

HPM 通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系退休教授）
 主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）
 助理編輯：黃俊璋（和平高中）
 編輯小組：蘇意雯（台北市立大學）蘇俊鴻（北一女中）
 葉吉海（陽明高中）陳彥宏（成功高中）
 王文珮（青溪國中）
 英家銘（台北醫學大學）
 創刊日：1998 年 10 月 5 日 每月 5 日出刊
 網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horng>

第二十卷第一、二期合刊 目錄（2017年2月）

- ▣ 寫在 2016 Montpellier HPM 專輯前面
- ▣ 當數學遇見文學—2016 Montpellier HPM 會議之旅
- ▣ HPM 南法行旅
- ▣ HPM2016 會議紀行
- ▣ 南法 HPM 2016 研討會心得分享

寫在 2016 Montpellier HPM 專輯前面

洪萬生

台師大數學系退休教授

蘇意雯教授負責編輯此一南法 HPM 專輯，我應邀寫幾句話。在規劃參加的初期，我們決定組一個 panel，並請她召集人手。後來，我們就以 **Mathematical Narrative: from History to Literature** 為題，獲得主辦單位認可，至於參與的人手，則除了蘇意雯、黃俊璋、陳玉芬以及我本人之外，還有英家銘教授協助坐鎮。此外，我因為行程安排過於緊湊，所以，就邀請也有意前往的張秉瑩博士，代為宣讀我的簡報檔 **Mathematical Narrative: from History to Literature, A practice in Liberal-art Mathematics**。還有，俊璋也無法與會，其報告由家銘代為宣讀。

台灣的 HPM 之零星活動始於 1990 年中期，到了 2000 年由於我因緣際會承辦 HPM 2000 Taipei，而獲得國內數學教育社群及中學教師的前所未有的矚目。之後，我們的伙伴大都忙於深耕現有的題材，或是開發嶄新的議題，即便參加 HPM 的國際例會，我也很少呼朋引伴，把我們團隊的部分成果直接搬上國際舞台。不過，這次我參與的初衷，卻是出於兩個主要原因，首先，是上次 HPM 2012 Daejeon 召開時，我在 PME 36 Taipei 與前會重疊的情況下，應承辦者左台益教授之邀，對 PME 與會者發表大會演講 “Narrative, Discourse and Mathematics Education: An Historian’s Perspective”，這使得我完全無法抽身參加這個由亞洲城市再度所舉辦的 HPM 盛會。至於第二個理由，當然也是我試圖利用這個機會，看看 HPM 研究能否從數學敘事的角度切入，挖掘出教師乃至學生更感興趣的數學學習進路或方法。我在 PME 的大會演講中，已有初步的想法，現在，則由於研究與評量工具的增加，所以，可以掌握得較為成熟！

除了這個 panel 之外，我們的 HPM 伙伴劉柏宏、英家銘及黃美倫還各自投稿發表論文，展現台灣 HPM 社群的多元實力，非常值得肯定。

最後，希望參與本會的這些作者有機會將這些報告發展成完整的論文，讓更多的學者或中小學教師可以參考借鏡。



圖片由洪萬生提供：晚宴後，攝於廣場邊緣，攝影者是英家銘

當數學遇見文學

— 2016 Montpellier HPM 會議之旅

劉柏宏

國立勤益科技大學

自十七世紀開始，法國在數學史上有著光輝燦爛的一頁，從笛卡兒、費馬、巴斯卡、羅必達、棣美弗、達朗貝爾、拉格朗日、拉普拉斯、柯西、傅立葉、伽羅瓦、勒貝格、龐加萊、卡當，直至幾年前去世的格羅滕迪克，無一不是響叮噠的人物，數學史的愛好者若不到法國朝聖，終究後悔一生。不過，不知甚麼緣故，對法國始終提不起太多興趣，無論是旅遊或參加研討會，始終不曾將法國排入優先名單之一。2016年適逢 HPM 會議於 Montpellier 舉辦，又聽說洪萬生老師將率領洪門弟子們一起共襄盛舉，再加上已跳過兩屆 HPM 會議，因此決定與會。傳說中法國是個浪漫的國度，報告的主題自不能太嚴肅，所以，我決定分享這幾年在通識課程和選修課程中，學生所創作的數學小說內容，並由此剖析隱藏在學生心中的數學信念，講題為 *Using mathematical fictions as a means for revealing students' implicit beliefs of mathematics*。而這趟學術行程也就定調為「當數學遇見文學」之旅。

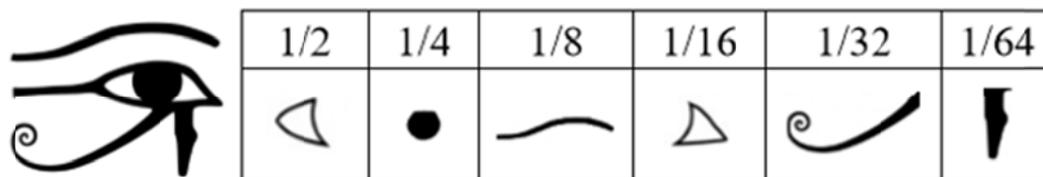
數學與文學看似為知識光譜之兩極，但近年許多學者析論後，發現兩者的敘事 (narrative) 結構有異曲同工之妙。文學與敘事的關係當然不在話下，那數學與敘事又有何干？Thomas (2002) 指出，當數學家證明數學性質之前，需先定義相關數學物件，並闡明彼此因果聯繫，這與交代故事中人物特性與關係的敘事手法相當類似。而數學物件經常是從自然界具象之物抽象而來，這又有如人物傳記小說的風格。所以他認為數學證明與敘事都在於處理人事物之間關係性的假設，只是以不同方式演繹出結果或結局，這可以視為 *mathematics as narrative*。

