

HPM 通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系退休教授）
 主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）
 助理編輯：黃俊璋（和平高中）
 編輯小組：蘇意雯（台北市立大學）蘇俊鴻（北一女中）
 葉吉海（陽明高中）陳彥宏（成功高中）
 王文珮（青溪國中）
 英家銘（台北醫學大學）
 創刊日：1998年10月5日 每月5日出刊
 網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horng>

第二十卷 第四期 目錄 (2017年4月)

- ▣ 從「清聖祖批校幾何原本」談康熙帝之數學觀(II)
- ▣ 數學史融入數學教學
 單元主題：一億以內的數-「羅塞塔石碑的秘密」學習單

從「清聖祖批校幾何原本」談康熙帝之數學觀 (II)

張美玲

台北市景興國中

(接續前期)

四、評析康熙帝的數學觀

《批校本》卷一之敘稱：「幾何原本者，數源之謂，度算萬物度數之大本，天文地理等學根源也。凡習諸道必先始於易而至於難，不越次第而循序勉自入深微矣。是以幾何原本將一易之形著於前，雜之形著於後，其題中兩相彷彿，易學者居先，難者繼之列為次第，以應學者循序漸進，更由次第而發，圖形之情理名目，使不求講解而著詳論於首也。」¹此敘言已將康熙編輯此文本的精神完全表達出來。本文內容編排順序由淺入深，題題都附有圖形，透過圖形，讓讀者更容易理解，透過圖形，許多證明更以直觀訴求。康熙在其批閱《批校本》的手稿上，即已體現出部分數學功力，其數學素養涵蓋基礎且實用的幾何學知識。只是中國的傳統數學，是以算學為中心，雖然也有邏輯「證明」，但卻沒有形成一個嚴密的演繹體系，或許康熙亦受此傳統所影響，因此，我們在研讀《批校本》時，感受到康熙似乎並未完全體會出《原本》中那種邏輯推理的說服力和科學結構的嚴謹性，而只是偏向實用的、基礎性的幾何學。茲整理出以下幾點說明。

(一)、康熙相當重視數學的實用性

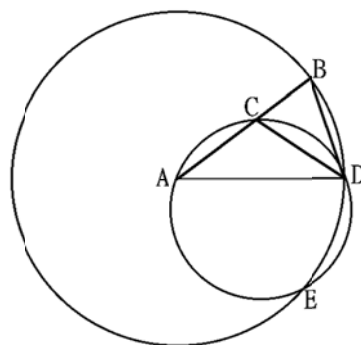
張誠在 1690 年 3 月 24 日的日記上亦寫道：「為皇上講解了四條歐幾里得定律。皇上認為他已經完全理解，並殷切表示要在儘可能快的時間內知道幾何原理的最必要的部份，以求弄懂實用幾何學。我們向他指明，如果他願意的話，我們將只講最必需最有用的定理，而不依照漢文譯本中的示例方法。這樣我們就能把課程縮短，並提供更正確的示例。陛下同意這一建議。我們決計改用巴蒂氏的實用和理論幾何學，因為它的圖例比較易懂。」

¹ 原文之敘並無標點符號，但為求閱讀方便，筆者自行加入符號。

歐幾里得的《原本》(The Elements)在中國最早的漢譯本是 1607 年(明萬曆 35 年丁未),是利瑪竇(Matteo Ricci)、徐光啟根據丁先生(Christopher Clavius, 1538-1612)改編的十五卷拉丁文本,所合譯出版的(以下簡稱《徐利本》),但只完成了前六卷。此前六卷為完整的平面幾何部分,可以自成體系,故譯名為「幾何原本」。其各卷又細分界說、求作、公論與命題。康熙在學習幾何學時,應已參考此漢文譯本,但在《批校本》中,體例上不作細分,且亦刪除了不少內容,如《徐利本》卷二的內容主要為用幾何方式來表達代數恆等式,或許對康熙而言並非是必需的、有用的定理,故未納入《批校本》中。

又如關於「求作一個等腰三角形,使它的底角的每一個角都是頂角的兩倍」之命題,《批校本》的做法為「於甲乙線之兩頭各作一七十二度之角將兩邊線俱引長相交於丙即成一甲乙丙三角形為所求之形也」,利用有刻度之圓,作出兩底角 72 度,頂角 36 度之等腰三角形。《徐利本》卷四第十題:「求作兩邊等三角形,而底上兩角各倍大於腰間角。」此命題《徐利本》依循歐幾里得《原本》之證明,《原本》IV-10 的作法及證法,簡述如下:²

- (1) 任意取定一線段 AB,依 II-11 所述之法,取點 C,使得 AB、BC 構成之矩形等於 CA 上的正方形。³
- (2) 以 A 為圓心,AB 為距離,⁴作圓 BDE,在圓上取 D,使得 BD 等於 AC,連接 AD、CD,並作三角形 ACD 的外接圓。
- (3) 因為 AB、BC 構成之矩形等於 CA 上的正方形,又 BD 等於 AC,所以 AB·BC 構成之矩形等於 BD 上的正方形,故 BD 與圓 ACD 相切 (III-37),所以角 BDC 等於角 DAC (III-32),兩者同加角 CDA,可得角 BDA 等於三角形 ACD 之外角 BCD。
- (4) 因為 AB 等於 AD,所以角 ABD 等於角 BDA,故角 ABD、角 BDA、角 BCD 彼此相等,所以 BD 等於 DC。
- (5) 又 AC 等於 BD,BD 等於 DC,故 AC 等於 DC,所以角 CDA 等於角 CAD,亦即角 BCD 等於角 CAD 的兩倍。
- (6) 由(4)、(5)可知,角 ABD 與角 BDA 相等,皆為角 CAD 的兩倍,故三角形 ABD 即為所求之等腰三角形。



上述命題的證明用到「弦切角」與「圓之切割性質」,都是《批校本》刻意刪除《巴蒂本》的命題內容。從此一相同命題,比較兩者之說明,可知康熙「不依照漢文譯本中的示例方法」,而只是「儘可能快的時間內知道幾何原理的最必要的部份,以求弄懂實用幾何學」。其實類似的例子很多,如關於「等腰三角形兩底角相等」之命題,《批校本》的證明方式亦比《徐利本》容易明白,且對於三角形全等的性質,除了 SAS 與《徐利本》

² 參閱《歐幾里得·幾何原本》,藍紀正、朱恩寬譯,台北:九章出版社。「IV-10」表示第四卷命題 10。

³ 《原本》II-11:分已知線段,使它和一條小線段所構成的矩形等於另一小段上的正方形。

⁴ 歐幾里得的《原本》並沒有為「半徑」下定義,故亦未使用「半徑」這一個名稱。

相同外，對於 SSS 及 ASA 皆只有說明未證明，不似《徐利本》因循《原本》的嚴謹推論。限於篇幅，不再贅述。

(二) 重視數學儀器的操作

北京故宮博物院收藏有各種數學文物，絕大部分都是實際使用的工具儀器，其中包括假數尺、分厘尺、角尺、矩尺、比例規、那皮爾算籌、各種圓儀、手搖計算器等。⁵這些數學工具肯定與康熙帝有直接關係，有的其上刻有「康熙御制」字樣。⁶

