔子與柏拉圖的對比開始，進入古代文明的知識世界，一起來分享數學的無限繁華與風情。