數學與文學的另一種關係，就是將數學置於文學體裁之中 (*mathematics in narrative*)，例如數學小說、數學散文、與數學詩等，這也是我此行報告的重點。因為實在厭煩批改學生四處抄襲而來的期末心得報告，這幾年開始嘗試在數學通識課和數學史選修課中，以數學小說創作做為期末報告的形式，果然發現抄襲狀況幾乎絕跡。縱使學生所撰寫的小說品質有待提升，但可以看出這都是他們嘔心瀝血之作。吾人的信念會無意中於文字中表現出來，因此，正好趁此機會探究隱藏在學生心目中的數學信念。

經分析後有四點發現。首先，數學對他們而言是一種解題的活動，數學問題每每在故事情節中扮演挑戰、闖關、或解謎的關鍵。例如古埃及的荷魯斯之眼 (圖一) 所象徵的殘缺意涵 ($1/2+1/4+1/8+1/16+1/32+1/64=63/64<1$)，就經常被視為破解藏寶密碼的暗示。另外，數學對他們而言似乎是種幻境中才能進行的學科。許多情節都是發生在夢境、遠古、或是另一個時空中的故事。《漢典的奇幻旅程》中，男主角泡澡時唸了一串咒語後，遇見了長相酷似阿基米德的老人；《遇見畢達哥拉斯》的男主角卡爾於電腦教室中突遇

一場地震，待平靜後卻聽到一位長者跟他打招呼，討論數學，原來是畢達哥拉斯。那數學家在他們心目中具有甚麼形象呢？「聰明」、「博學」、與「自我」幾乎是小說主角的三個共同特徵。這現象值得我們思考：會不會是這三種特徵讓學生選擇遠離數學？

從他們在小說中所使用的數學題材，可以發現「數論」相關概念最受歡迎。在《Φ》這篇小說中，女主角「段子綺」宣稱她的姓名中藏有很厲害的數學。看出來了嗎？「段子綺」筆劃數總和是 26，26 是唯一夾在一個數字的平方和另外一個數字的立方之間的數 ($5^2 < 26 < 3^3$)；第二對友愛數 (1184 與 1210) 相減也是 26；26 的三次方是 17576，而 $1+7+5+7+6$ 也剛好等於 26；還有 26 的平方為 676，是個迴文數 (各位數字相反排列後和原來的數一樣)，也是所有迴文數中各位數皆不相同的數字中最小的！由於這些內容皆不在課程所提供的參考文章之中，皆是學生自創，批閱至此，不得不佩服學生的數學巧思。

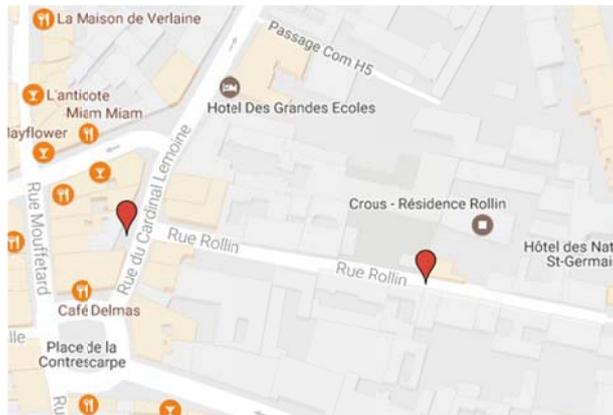


圖一 荷魯斯之眼和古埃及分數符號

不過，我們也發現學生在作品中都是以直接的感覺描述數學在小說中所扮演的角色，幾乎沒有見到如同歐拉恆等式 $e^{\pi}+1=0$ 在《博士熱愛的算式》和「孿生質數」在《質數的孤獨》中，所使用的隱喻象徵性手法。可見數學仍未能進入他們的內心世界。或許這對他們而言過於苛求，但如果當有一天學生真能將數學融入他們生命故事，台灣的數學教育也就成功了，也就不必對於學生在 PISA 的表現過度牽腸掛肚。