白晉在其著作中也提到：「我們將這些定律用滿語翻譯出來寫成文稿，並在其中補充了歐幾里得和阿基米得著作中的必要而有價值的定律和圖形。除了上述的課程以外，康熙皇帝還掌握了比例規的的全部操作法、主要數學儀器的用法和一些幾何學及算術的應用方法。」又說：「每當學習到幾何學中最有價值的知識時，皇帝總是抱持著濃厚的興趣，要把它們應用於實際，也會練習數學儀器的操作。……皇上在外帶著這些儀器，有時用來測量某座山的高度，有時測量兩地之間的距離。」⁷

舉例來說吧。《批校本》中的卷七第四十一~第四十三及第四十六節，利用比例尺等分已知線段、測量已知角、求作正方形、求作正方體。從這四個命題即可推知，康熙的確掌握了比例規的的全部操作法。另外，卷七第四十五節利用矩尺作二直線之中率二線法；卷七第五十節，作各種三角形之儀器法，此儀器可用以測高深廣遠，可知其各角各界之度；卷七第五十一節，做各種地形畫圖法，使用半圓儀器或全圓儀器，再利用相似三角形原理繪製地形圖。凡此等等，都可知道康熙帝重視數學儀器的操作，解決實際問題。

(三)、未具備嚴密演繹證明能力之素養

所謂證明，就是借助一些公理或真實性業經確定的命題，來論證某一命題的真實性。《批校本》有許多命題皆只有說明而未證明，或是引用未經證明的命題，或是以直觀法論之，而顯得不夠嚴謹；亦有邏輯推理順序完全錯誤的命題。⁸

歐幾里得很喜歡將一個命題和他的逆定理放在一起，如《原本》I-5：「等腰三角形中兩底角彼此相等」，I-6：「如果一個三角形中，有兩角彼此相等，則等角所對的邊也彼此相等。」I-18：「在任何三角形中，大邊對大角。」I-19：「在任何三角形中，大角對大邊。」I-24：「有兩個三角形，兩組對應應邊相等，則夾角大者，其所對應之邊亦較大。」I-25：「有兩個三角形，兩組對應應邊相等，則第三邊大者，其所對應之角亦較大。」……，⁹但在《批校本》中捨棄了一些逆定理的敘述，如卷二第十一節：「凡三角形之長界線，必與大角相對。」是指三角形中若有兩邊不相等，則大邊對大角。其中，並無逆定理的敘述與證明，卻在卷二的第十四節有此應用。卷二第九節：「三角形之二線若等，其底線之兩角度亦為等也。」是指等腰三角形中兩底角彼此相等，但卻沒有其逆命題，或許

⁵ 李迪、白尚恕，〈故宮博物院所藏科技文物概述〉，《中國科技史料》，1981年1期，95-100。

⁶ 有關這些工具的詳細介紹，可參閱李迪，《中國數學通史》明清卷，頁217-218。

⁷ 徐志敏、路洋譯，《老老外眼中的康熙皇帝》，人民日報出版社，2008年9月，頁30-32。

⁸ 可參考筆者所寫的論文，《《數理精蘊》中的《幾何原本》》，第五章第一節。

⁹ I-24 & I-25 即是指樞紐定理及逆樞紐定理。

康熙認為逆定理是理所當然的成立，無需再特別提出。此種思維模式與很多初學幾何推理的國中生相同，對他們而言，大邊對大角若是成立，則大角對大邊亦成立。

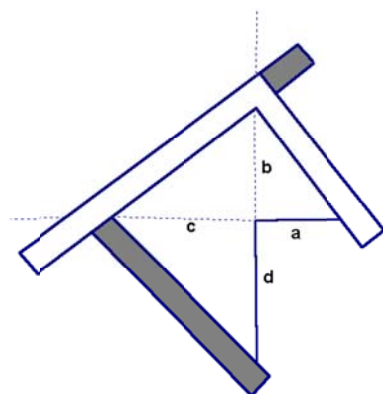
筆者並非在此批評這些邏輯上的瑕疵，因為有很多的問題必須搬到當時的時空場景中去評斷。《九章算術》成書於公元一世紀，近兩千年來中國數學家大體上都遵循《九章算術》的體例，來研究問題和撰寫著作，它在傳統數學中的地位就像《原本》在古代西方數學中的地位一樣。像《原本》這樣一部抽象的、演繹式的邏輯體系，對於處身中國傳統文化薰陶教育下的許多知識份子而言，是很難接受的。康熙皇帝自然很難例外。公理的選擇、定義的給出、內容的編排、命題的嚴格證明、方法的運用，都需要高度的智慧與邏輯訓練。故康熙未能具備此嚴密思想，亦是理解的。

(四)、對尺規作圖不感興趣

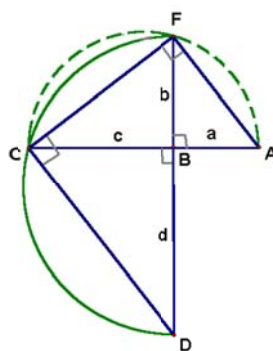
尺規作圖的難處，是作圖只許用無刻度的直尺和圓規。此作圖的限制最先是由依諾皮迪斯 (Oenopides, Οἴνοπιδης, 約公元前 465 年) 所提出，¹⁰後來《原本》用公設的形式規定下來，¹¹希臘人的興趣並不在於圖形的實際作出，而是在尺規的限制下，從理論上去解決這些問題。《批校本》在作法上捨棄了嚴謹的尺規作圖，而是允許採用有刻度的圓畫出對應的角度，其中，缺乏《原本》嚴密的邏輯推理不說，我們甚至還能尋找出部分內容的錯誤。康熙似乎對尺規作圖不感興趣，只在乎實際圖形的完成，對作圖工具完全不設限。如卷十一第二十一節：「作各種圓內接正多邊形」，先計算各種正多邊形的內角度數。第二十二節：「作各種圓外切正多邊形」，須先將圓周作等分，兩者之作圖需用有刻度的圓畫出相對應的角，所以並非尺規作圖題。

又如，「立方倍積」是古希臘尺規作圖的三大難題之一，現已被證明無法用尺規作圖完成。當年，柏拉圖為了解決此問題，勉強寫出一道作法，但因使用矩尺工具，故並非尺規作圖。此作法被放在《批校本》卷七第四十五。命題內容以現代符號簡述如下：

用有二直線，欲另作二線為此二線間之兩率法。



圖八



圖九

¹⁰ 藍紀正、朱恩寬譯，《歐幾里得 幾何原本》，頁 6。

¹¹ 《原本》卷 I 給出 5 個公設，頭 3 條就是對作圖的規定：(1) 兩點間可連一直線；(2) 線段可任意延長；(3) 以任意中心，任意距離可作一圓。根據這幾條公設，作圖就只能用尺規作圖。

【已知】兩線段長分別為 a 、 d

【求作】二線段長為 b 、 c ，使得 $a : b = b : c = c : d$

【作法】將 a ， b 兩線段成垂直且一端點重合，再將兩矩尺的直角點分別置於兩線段延長線上，兩矩尺之一股重合，另一股分別置於線段 a ， d 之端點處，如圖一所示，則 b ， c 即為所求

【證明】如圖九所示，直角三角形 ACF ， $\overline{BF} \perp \overline{AC}$ ，所以 $a : b = b : c$

直角三角形 DCF ， $\overline{CB} \perp \overline{DF}$ ，所以 $b : c = c : d$

故 $a : b = b : c = c : d$

若將此命題的 a 取 1， d 取 2，則以 b 為邊長的立方體體積，為以 a 為邊長的立方體體積之二倍，如此便可完成「立方倍積」之作圖。

此外，在《原本》中，歐幾里得並沒有使用度數的觀念，他唯一使用量度角大小的單位，就是直角，但康熙卻在《批校本》中用了不少角度的計算。比如說，其卷七第四十二節行間，就有小楷註記「此度原是分西洋人改度」，至於卷七命題二十一，康熙則將正文的「其五界形之五角度。俱各一百度」，更正為「其五界形之五角度。俱各一百零八度」。

(五)、呼應劉徽的「割之又割，以至於不可割」之窮盡分割概念

《批校本》卷六第七十七節：「圓柱體外周面積與長方體底面積相等，長方體高度與圓柱體底面半徑之半相等，則圓柱體體積與長方體體積相等。」用類似窮盡法的概念，分割成千萬個小長尖體，文中未如劉徽所言「割之又割，以至於不可割」，但在觀念上亦相去不遠。又如卷四第二十二節，證明圓形面積等於一直角三角形的面積，即是以千萬正多邊形面積逼近而得。卷六第七十四節：「圓錐體底面積若與球體外表面積相等，且圓錐體高度與球體半徑相等，則此球體體積與圓錐體體積相等。」此命題之證明係將球體與圓錐體各分成千萬等份尖體，每一小等份皆對應相等，則合之原體必相等。

(六)、重視圖形直觀說明

其實，這點與前面所述之重視實際應用、缺乏邏輯的素養有其關連性。康熙重視以圖形輔助理解之，在《批校本》中可以看出幾乎每道命題上方都附有圖形，連正文內容也會穿插圖形，許多命題皆以直觀說明。如卷五第二十八節：「表面積相等之各種立體圖形，以圓球體的體積最大。」是利用卷四第二十四節的性質：「周長相等的平面圖形，圓形面積最大。」推論而得，其實令人難以接受。康熙在學習數學天文學時，非常重視形數結合方法，白晉說：「皇上總是非常認真地聽講，並反覆練習，親手繪圖」，以至於「看到關於某個定理的幾何圖形，就能立即想到這個定理及其證明過程。」¹²學習立體幾何時，又「將同樣之圓筒形、圓錐形、楔形之比例或容積，反覆實驗之。」這種學習

¹² 白晉，《康熙大帝》，收入徐志敏、路洋譯，《老老外眼中的康熙皇帝》，北京：人民日報出版社，頁 30。

方法行之有效，進步很快。《批校本》卷五第二十四節：「各種體形，欲以鮮明者，而難以平圖顯之也，必用木類作其型體之模，始於此等難顯之處，自然亦顯而可明矣。但發明此等難處之模內，有空實二端，必合於圖形，空者宗其空，實者宗其實，以作之，始可發明其細故也。」意思是說各種立體形，很難以平面圖形顯示，需作成模型，較容易理解。各種立體形有實心或空心，須有實際形體，才能發現其中原理。故在卷五第二十七節：「上下面平行之柱體與尖體形同底同高者，尖體形的體積為柱體的三分之一」，僅以「將各體照實形作空形，於此空形用水以比例之，其各體之積，自然可得而之矣」說明之。

五、結論

傳教士白晉在其著作中，曾描述康熙：「對於自己成為一個優秀的幾何學者，皇帝感到由衷的高興和十分的滿意。」又說：「實際上，康熙皇帝很早以前就制定了一項計畫，即把西歐的全部科學移植到中國來，並使之在全國得到普及，這些講稿之所以公開刊行，就是這項計畫的首次付諸實施。」¹³從白晉的這些敘述，我們很自然可以理解，康熙為何選擇這本實用的基礎理論幾何學，如此認真地校稿、反覆修正。《批校本》翻譯自法國數學家巴蒂 (Pardies) 所撰的實用幾何學教科書 (*Elémens de géométrie*)，而非遵循著具備嚴謹公理化系統之歐幾里得《原本》，或許是因為康熙皇帝希望這部幾何學教科書能普及於全國，而這部《批校本》比起當時徐光啟與利馬竇合譯之《幾何原本》，更加容易學習，較能達到普及之成效。

安多和張誠、白晉等傳教士於 1690 年將巴蒂所撰的幾何學教科書，另參考阿基米德及歐幾里得的著作，翻譯成滿文，作為替康熙上課的教材，再以此滿文本為底本譯成漢文，即為《批校本》，經康熙親自校對修改此漢文抄本後，再依據修改後的內容寫成《精鈔本》。巴蒂的 *Elémens de géométrie*，其法文原名就是《幾何原本》，是適合初學幾何者的入門書，以一種簡單迅捷的方式學習幾何學。筆者曾仔細地將《批校本》與其作內容對照比較，¹⁴針對康熙帝的數學觀，筆者不揣鄙陋，整理出以下幾個特點，拋磚引玉，或可引出史學研究者不同的進路與思考。為免累贅，巴蒂的 *Elémens de géométrie*，將以《巴蒂本》簡稱之。

- 《巴蒂本》中之弦切角與圓內接四邊形為何要刪去？或許對康熙而言，這並非一個很實用且重要的性質，但以現代幾何知識而言，有了弦切角與圓內接四邊形的性質，對於證明其他相關性質或應用，有其簡化算式與過程之功能。

- 《巴蒂本》IV-28、IV-29 與 IV-30 此三個與證明圓面積有關的命題被刪去，因《巴蒂本》與《批校本》採用不同的方式證明圓面積公式。兩者都是利用窮盡法的概念，巴蒂的理論來自於阿基米德，這與他當時寫這本書時，吻合了在此書封面上表達的精神，「通過一種簡單迅捷的方式學習歐幾里得、阿基米德、阿波羅尼以及其他優秀幾何學家