既然定調是數學與文學之旅，自然不能錯過數學家與文學家的足跡。我對法國文學一無所悉，不過知道海明威曾說過：「如果你夠幸運能在年輕時待過巴黎，那麼巴黎將永遠跟隨著你，因為巴黎是一席流動的饗宴。」(If you are lucky enough to have lived in Paris as a young man, then wherever you go for the rest of your life it stays with you, for Paris is a moveable feast.)，因此，我試著找尋他客居巴黎的住所 (74, Rue du Cardinal Lemoine)。至於數學家呢，發現笛卡兒也曾在巴黎待過，其住所地址為 14, Rue Rollin，再透過 google 地圖發現兩個地方竟然只有區區數公尺之距！(圖二) 既然可以如此一兼二顧，到了巴黎當然要去走一遭。海明威客居之所很好找，從地鐵站出來，走上一個小坡，就在一個小小的丁字路口 (圖三)，而笛卡兒的故居就在垂直於海明威住所門口的小巷內 (圖四)，目前整棟已變成大學的宿舍。猜想海明威當時應該知道他就住在笛卡兒故居附近，因為他另一個寫作工作室地址為笛卡兒街 39 號 (39 Rue Descartes)，也在那附近，既然以笛卡兒命名，海明威應該想過兩者的關聯。只是對海明威來說，巴黎這場流動宴席的名人菜單中可能不包括笛卡兒，因為表面上是天主教徒的海明威曾說：「會思考的人都應是無神論者」(All thinking men are atheist.)，而主張「我思故我在」(Cogito ergo

sum; I think, therefore I am) 的笛卡兒卻曾試圖以此證明神的存在。兩人不僅對神的概念有不同詮釋，寫作旨趣也大相逕庭。笛卡兒始終嘗試探索萬物確切的常態真理，海明威描寫的卻是世間的無常。即使如此，我們可以發現兩人敘事手法卻是異曲同工。



圖二 海明威（左）與笛卡兒（右）故居位置



圖三 海明威故居



圖四 笛卡兒故居

在《方法論》(*Discours de la méthode*)一書的第四部，笛卡兒藉由幾何和邏輯推論出上帝的存在。為何要藉由幾何和邏輯？他在第一、二部中就提到，他特別喜歡數學是因為它的推理確切明瞭，而年輕時也受過邏輯訓練。他發現邏輯三段式論證只能判斷已知之真偽，無法探求未知，幾何局限於考察圖形，幾乎令人想像力窮殆疲盡，而代數則是只能一味地根據數字與規則進行運算。所以，他發展出一種論證方式，結合三者之長而去其短。在第四部中，笛卡兒從自我懷疑出發，也就在此說出「我思故我在」這句名言。笛卡兒是如何論證神的存在呢？簡潔地講，首先他提問，何以人們會認識到自身的不完善，那表示存在一件比自身更為完善之物，這思想必須來自一個比實際更為完善的本性。既然我能認識一些我所沒有的完善，則代表我不是唯一的存在之物，必然有一至善之物存在。而這具備完善本性的至善之物就是「神」。然而神的概念只是精神上的存在或是實體的存在呢？笛卡兒注意到一些幾何論證不必然保證那些幾何對象的存在。例如，他覺察到一個三角形的三內角和必等於二直角，但不必然保證有任何三角形的存在。相對的，他接著說，當重新審視至善之物的觀念時，其存在性是被包含在概念之中，正如同三角形的三內角等於二直角已被包含在三角形的概念之中。換句話說，一旦三角形概念成形，三角形的三內角和等於二直角的性質也同時確立。由此可推，「至善之物的存在至少和任何幾何證明同樣真確」。笛卡兒明顯知道許多人無法信服於這樣的論證方式，

於是接著補充說，無法認識這真理的人是因為他們鼠目寸光，只能感覺具象之物，無法感受形體以外的對象。

現在我們來看一下海明威在《老人與海》中的敘事方式。已經連續 84 天沒有捕到魚的老人聖地亞哥，在眾人冷嘲熱諷中，第 85 天老人獨自出海，而且這次決定要到更遠的海域，遠到其他漁船不會到的海域。這個決定與其說是證明自己的能力，倒不如說是向自己的霉運抗議。由於航行得夠遠，讓他有機會遇見並捕獲一條巨大的馬林魚。但也因為航行得太遠，當馬林魚的血腥氣味引來鯊魚群的覬覦時，無人可伸出援手，即使費盡九牛二虎之力，三天三夜後返航入港時船尾只拖曳著一具引起驚嘆的巨大魚骨骸。海明威似乎在起筆之初，就已設定這悲喜交加的結局。喜的是，老人終於在眾人面前證明了他的能耐。悲的是，87 天後終究還是一無所獲，追平自己最長勞而無獲的難堪紀錄。整篇小說主旨可以用老人與大魚搏鬥時對自己所說的一句話來詮釋：「人不是與生俱來要失敗的，一個人可以被毀滅，但不可以被打敗。」(But man is not made for defeat. A man can be destroyed but not defeated.)。看一下論述這個結論的敘事架構。首先老人認識到自己不是一個那麼失敗的人，只是堅持用自己的方式捕魚。既然自己不是那麼失敗，則代表一定存在一件值得去做的事情，而這件事情將超過自己以往的成就。接著他察覺到一件事實：到別人未曾去過的海域一定可以碰到大魚。如果他能捕獲大魚，就證明他不是失敗的人。所以，當他獨自拖回巨大魚骨骸入港時，他就證明了這件事。但許多人可能無法認同這個論點，畢竟魚骨頭賣不了錢，老人終究一無所獲。但海明威想要傳達給讀者的概念是，不要以取得具象物質與否的世俗眼光定義一個人的成就，應該看到形體以外的光榮。這與笛卡兒證明神的存在性的敘事手法是不是宛如同出一轍？

似乎忘了說說會議地點 Montpellier 大學，代數幾何學家格羅滕迪克曾在那求學，但格羅滕迪克並不懷念當時的生活，幾乎都是自學。格羅滕迪克是一位傳奇性的人物，1966 年 38 歲時獲得費爾茲獎，但拒絕前往蘇聯領獎以抗議其軍事侵略。1970 年他辭掉法國高等科學研究所的工作，原因是他發現其部份資金來自國防部。1973 年之後他轉返 Montpellier 大學任教時已逐漸淡出數學圈。1988 年退休時又獲得 Crafoord 獎，卻拒絕接受，因為退休金已經足夠生活，而且又強調學術界的道德在下滑，他不願意再參與這種獎賞的遊戲，1990 年後就隱居於庇里牛斯山中。外界無法了解格羅滕迪克離群索居的原因。不過，海明威在 1954 年諾貝爾文學獎致謝詞中說：「寫作是一種孤寂的生活，作家團體固然可以緩和孤寂，但我懷疑創作會因而提升。作家擺脫孤寂，成長於群眾之中，只會使得作品更形平庸。」

文學如此，數學亦然。這些話或許是聖地亞哥的寫照，也或許是格羅滕迪克的心聲。

HPM 南法行旅

蘇意雯

臺北市立大學數學系

本次很高興能赴南法 Montpellier 大學參加 2016 數學史與數學教學學術研討會，研討會舉辦時間為 7 月 18 日至 7 月 22 日。此會議是國際數學教育會議(International Congress on Mathematical Education, ICME)的一個衛星會議，四年舉辦一次，2004 年筆者首次跟隨洪萬生老師至瑞典 Uppsala 大學參加該會議，之後於四年前參加上一屆於韓國大田舉行的 2012 HPM 國際研討會，去年筆者再度躬逢其盛，在洪萬生老師的帶領下，與臺灣團隊成員籌組兩小時之工作坊，參加於大學城 Montpellier 舉辦之 2016 HPM 國際研討會，共同向與會學者分享數學史融入數學教學的臺灣經驗，並與其他學者進行交流。我們的工作坊名稱為「數學敘事：從歷史到文學」(Mathematical narrative: from history to literature)，內容涵蓋四份實作，分別為國中部份一篇、高中部份一篇及兩篇大學部份，主要希望能經由這個工作坊，分享臺灣的 HPM 實作經驗，開展 HPM 新的研究面向，強調從原本歷史的切入延拓至文學的想像，也能有助於數學的學習，豐富數學教學。

筆者所做之研究主要探討大學數學系學生對於古代數學文本的閱讀理解，研究對象是公立大學數學系修習數學史之大三及大四學生共 39 名。教學者設計海龍公式閱讀文本，進行延伸之探究活動。研究實施方式是先請學生自行閱讀海龍公式文本，填寫問題，再進而全班共同分享討論。

關於海龍公式，雖然已考證出阿基米德是最早提出證明的學者，但是我們今日仍維持以海龍命名。海龍的證法相當迂迴、曲折，不到最後關頭，很難想像會得到如此神奇的結果。他的論證非常基本，僅使用平面幾何上非常簡單的要素，亦即只涵蓋命題的基本元素。但是，海龍顯示了驚人的幾何美感，將這些基本元素組成豐潤而典雅的證明，得到數學上登峰造極而又難以想像的結果 (Dunham, 1996)。本教學實驗的第一部份，就是帶領學生跟著古代數學家的步伐，展開一場探索之旅。主要是藉由文本的閱讀，擷取訊息，讓學生知曉海龍公式之原始證法，並能經由閱讀文本內容，省思原始證法最精妙的部分。

宋元時期是中國傳統數學發展的高峰時期，宋朝數學家秦九韶有一項傑出成果是「三斜求積術」，也就是已知三角形三邊之長求其面積的公式，為前人所無，等價於古希臘著名的海龍公式。課程第二部分即是讓學生體驗不同文化脈絡下的數學風貌，認識中國數學家秦九韶的生平，並就當時數學發展的狀況，想像三斜求積術的推導，進行解題及探究活動。筆者也藉由學生之問卷填答，提出研究結論及反思建議。從量化的分析結果，在所布置的七個問題中，筆者發現學生對於「我覺得『海龍公式』課程能幫助我提升解決問題的能力」以及「我覺得『海龍公式』課程能幫助我提升思考與分析的能力」同意度最高，非常同意及同意的學生佔全班的比率分別為 91% 及 90%，

至於「我覺得『海龍公式』課程能提高我學習數學的興趣」同意度最低，非常同意及同意的同學佔全班的比率只有 76%，如何將此文本設計得更有趣更能吸引學生，正是筆者所要努力的目標。