¹³ 白晉，《康熙大帝》，收入徐志敏、路洋譯，《老老外眼中的康熙皇帝》，北京：人民日報出版社，頁 33。

¹⁴ 參閱筆者碩士論文，《《數理精蘊》中的《幾何原本》》。

們，從古到今的幾何發現。」¹⁵《批校本》則呼應劉徽窮盡分割的概念。劉徽證明的特色，完全在於它的具象與直觀，這充分反映在其他的面積、體積公式的證明過程之中；¹⁶《批校本》對於面積、體積公式亦承襲了劉徽證明的特色—具象與直觀。

· 什麼樣的教材內容可稱為初等幾何學？巴蒂和康熙有著些許不同的看法。《批校本》刪去了《巴蒂本》中不可度量、級數、對數之內容，增加了許多有關立體圖形的表面積與體積的求法、橢圓與圓之面積關係；利用比例尺之工具作有關距離、面積、體積的測量。康熙認為實用的圖形才是基本的幾何學，尺規作圖不切實際，只要善用中國劉徽的窮盡分割概念，即可解出許多表面積與體積之間的關係，無須利用西方數學之難以理解的論證方式。

康熙應是中國歷來最具有學術涵養的帝王，從康熙親筆校稿的《批校本》中，讓我們有更多的史料據以探索與了解康熙的數學知識與思想。不過，這些只是筆者根據自己研讀的心得所作出的推論，是否真的即是康熙的本意，恐怕也只有康熙皇帝才知道了。

參考資料

Pardies, Father Ignacius Gaston 1673). *Elémens de géométrie*, 1673. 資料來源：

<http://echo.mpiwg-berlin.mpg.de>

白晉等著（徐志敏、路洋譯）(2008).《老老外眼中的康熙皇帝》，北京：人民日報出版社，2008年9月。

李迪 (2004).《中國數學通史》明清卷，蘇州：江蘇教育出版社。

利瑪竇、徐光啟合譯；偉烈亞力、李善蘭合譯；曾國藩輯刊 (1993).《幾何原本》十五卷本，收入郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷五，鄭州：河南教育出版社，頁 1151-1500。

吳文俊主編 (1999).《中國數學史大系》第七卷，北京：北京師範大學出版社。

洪萬生 (1994).〈數學史上三個公式積圓面〉，《科學月刊》第二十五卷第七期，頁 539-544。

張美玲 (2008).《《數理精蘊》中的《幾何原本》》，台北：國立台灣師範大學數學系教學碩士班碩士論文。

藍紀正、朱恩寬譯 (1992).《歐幾里德《幾何原本》》，台北：九章出版社。

陳方中主編 (2003).《中國天主教史籍彙編》，台北：輔仁大學出版社。

劉鈍 (1995).〈訪台所見數學珍籍〉，《中國科技史料》第 16 卷第 4 期，頁 8-21。

國圖收藏，《幾何原本》七卷附序，清精鈔本，三冊，索書號 305.4 06399，國家圖書館館藏。

¹⁵ 參考筆者碩士論文，《《數理精蘊》中的《幾何原本》》，頁 85-87。

¹⁶ 洪萬生，〈數學史上三個公式積圓面〉。

數學史融入數學教學

單元主題：一億以內的數-「羅塞塔石碑的秘密」學習單

楊正凡

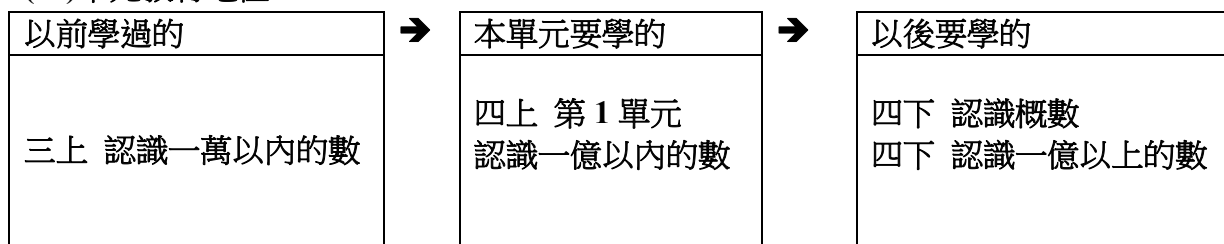
臺北市士林國小

一、前言

作者在 2015 年的暑假，去了一趟倫敦旅遊，期間參觀了著名的大英博物館（British Museum），對其館藏之豐富深感震驚，且印象深刻。古埃及美麗又神祕的建築、藝術和文化等，一直深深吸引著我的目光。而其中最著名的鎮館之寶--「羅塞塔石碑」（Rosetta Stone），正是破解古埃及象形文字非常重要的關鍵物。後來，作者在修讀臺北市立大學「數學史與數學教育」的課程時，蘇意雯老師正好介紹了古埃及人的記數方法，也因此就有了把古埃及記數系統融入課堂教學的想法。於是便設計了「羅塞塔石碑的秘密」這個學習單，作為四年級上學期的數學補充教材使用。

二、教學指引

(一)單元教材地位



(二)單元教學目標

- 1.能認識「萬位」、「十萬位」、「百萬位」、「千萬位」的位名。
- 2.能以萬為單位，說、讀、聽、寫八位數以內的數。
- 3.能透過位值比較億以內的數的大小，並能用 $<$ 、 $>$ 與 $=$ 表示數量大小的關係。

(三)能力指標和分年細目

N-2-02 能透過位值概念，延伸整數的認識到大數(含億、兆)。

4-n-01 能透過位值概念，延伸整數的認識到大數(含億、兆之位名)，並做位值單位的換算。

(四)相關數學史

古埃及象形文字大約是在距今 5000 年前發明的。在使用了 3500 年後，到了 1500 年前，古埃及的文字和語言就因國家滅亡而消失了。所以，後來再也沒有人看得懂古埃及文（現在的埃及人講的是阿拉伯語，信仰的是伊斯蘭教）。直到「羅塞塔石碑」出土

後，象形文字的秘密，才在 1822 年，正式被法國語言學家商博良 (J. F. Champollion) 所解開。羅塞塔石碑由上到下共刻有三種語言，分別是：古埃及象形文字 (hieroglyphs)、古埃及通俗文字 (demotic) 與古希臘文 (Greek)。而因為古希臘文是現代人可以閱讀理解的，所以象形文字的秘密就因此而被破解了。

我們對於古埃及數學的許多認識，是來自於「蘭德紙莎草文書」(Rhind Papyrus)。這份文書大約可追溯到西元前 1650 年左右，由考古學家蘭德而得名，現藏於大英博物館。從蘭德紙莎草文書中，我們可了解古埃及數學的基本樣貌。而關於古埃及人的記數系統，是使用十進位制的數碼，這種方法基本上與羅馬數碼相同。他們用了七個符號來表示數字，分別是：以一枝筆 (stroke) 表示 1、以牛軛 (cattle hobble) 表示 10、以捲曲的繩圈 (coil of rope) 表示 100、以蓮花 (lotus plant) 表示 1000、以手指 (finger) 表示 1 萬、以青蛙或蝌蚪 (tadpole) 表示 10 萬、以張開雙臂的神明 (god with arms supporting the sky) 表示 100 萬。在書寫的時候，這些符號沒有一定的排列順序，只要將其相加是正確的數值即可。(資料來源：Fun with Hieroglyphs、溫柔數學史)