從質性的分析中，本研究依照學生基礎素養國際研究計畫（**Programme for International Student Assessment, PISA**）擷取與檢索、統整與解釋、省思與評鑑的閱讀理解歷程（**OECD, 2010**），觀察學生對於此數學文本的理解。所謂的擷取與檢索，主要是針對文本資訊，也就是能從閱讀的文本中，找到所需的資訊。統整與解釋指的是針對閱讀內容，涉及文本內部的統整，要求了解文本各部分的關係，也就是閱讀後，能正確解讀資訊的意義。省思與評鑑是指能夠將所讀內容，與自己原有的知識、想法和經驗相連結，綜合判斷後，提出自己的觀點（臺灣 PISA 國家研究中心，2011）。從本次教學實驗來說，在擷取與檢索階段，學生們都能舉出他們認為海龍原始證明最美麗的部分。在統整與解釋階段，學生們也都能理解海龍的原始證明，但只有部分學生能利用三角形面積公式及畢氏定理推導出三斜求積術。在省思與評鑑階段，學生可以反思數學家解這些問題的方法，發現數學家使用不同進路解決相同數學問題，也因此能從中領略不同的文化脈絡會有不同的數學發展形式。

2016 HPM 的主題是“**Mathematics in the Mediterranean**”除了探討地中海地區的數學發展外，其餘主題也包括了在數學教育中融入歷史的理論和概念架構、HPM 課堂教學實作及相關主題、在課堂運用原始素材的教育成效探討、以及數學和科學、科技、藝術的連結等跨領域教學、文化和數學相關探討等豐富面向。與會者可以從研討會中得知 HPM 之發展近況，並和其他學者研討，了解學界最新研究趨勢。本次會議主要語言為英文和法文，由於語言的限制，在法語演講的場次，筆者就只能藉由 ppt 簡報的幫助，了解演講內容，可見語文能力的充實也是相當必要的。

如前文所述重要主題，此次研討會的 Panel 1 中就討論了 **Theoretical and/or conceptual frameworks for integrating history in mathematics education (Frid, Michael N., Guillemette, David & Jahnke, Hans Niels)**，可知在融入歷史進入數學教學中，理論及概念架構的探討是不可或缺的。此外，四年前在韓國大田召開的 HPM 2012 研討會，邀請筆者一同參加 Panel Discussion 的 Uffe Thomas Jankvist 教授也對於 HPM 的師資培育面向多所關注，和其他學者共同發表了 **Mathematical knowledge for teaching teachers. The case of history in mathematics education (Jankvist, Uffe Thomas, Mosvold, Reidar & Clakk, Kathleen)**，由於筆者之前執行科技部研究計畫，也對於高中教師研發 HPM 動畫所獲致的專業成長做過探討，也因此於會後與 Uffe 做進一步的討論交流。

由於中國大陸承接 2020 年的 HPM 會議，因此在這次研討會中，華東師範大學汪曉勤教授也率領研究團隊一起參加會議，並作一專題演講 **Integrating the history of mathematics into mathematics teaching: Some experience from China**，分享中國的數學史融入數學教學經驗，看到大陸地區實施 HPM 教學的狀況，也給了筆者一些啟發，臺灣團隊投入 HPM 教學的經營較大陸為早，在大陸團隊的急起直追下，如何更提升我們

HPM 教學並進而豐富學生的數學學習，正是我們所要努力的目標。

本次會議看到數學史融入數學教學的多樣風貌，臺灣的 HPM 團隊也在國際舞台上，展現臺灣在數學史與數學教學上努力的成果。其實除了這次參加的團隊成員，國內還有更多的教師正嘗試融入數學史於數學教學上，大家可以更活躍地參加國際學術研討會，展現臺灣教師對於 HPM 的關懷及投入。

參考文獻

臺灣 PISA 國家研究中心(2011)。臺灣 PISA 2009 結果報告。台北：心理出版社。

Dunham, William (1996)。天才之旅 (*Journey through genius: the great theorems of mathematics*) (林傑斌譯)。台北：牛頓出版公司。

OECD (2010). *PISA 2009 Assessment framework: Key competencies in reading, mathematics and science*. Paris, France: OECD Publishing. doi: 10.1787/9789264062658-en

HPM2016 會議紀行

英家銘

臺北醫學大學通識教育中心

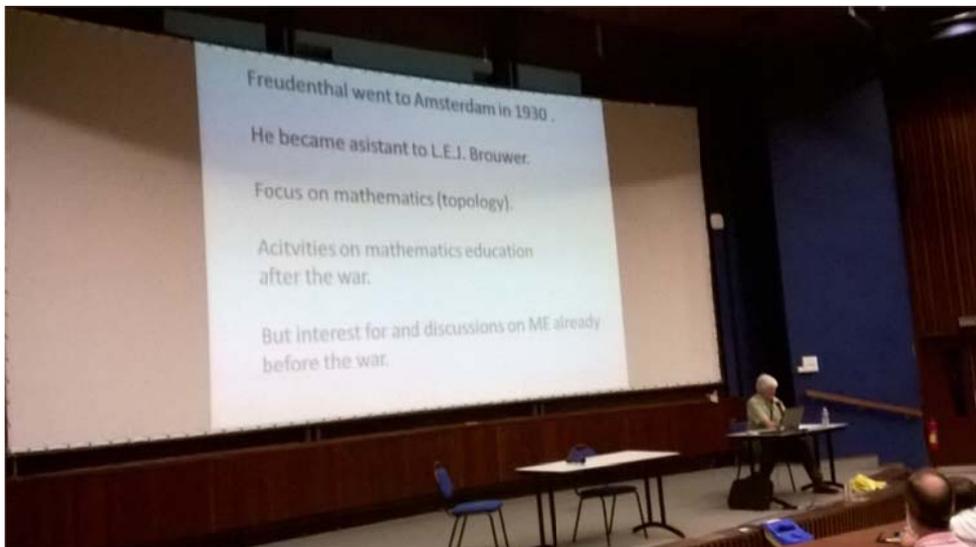
2016 年七月 18-22 日，筆者到南法蒙彼里耶（Montpellier）參加四年一度的數學史與數學教育國際會議（HPM）。這是筆者第一次參與這個會議。有趣的是，雖然與 HPM 會議在過去數屆失之交臂，但其實筆者人生首度參與國際研討會，是在筆者仍擔任中學教職之時，參加了 2004 年於臺中教育大學舉辦的亞太地區 HPM 會議（參見《HPM 通訊》第七卷第六期）。所以，HPM 的研討會，也可以算是筆者參與學術活動的初體驗。只是 HPM 界最重要的國際會議，筆者到去年才首度參加。

這次會議是由蒙彼里耶大學教育系主辦，共有全球百餘位學者參加。臺灣有約十位學術研究者與中學教師與會，陣容算是不小。蒙彼里耶大學擁有全世界持續運作至今最古老的醫學院，從十二世紀中葉開始傳授醫學知識與技術。下圖是蒙彼里耶大學醫學院。



這次筆者有參與由臺灣學者共同合組的工作坊「數學敘事：從歷史到文學」（**MATHEMATICAL NARRATIVE: FROM HISTORY TO LITERATURE**），不過僅擔任主持工作。工作坊的內容讀者可參閱本期其他作者的介紹。筆者本人主要是與和平高中黃俊瑋博士共同投稿一篇論文：「數學經典閱讀對於大學生數學信念之影響」（**THE INFLUENCE OF MATHEMATICAL CLASSICS READING ON UNIVERSITY STUDENTS' MATHEMATICS BELIEFS**）。我們的主要研究成果是，大學生若用一學期的時間大致閱讀《幾何原本》，並學習其背景中的文化與哲學之後，他們更傾向同意數學能應用於真實世界，且數學能增進人的美感。大學生同時也更清楚理解「發現的脈絡」（例如我們如何發現一個數學命題）與「核證的脈絡」（例如我們如何確認某個數學命題為真）之間的差異。

不過，這次令筆者最感興趣的內容，是荷蘭台夫特科技大學（Delft University of Technology）施密特教授（Harm Jan Smid）的大會演講：「成形的日子：在戰前阿姆斯特丹的漢斯·弗洛伊登塔」(Formative years: Hans Freudenthal in prewar Amsterdam)。弗洛伊登塔（1905-90）是荷蘭的數學家與數學教育大師，創立了世界知名的數學教育研究機構弗洛伊登塔研究所（Freudenthal Institute）。弗洛伊登塔研究所所提倡的現實數學教育（Realistic mathematics education）是荷蘭數學教育研究與實務的主軸，而且在越來越多的國家被接受。弗洛伊登塔的「現實數學教育」，是指數學必須與孩童日常生活的情境有關連，而且數學做為人類活動這樣的概念必須被強調，所以數學教育應該被組織成「引導重新發現」（guided reinvention）的過程。上面關於弗洛伊登塔的數學教育哲學眾所周知，但施密特教授的大會演講引起我注意的是另一件事情，就是弗洛伊登塔在戰前曾經於阿姆斯特丹當過布勞爾（L. E. J. Brouwer, 1881-1966）的助手。下圖是施密特教授的大會演講，提到布勞爾的那一頁。



布勞爾是誰呢？他是荷蘭 19-20 世紀的大數學家，在拓樸學、集合論、複變分析以及測度論都有貢獻。他證明了有名的布勞爾固定點定理（Brouwer fixed-point theorem）。布勞爾不但是數學家，也是重要的數學哲學家。他提出的直覺主義（Intuitionism）認為數學並非獨立於人類的客觀存在，而是人類直覺建構的結果。如果弗洛伊登塔曾當過布勞爾的助手，那麼布勞爾的數學哲學有沒有可能影響弗洛伊登塔的數學教育哲學呢？這是筆者想要問的問題，也是這次到南法最大的收穫。希望未來筆者有時間能夠研究這個問題。

參考資料

FI-wiki:

[http://www.fisme.science.uu.nl/en/wiki/index.php/Realistic Mathematics Education](http://www.fisme.science.uu.nl/en/wiki/index.php/Realistic_Mathematics_Education)

Shapiro, S. (2000). *Thinking about Mathematics: The Philosophy of Mathematics*. New York: Oxford University Press.