三、學習單使用方式

本學習單為補充教材，教學約需要 1 節課 40 分鐘的時間。可以先由教師講解，再讓學生討論、實作與發表。學習單分為前後兩個部分，前 2 頁為數學知識的部分 (可挑出單獨使用)，後 2 頁為練習題。因頁面有限，所以在設計時，以相同概念的題目不重複為原則，並求能符合本單元的各項教學目標。

四、實施情況分析

(一)時間與對象

本學習單實際施做的時間為 2016 年 12 月。對象是隨機選取臺北市兩間國小各一班四年級的學生。收回的有效樣本為 25 和 22 份，總共 47 份。

(二)第一大題分析

這一大題裡有 3 小題，目的在測驗學生的位值概念、是否能點數一億以內的數、是否能做位值單位的換算及是否能報讀記錄數字。

這一大題全對的學生有 32 人，答對率為 68%。學生較容易錯的地方是：在報讀記錄數字時，分不清楚是要寫國字數字，還是要寫印度阿拉伯數字。另外還有粗心數錯的。

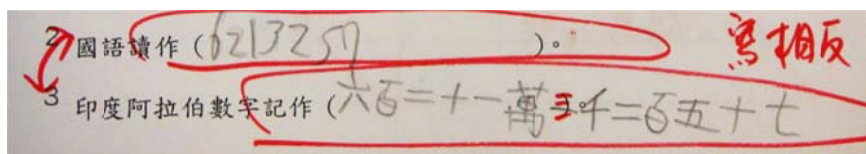


圖 1 國字數字與印度阿拉伯數字寫相反

(三)第二大題分析

這一大題裡有 2 小題，目的與第一大題類似。不同之處是在數字中間有零，以測驗學生的位值概念、是否能做位值單位的換算及是否能報讀記錄數字。

因為這一大題數字中間有零，全對的學生只有 18 人，答對率降為 38%。學生較容易錯的地方是：粗心填錯數字、漏看漏寫以及數字中的零會多或少。

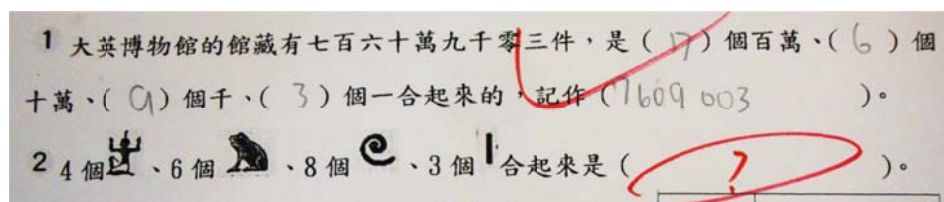


圖 2 漏看漏寫

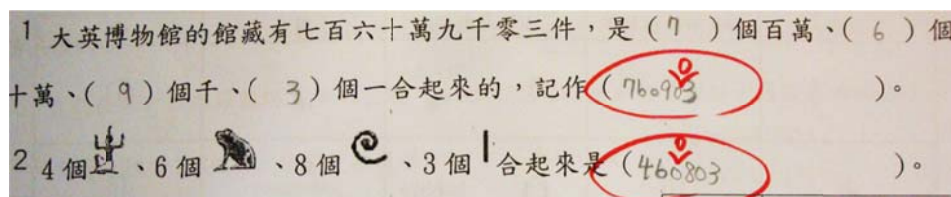


圖 3 數字中少零

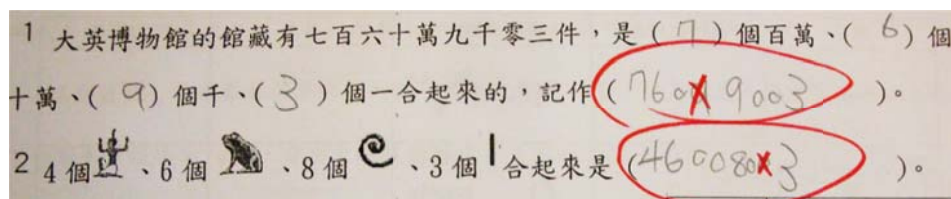


圖 4 數字中多零

(四)第三大題分析

這一大題裡有 3 小題，目的在測驗學生是否能在定位板上做位值記錄、是否能比較兩數的大小及是否能報讀記錄數字。

這一大題全對的學生有 22 人，答對率為 47%。學生較容易錯的地方是：在回答幾位數時，不清楚題意問的是什麼。還有在將古埃及數字轉化成印度拉伯數字時出錯，導致在比大小時就答錯。

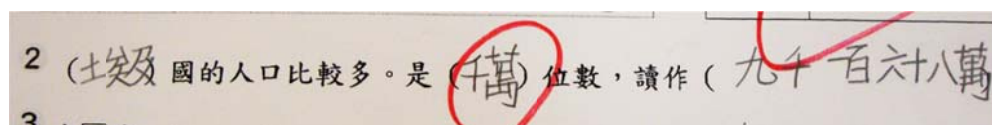


圖 5 不清楚題意

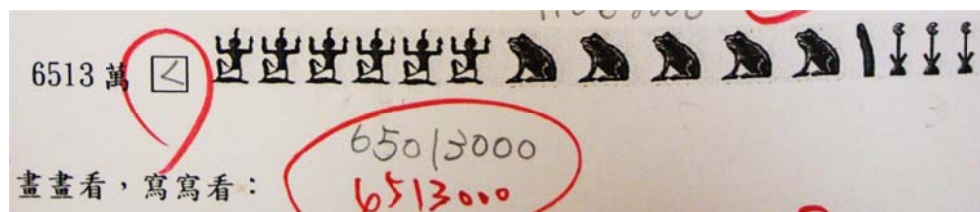


圖 6 古埃及數字轉化成印度拉伯數字時出錯

(五)第四大題分析

這一大題裡有 3 小題，目的在測驗學生是否能點數十萬以內的數、是否能用古埃及數字來表示數量，以及分享寫完學習單後的心得感想。

這一大題的位值較小，比較簡單，全對的學生有 30 人，答對率為 64%。學生較容易錯的地方是：數錯錢、對古埃及數字不熟悉畫錯、或粗心而漏畫和懶得畫。

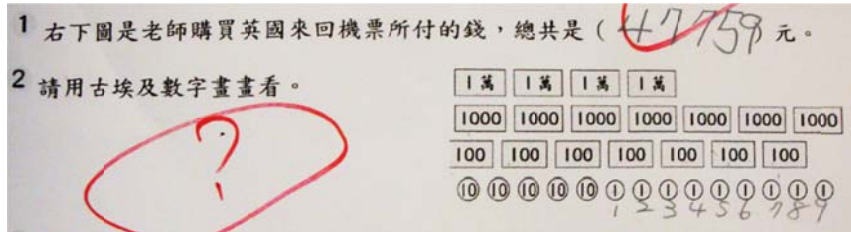


圖 7 因懶得畫而未作答

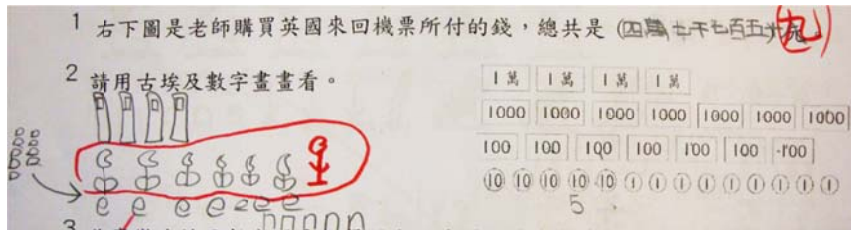


圖 8 粗心數錯而漏畫

學習單的最後是個開放性問題，問學生喜不喜歡這張學習單和心得感想。62%的學生反應是不喜歡，因為：看不懂、很麻煩、很難畫、很難記、要畫很久、不習慣和不熟悉等。而回答喜歡的人有 34%，大部分是認為：很好數、很有趣、很可愛、很特別、覺得古埃及人很聰明，以及沒看過，所以很新鮮等。

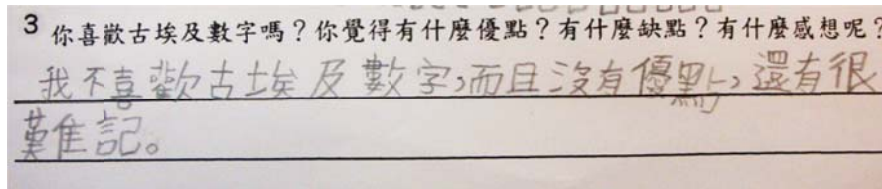


圖 9 不喜歡，因為很難記

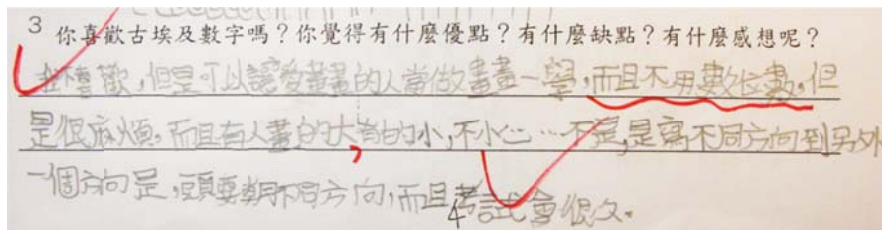


圖 10 不喜歡，因為很麻煩，但優點是不用數位數

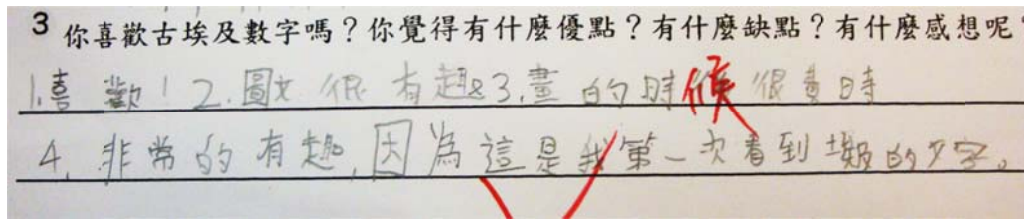


圖 11 喜歡，因為第一次看到，覺得很有趣

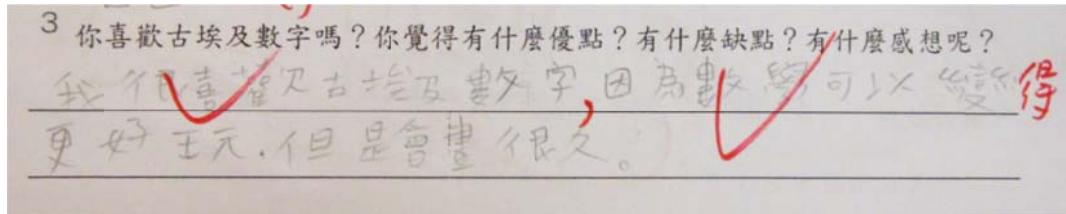


圖 12 喜歡，因為數學可以變得更好玩

五、實施心得

作者當初在設計這份學習單的時候，一開始並沒有限定使用的年級。直到閱讀完相關文獻之後，發現古埃及的記數數碼只有到百萬，千萬以上就沒有了。所以為了配合數學課程，就將學習單設計為四年級上學期來使用。

而在學習單做出來之後，許多老師看了都覺得很新奇有趣，大家都猜測效果應該會不錯。但是在 2 班四年級的學生將學習單完成之後，統計出來的結果，竟發現有高達 62% 的學生回答「不喜歡」這份學習單，4% 表示「不喜歡也不討厭」，只有 34% 的人「喜歡」。這個結果真是完全出乎大家的預料之外！

但後來，作者不死心又試著將同一份學習單加上注音後，給一到三年級各 1 班的老師在課堂上來使用，卻得到了完全不同的結果（一到四年級學生對學習單的喜好統計如下表）：

一到四年級學生對學習單的喜好統計表

一年級(23 人)			二年級(22 人)			三年級(26 人)			四年級(47 人)		
喜歡	不喜 歡	無意 見	喜歡	不喜 歡	無意 見	喜歡	不喜 歡	無意 見	喜歡	不喜 歡	無意 見
16 人	0 人	7 人	12 人	2 人	8 人	12 人	7 人	7 人	16 人	29 人	2 人
70%	0%	30%	55%	9%	36%	46%	27%	27%	34%	62%	4%

從上表的統計結果，可以發現一個明顯易見的趨勢：就是愈高年級的學生，對於這份學習單的反應是愈不喜歡；但愈低年級的學生，雖然不太會寫，反應卻是愈喜歡（給一到三年級老師的使用建議是：可將學習單前 2 頁故事的部分挑出單獨使用，或是將後半部的題目簡化後再合併使用，效果會更好）。而關於這現象產生的原因，作者推測可能的原因是：

- (一)愈高年級的學生作業量愈多，造成學生不喜歡寫額外的作業。
- (二)愈高年級的學生愈懶得寫字，對於要多畫一個圖和多寫一個字都會斤斤計較（從畫圖題的空白率較高可看的出來）。
- (三)愈高年級的學生愈難保有童心。

作者認為，古埃及人是很有童心的。古埃及的繪畫，有著非常鮮明獨特的風格。他們的人物畫作，最大的特徵就是：在一直線上構圖安排人物、臉部是側面、上半身是正面、下半身是側面、人物依尊卑而有不同大小、描黑邊、顏色平塗、畫面充實等。而上述的這些特徵，不就和我們的兒童繪畫之間，存在著許多的共通處嗎？所以年紀愈小的兒童，反而愈能接受和喜歡古埃及的東西。也難怪這份學習單的實施情況分析出來，竟會有如此讓人意外的結果了。

六、參考文獻

Berlinghoff, W.P., Gouvea, F.Q. (2008), 洪萬生、英家銘暨 HPM 團隊譯,《溫柔數學史：從古埃及到超級電腦》。臺北：博雅書屋。

British Museum (2016), “The Museum's story”,

http://www.britishmuseum.org/about_us/the_museums_story.aspx

Casson, L. (1979), 鍾禮文譯,《古代埃及》。香港：時代生活叢書出版社。

Discovering Egypt (2016), “Egyptian Mathematics Numbers Hieroglyphs”,

<https://discoveringegypt.com/egyptian-hieroglyphic-writing/egyptian-mathematics-numbers-hieroglyphs/>

Roehrig, C. (2008), *Fun with Hieroglyphs*. London: The British Museum Press.