南法 HPM 2016 研討會心得分享

陳玉芬

新北市立明德高中

一個值得特別記憶的日子，2016.7.12 下午 23:50 分，生平第一次以參加「學術性的國際研討會」之名，搭乘長榮班機前往法國蒙彼利埃 (Montpellier)。出發當天倍覺自己特別「尊榮」，就連照起相來，都特別覺得有「氣質」(作者為圖一右二)。其實更恰當的說法，應只是個人謹代表本校「新北市立明德高中國中部數學科」，做個國際性的宣傳代言人，所以，我們此次同行的老師，有伶芳、淑貞、佩瑜以及中央輔導團的惠儀。



圖一

由於此次研討會地點在法國南部，又時值放暑假，因此，我們一行老師就規劃提早四天抵達巴黎。而這座浪漫的城市，也是此次行程計劃中，我們五位女生完全無異議通過的必選熱點。當然，關於還要造訪巴黎的其他景點自不在話下，但令我印象深刻的當屬這令人驚艷的馬卡龍專店 (Pierre Herme, 4 rue Cambon 75001 Paris, 圖二)，



圖二：琳瑯滿目的馬卡龍

它位於香榭麗舍大道旁，它的口感，外酥脆內綿密，相信我，它會讓你不经意地又拿起了第二塊，它也絕對會讓你在返國的前一天想要再次造訪。當然，我們沒有忘記這趟旅程是個知性之旅，所以，也安排了凡爾賽宮及巴黎科學工業博物館，選擇巴黎近郊的凡爾賽宮，不外乎是因為在《蘇菲的日記》一書中，所描述的蘇菲·熱爾曼見證了法國大革命，而這象徵法國王室的凡爾賽宮，正是當時首當其衝予以要被催毀的權貴象徵。不過，此時此刻在我們眼前的凡爾賽宮，是重現路易十四盛世的華麗莊嚴(如圖三)，自然是看不到路易十六倉皇逃離後的烽火殘垣，只是在閱讀此書之後再來到此地，似乎有

些景象多了些畫面也多了些故事。



圖三：凡爾賽宮



圖四：正規分布之演示

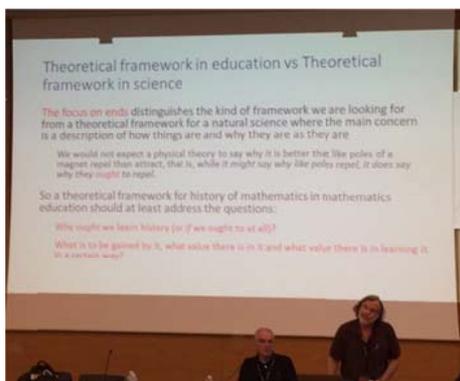
至於巴黎科學工業博物館（Cite des Sciences et de l'Industrie），它是歐洲最大的科學博物館，位於法國巴黎東北方十九區的維萊特公園（Parc de Villette）內，於1986年啟用。這是惠儀強烈堅持要排入的行程，我們非常感謝她，因為在這裡，除了學習到許多的科學新知之外，我們也欣賞到國外的數學教育其活潑又令人深刻的解說（圖四是利用珠子隨機掉落的方式探討機率的發生，相當有趣）。

到法國四天後，我們抵達了法國南部的蒙彼利埃，開始準備完成此行最主要目的，參加在南法蒙彼利埃（Montpellier）舉辦的2016 HPM。研討會為期五天，我們台灣隊（由洪萬生教授領軍）分散在第一天（星期一）的下午以及星期二還有星期四，而我們明德高中的教學經驗分享則是被安排在星期一的下午。我要報告的主題是 **Promotion and Practice for Junior High Students' Science Reading**（如圖五），主要是與來自世界各地的教育先進，分享本校國中部數學教師近幾年，為學生在科普閱讀推動上所做的實質努力，諸如：透過科普閱讀欣賞，讓學生完成數學小說或新詩的創作、或是從藝術鑲嵌中探索數學的幾何元素並實作、或是融入歷史脈絡的算額繪馬解題，還有從生活中取材的幾何燈籠，以及教師長期關注在數學素養上的月刊寫作耕耘。我也很感謝當天與會的賢達先進，提供一些珍貴的回饋與交流，讓我們有更多的學習與成長的空間。



圖五

由於會議為期五天，內容自然相當充實，我也在報告完之後，選擇了幾場有興趣的講座去聆聽，印象最為深刻的則是 Gil&Millan 講到的 “The History – Pedagogy Mathematics/ Physics (HPM/Ph) framework & main issues”。講者說明在使用一些歷史進路 (approach) 時，可根據在不同的教學目標、主題的性質、學生的程度甚至教學的時間等，採取策略的多樣性。同時也具體舉例說明：希臘數學家埃拉托斯特尼 (Eratosthenes) 在測量地球周長時運用大膽的三種假設，完成了具科學性的丈量，而這些對知識探索的 *How*、*What* and *Why* 正是我們教師可以學習以及可施力之處。



圖六



圖七：研討會後與 HPM 團隊的合影

在注入豐沛的精神食糧 (多場 keynote 的養份補給) 之後，大會也安排了一個半天的蒙彼利埃小鎮導覽，這個小鎮位於法國南部地中海沿岸，也是通往西班牙的必經之路，目前擁有四條輕軌，以大眾運輸網路來說，算是稠密的，而我們在這裡的三天，也都是搭乘著輕軌線 (圖八) 來往於學校與下榻之處，確實體驗當地生活，也自有樂趣。此外，我們也邀請我們的專業領隊英家銘教授，帶我們參觀了在蒙彼利埃極富盛名的醫學機構 -- 蒙彼利埃醫學院 (圖九)，這是法國最早的醫科學校，也是蒙彼利埃大學的前身。有此一說：如果你不幸得了感冒，蒙彼利埃是個養病的地方，在巡禮完這個小鎮之後，我想不僅是因為這裡有中世紀就已成立的醫學院，讓你治療得以信賴，更重要的是那恬靜古老的街區，當你漫步在當地的教堂、莊園與歌劇院時，心靈早已治癒你生理上的苦痛。