李源順 (2016), 國民小學數學課本四上第 7 冊。臺南：南一出版社。

李源順 (2016), 國民小學數學習作四上第 7 冊。臺南：南一出版社。

羅塞塔石碑，出自維基百科

<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E7%BE%85%E5%A1%9E%E5%A1%94%E7%9F%B3%E7%A2%91>

七、附錄

「羅塞塔石碑的秘密」學習單共 4 頁（配合南一、康軒與翰林版國小數學四上第 7 冊第 1 單元一億以內的數）



配合南一康軒翰林 105 四上數學 一、一億以內的數

羅塞塔石碑的秘密

年 班 號

姓名

小朋友，你去過臺北「國立故宮博物院」嗎？數學課本上說故宮的館藏高達 694223 件呵！那你知道「694223」這個數要怎麼讀嗎？還有全世界館藏量最多的博物館是誰呢？

英國倫敦的「大英博物館」(圖1)，成立於 1753 年，也是世界上第一個國家公共博物館。從一開始到現在，它就讓所有的人都免費參觀。除了元旦和聖誕節休館，博物館全年開放，每天開放時間為上午 10 點到下午 5 點半。它的館藏數量是世界第一，將近有 800 萬件，是我們故宮館藏的 10 幾倍以上，每年遊客人數超過 600 萬人。



圖 1 大英博物館

老師在 2015 年暑假去了一趟大英博物館。其中有個寶物，被人們層層包圍了一圈又一圈。到底是什麼東西這麼珍貴呢？原來就是「羅塞塔石碑」(圖2)。羅塞塔石碑高 112.3 公分、寬 75.7 公分、厚 28.4 公分，重 762 公斤。是一塊製作於西元前 196 年的花崗閃長岩石碑，上面刻了



圖 2 羅塞塔石碑

當時埃及法老王托勒密五世的詔書。1799 年時，石碑被入侵埃及的法國拿破崙軍隊，在一個港灣城市羅塞塔發現。但是沒隔多久，在 1801 年時，英國打敗了法國。於是在 1802 年，羅塞塔石碑就被送到了大英博物館，成為

它的鎮館之寶至今。(資料來源：British Museum)

為什麼羅塞塔石碑這麼重要呢？因為它正是破解古埃及象形文字最大的關鍵！大約 5000 年前，埃及人就發明了文字。一直到了 1500 年前，因為被希臘和羅馬人統治，後來又被阿拉伯人佔領，國家就滅亡了。所以古埃及的文化、文字和語言就慢慢消失了，再也沒有人看得懂古埃及文了（現在的埃及人講的是阿拉伯語，信仰的是伊斯蘭教）。

直到後來，因為羅塞塔石碑的出現，象形文字的秘密才被人解開。羅塞塔石碑由上到下共刻有三種語言，分別是：古埃及象形文字(官方正式用語)、古埃及通俗文字(當時一般人使用的文字)、與古希臘文(圖3)。因為古希臘文是近代人可以閱讀理解的，所以後來有一位很厲害的法國語言學家商博良，就



圖 3 刻有三種語言的羅塞塔石碑復原圖
圖片來源：維基百科

利用石碑上的人名和地名等關鍵字來比對和分析石碑上其他兩種語言的內容，終於在 1822 年，成功破解了象形文字！所以我們今天才能理解這些已經失傳了 1500 多年的語言。

象形文字被破解後，大家才明白，原來其中真正表示意義的字並不多（例如蛇並不是蛇的意思），而是

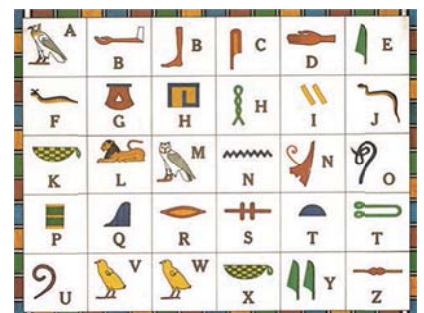


圖 4 大部分的象形文字是注音符號
圖片來源：Fun with Hieroglyphs

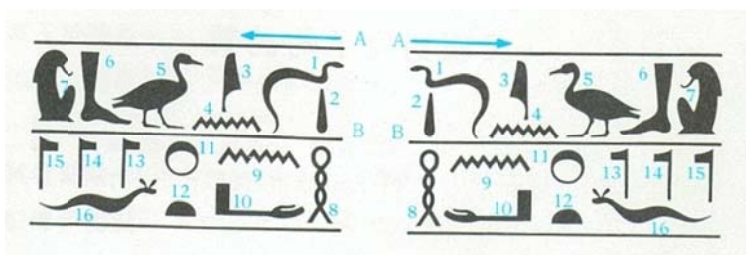


圖 5 橫寫時的閱讀順序

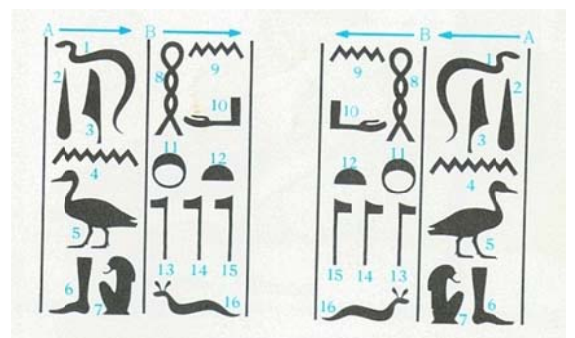


圖 6 直寫時的閱讀順序

大部分為表示聲音的符號（就像英文 ABC 和注音符號ㄅㄆㄇ），是屬於拼音文字（圖4）。更特別的是，象形文字可以橫著寫，也可以直著寫。而直寫或橫寫時，可以由左向右，也可以由右向左。所以到底要從哪裡開始看呢？這時就要看動物的頭朝向哪裡來判斷了（圖5、6）。甚至同一組符號在排列的時候，也不用一個一個排好，而是可以上下左右疊在一起自由組合。是不是非常有趣呢？（資料來源：Fun with Hieroglyphs、古代埃及）