圖八



圖九

最後我們抓住了在法國行最後的一束浪漫--普羅旺斯與尼斯，首先當你看到那一片如夢似幻的薰衣草田時，彷彿覺得這是上帝只為普羅旺斯編織的最美麗衣裳，尤其在那金色陽光怒灑下，那樣的美，永生難忘！



圖十：到塞南克修道院 (Abbaye Notre-Dame de Sénanque)途中所拍攝到的薰衣草田。

接著我們來到尼斯，它是位於地中海沿岸法國南部的一個港口城市，也是蔚藍海岸的首選渡假聖地。我們一行人搭乘了市區的小火車到達城堡山頂，俯瞰尼斯天使灣（如圖十一左），也到舊城區品嚐道地海港美食（如圖十一右）。在尼斯，你聞得到一種多元氣息，它有羅馬老城古樸的氣息，也有歐式英風典雅的氣息，更混搭著現代豪門奢華的氣息，但這一切都不違和。



圖十一

行程至此，也已近尾聲，這次的國際研討會讓我收獲滿滿。除了這是生平第一次參加此種學術發表之外，也開啟我與世界各國學者和研究人員交流的機會，更重要的是看到了學術界中很單純的快樂，它來自於單純的研究。而能促成這樣的學習，除了感謝我長期合作的數學伙伴，最想要感謝的是洪萬生老師，提供我這樣一個難得學習的機會，也啟發了我對研究的新詮釋，這些成長是無法言喻的喜悅！

1. 為節省影印成本，本通訊將減少紙版的發行，請讀者盡量改訂 PDF 電子檔。要訂閱請將您的大名、地址、e-mail 至 suhv1022@gmail.com
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請 e-mail 至 suhv1022@gmail.com
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/hpmlletter.htm>
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本：陳昭蓉（東京 Boston Consulting Group）

基隆市：許文璋（銘傳國中）

台北市：英家銘（台北醫學大學）楊淑芬（松山高中）杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中）
蘇俊鴻（北一女中）陳啟文（中山女高）蘇惠玉（西松高中）蕭文俊（中崙高中）
郭慶章（建國中學）李秀卿（景美女中）王錫熙（三民國中）謝佩珍、葉和文（百齡高中）
彭良禎、鄭宜瑾（師大附中）郭守德（大安高工）張瑄芳（永春高中）張美玲（景興國中）
文宏元（金歐女中）林裕意（開平中學）林壽福、吳如皓（興雅國中）傅聖國（健康國小）
李素幸（雙園國中）程麗娟（民生國中）林美杏（中正國中）朱廣忠（建成國中）吳宛柔（東湖國中）
王裕仁、蘇之凡（木柵高工）

新北市：顏志成（新莊高中）陳鳳珠（中正國中）黃清揚（福和國中）董芳成（海山高中）孫梅茵（海山高工）
周宗奎（清水中學）莊嘉玲（林口高中）王鼎勳、吳建任（樹林中學）陳玉芬（明德高中）
羅春暉（二重國小）賴素貞（瑞芳高工）楊淑玲（義學國中）林建宏（丹鳳國中）
莊耀仁（溪崑國中）、廖傑成（錦和高中）

宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中）吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）林宜靜（羅東高中）

桃園市：許雪珍、葉吉海（陽明高中）王文珮（青溪國中）陳威南（平鎮中學）
洪宜亭、郭志輝（內壢高中）鐘啟哲（武漢國中）徐梅芳（新坡國中）程和欽（大園國際高中）、
鍾秀瓏（東安國中）陳春廷（楊光國民中小學）王瑜君（桃園國中）

新竹市：李俊坤（新竹高中）、洪正川（新竹高商）

新竹縣：陳夢綺、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）

苗栗縣：廖淑芳（照南國中）

台中市：阮錫琦（西苑高中）、林芳羽（大里高中）、洪秀敏（豐原高中）、李傑霖、賴信志、陳姿研（台中女中）、
莊佳維（成功國中）、李建勳（萬和國中）

彰化市：林典蔚（彰化高中）

南投縣：洪誌陽（普台高中）

嘉義市：謝三寶（嘉義高工）郭夢瑤（嘉義高中）

台南市：林倉億（台南一中）黃哲男、洪士薰、廖婉雅（台南女中）劉天祥、邱靜如（台南二中）張靖宜（後甲國中）
李奕瑩（建興國中）、李建宗（北門高工）林旻志（歸仁國中）、劉雅茵（台南科學園區實驗中學）

高雄市：廖惠儀（大仁國中）歐士福（前金國中）林義強（高雄女中）

屏東縣：陳冠良（枋寮高中）楊瓊茹（屏東高中）黃俊才（中正國中）

澎湖縣：何嘉祥 林玉芬（馬公高中）

金門：楊玉星（金城中學）張復凱（金門高中） 馬祖：王連發（馬祖高中）