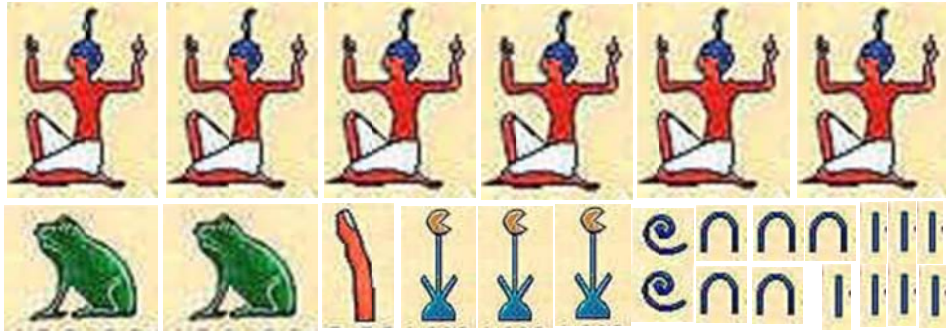
各種記數方法對照表

印度阿拉伯數字	國語數字	羅馬數字	古埃及數字	積木	錢
1	一	I	 筆		①
10	十	X	 牛軛		⑩
100	一百	C	 繩圈		100
1000	一千	M	 蓮花		1000
10000	一萬		 手指		1萬
100000	十萬		 蝌蚪 或青蛙		10萬
1000000	一百萬		 張開雙臂的神		100萬

圖片來源：Discovering Egypt、南一數學習作四上第7冊

 練習一下

1 右圖是大英博物館一整年的參觀人數：



1 數一數，填一填，
有()個 1000 萬、



()個 100 萬、()個 10 萬、()個 1 萬、()
個 1000、()個 100、()個 10、()個 1。

2 國語讀作 ()。

3 印度阿拉伯數字記作 ()。

2 填填看：

1 大英博物館的館藏有七百六十萬九千零三件，是 () 個百
萬、() 個十萬、() 個千、() 個一合起來的，記作
()。

2 4 個 、6 個 、8 個 、3 個  合起來是
()。

3 右邊是 2016 年四個國家的大約人口數：

1 把埃及和英國的人口數在定位板上記記
看。

國家。	大約人口數。
臺灣。	2352 萬。
澳洲。	2412 萬。
埃及。	9168 萬。
英國。	6513 萬。

千萬位	百萬位	十萬位	萬位	千位	百位	十位	個位

2 () 國的人口比較多。是 () 位數，讀作 ()。

3 在□填入 >、< 或 =：

23520000 □ 2352 萬 九千一百零六萬八千 □ 91680000

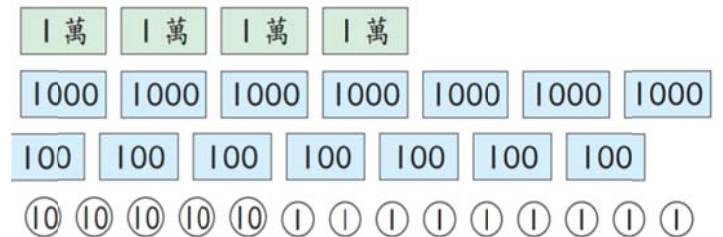
6513 萬 □



4 畫畫看，寫寫看：

1 右下圖是老師購買英國來回機票所付的錢，總共是 () 元。

2 請用古埃及數字畫畫看。



3 你喜歡古埃及數字嗎？你覺得有什麼優點？有什麼缺點？有什麼感想呢？

1. 為節省影印成本，本通訊將減少紙版的發行，請讀者盡量改訂 PDF 電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail 至 suhv1022@gmail.com
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請 e-mail 至 suhv1022@gmail.com
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horn/letter/hpmlletter.htm>
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本：陳昭蓉（東京 Boston Consulting Group）

基隆市：許文璋（銘傳國中）

台北市：英家銘（台北醫學大學）楊淑芬（松山高中）杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中）

蘇俊鴻（北一女中）陳啟文（中山女高）蘇惠玉（西松高中）蕭文俊（中崙高中）

郭慶章（建國中學）李秀卿（景美女中）王錫熙（三民國中）謝佩珍、葉和文（百齡高中）

彭良禎、鄭宜瑾（師大附中）郭守德（大安高工）張瑄芳（永春高中）張美玲（景興國中）

文宏元（金歐女中）林裕意（開平中學）林壽福、吳如皓（興雅國中）傅聖國（健康國小）

李素幸（雙園國中）程麗娟（民生國中）林美杏（中正國中）朱廣忠（建成國中）吳宛柔（東湖國中）王裕仁、蘇之凡（木柵高工）

新北市：顏志成（新莊高中）陳鳳珠（中正國中）黃清揚（福和國中）董芳成（海山高中）孫梅茵

（海山高工）周宗奎（清水中學）莊嘉玲（林口高中）王鼎勳、吳建任（樹林中學）陳玉芬

（明德高中）羅春暉（二重國小）賴素貞（瑞芳高工）楊淑玲（義學國中）林建宏（丹鳳國中）

莊耀仁（溪崑國中）、廖傑成（錦和高中）

宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中）吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）林宜靜（羅東高中）

桃園市：許雪珍、葉吉海（陽明高中）王文珮（青溪國中）陳威南（平鎮中學）

洪宜亭、郭志輝（內壢高中）鐘啟哲（武漢國中）徐梅芳（新坡國中）程和欽（大園國際高中）、

鍾秀瓏（東安國中）陳春廷（楊光國民中小學）王瑜君（桃園國中）

新竹市：李俊坤（新竹高中）、洪正川（新竹高商）

新竹縣：陳夢綺、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）

苗栗縣：廖淑芳（照南國中）

台中市：阮錫琦（西苑高中）、林芳羽（大里高中）、洪秀敏（豐原高中）、李傑霖、賴信志、陳姿研（台中

女中）、莊佳維（成功國中）、李建勳（萬和國中）

彰化市：林典蔚（彰化高中）

南投縣：洪誌陽（普台高中）

嘉義市：謝三寶（嘉義高工）郭夢瑤（嘉義高中）

台南市：林倉億（台南一中）黃哲男、洪士薰、廖婉雅（台南女中）劉天祥、邱靜如（台南二中）張靖宜

（後甲國中）李奕瑩（建興國中）、李建宗（北門高工）林旻志（歸仁國中）、劉雅茵（台南科學園區實驗中學）

高雄市：廖惠儀（大仁國中）歐士福（前金國中）林義強（高雄女中）

屏東縣：陳冠良（枋寮高中）楊瓊茹（屏東高中）黃俊才（中正國中）

澎湖縣：何嘉祥、林玉芬（馬公高中）

金門：楊玉星（金城中學）張復凱（金門高中）馬祖：王連發（馬祖高中）