HPM通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）
助理編輯：李建勳、黃俊瑋（台灣師大數學所研究生）
編輯小組：蘇意雯（台北市立教育大學）蘇俊鴻（北一女中）
黃清揚（福和國中）葉吉海（新竹高中）
陳彥宏（成功高中）陳啟文（中山女高）
王文珮（青溪國中）黃哲男（台南女中）
英家銘（台師大數學系）謝佳叡（台師大數學系）
創刊日：1998 年 10 月 5 日　　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng

第三卷 第一期 目錄(2000 年 1 月)

- 「貼近」古典，向大師學習
- 柏拉圖【米諾】中的數學哲學對話（下）
- 0 與沒有
- 和角公式的另一種表徵
- 你願意再次參與「數學之旅」嗎？
- 回應

「貼近」古典，向大師學習！

洪萬生教授
台師大學數學系

數學知識成長一日千里，以美國數學學會（American Mathematical Society）出版的【數學評論】（Mathematical Review）所收錄的數學分支，1940 年元月創刊號只列出三十一種，在邁入千禧年的當口，則已高達九十四種了。在這種情形下，如何培養一個未來的數學家或數學教育工作者，大學數學系的教學，往往只能依賴精鍊再現形式與專技性知識內容（technical knowledge）結合的教科書，以便在最短時間內完成基本訓練。

如此一來，主導數學課程及教學的方式，無非是極為系統化的邏輯論述。誠如數學史家克蘭因（Morris Kline）所指出：這種方式往往使人產生錯覺，以為「數學家們幾乎理所當然地從定理到定理，數學家能克服任何困難，並且這些課程完全經過錘煉，已成定局。學生被淹沒在成串的定理中，特別是當他正開始學習這些課程的時候。」事實上，『教科書』在科學史上常常是鞏固革命成果的重要工具，它的『改宗』（conversion）功能，往往使得新一代的科學家感覺不到曾經發生的『革命』史實。（參考孔恩（Thomas Kuhn）在【科學革命的結構】（The Structure of Scientific Revolutions））於是，教科書的「編寫者」要不是『竄改』知識的傳承就是不自覺地忽略歷史，也因此『科學』與『歷史』變成無法對話的兩種知識活動，從而我們始終很難在（科學）教學與學習過程中，為『科學史』留下一個適當的位置。在數學史學（historiography of mathematics）這一方面，儘管「革命」概念是不是可以恰當地解釋數學知識的成長，史家持保留態度者始終居多，然而，數學史在數學課程及教學中的位置，也一樣隱晦與曖昧。

不過，數學教育史實卻不盡然如此。譬如說吧，一七二五年，尤拉（Leonhard Euler）在 Basel 大學向約翰白努利（Johann Bernoulli）問學，他所學到的不僅是當代的書籍與論文，同時還包括了古代的數學經典（mathematical classics）。挪威天才數學家阿貝爾（Niels Abel）曾在一本未出版的筆記本內頁邊緣寫下一句名言：「學子要想在數學研究上有所突破，他（她）就必須向大師而非他（她）們的徒弟學習。」顯然，他的意思是強調研讀「原典」或「第一手典籍」（primary / original sources）的重要性。

更值得注意的是，柏林學派的庫脈(Ernest Kummer，1810-1893)與外爾斯特拉斯(Karl Weierstrass，1815-1897）在「數學書報討論班」（mathematical seminar）中，也督促他們的學生必須「貼近」尤拉、阿貝爾、柯西（Augustin-Louis Cauchy）、蒙日（Gaspard Monge）以及卜阿松（Simeon Denis Poisson）的全集，提煉非凡的數學洞識，再輔以新近在 Crelle 與 Liouville 兩本學報刊登的論文之研讀，然後才可望作出原創性之貢獻。其實，前一代的柏林數學家如雅可比（Carl Jacobi，1804-1851）深受該校歷史語言學與考據學（philology）傳統的影響，不僅以考據學方法出版第一篇關於橢圓函數分類的數學論文，而且還曾經為了教授數論，前去考察梵諦岡圖書館收藏的戴奧番特斯（Diophantos）手稿；此外，他也曾向尤拉的第四代孫子富斯(Paul Heinrich Fuss)提出一個詳盡的尤拉全集出版計劃。

或許是時勢造英雄吧！柏林這個十九世紀下半葉的國際數學界之麥加城，竟然培養了一代的偉大學家如康托爾（Georg Cantor）、賀特那（Georg Hetner）。

柏拉圖【米諾】中的數學哲學對話

洪萬生教授
台師大數學系
北縣福和國中 陳昭蓉老師譯

（續前期）

(S 轉向 M 發問)

S：觀察在追溯過程中，他已經到達的階段吧。一開始他完全不知道 8 平方英尺的正方形邊長是多少，當然現在他也不知道；但是，之前他覺得他知道，並適當地勇敢地說出來，一點也不覺得困惑，然而現在他開始疑惑了。他不知道答案，也不認為自己知道答案。

M：很正確。

S：現在，對這個他不知道的問題，他不是處於一個較佳的狀態了嗎？

M：我承認是的。

S：像這樣發問、提供刺激因而使他感到困惑，對他有什麼傷害嗎？

M：我想應該沒有。

S：事實上，我們已經就找出答案這件事，給予他某種程度的協助了；因為他雖然不知道答案，卻很樂意去探究它。目前為止，就「尋找 8 平方英尺的正方形」問題上，他認為要取兩倍的邊長，並且在眾人面前表達得清楚又流暢。

M：毫無疑問，的確如此。

S：這個問題之前他不知道，但以為自己知道。在他尚未陷入困惑的處境，尚未察覺自己的無知，尚未感受求解的慾望之前，你認為他會主動去探究或學習這個問題嗎？

M：不會。

S：因此這段使他困惑的過程是否對他有益？

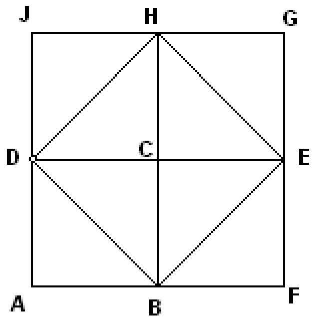
M：我同意。

S：接下來請你留意，即使我只發問而不教他，從這個困惑的階段開始，他仍會在我的陪伴下求得真理。你要隨時注意我是否僅止於發問；如果夾雜了指示或解釋，你隨時可以逮住我。

(蘇格拉底又畫了個圖形，再度開始)

S：孩子，你知道 ABCD 的面積是 4 平方英尺嗎？

B：我知道。



S：我們可以加上一個和它同樣大小的正方形 BCEF 嗎？

B：可以。

S：再加一個同樣大的正方形 CEGH 呢？

B：行。

S：把缺的這一角補滿(DCHJ)？

B：可以。

S：那我們就有四個等面積的正方形了？

B：沒錯。

S：整個的面積是第一個正方形面積的幾倍？

B：4 倍。

S：記得我們要找的正方形面積是 ABCD 面積的兩倍嗎？

B：記得。

S：我現在畫的線(EH、HD、DB、BE)是不是把每個正方形對分了呢？

B：是的。

S：這四個等長線段是否圍成一個區域 BEHD？

B：沒錯。

S：現在想想這區域面積多大。

B：我不懂。

S：這裡有四個正方形，而每一個線段都切出各正方形的一半，對嗎？

B：對。

S：BEHD 包含了幾個我們所說的「正方形的一半」？

B：四個。

S：那 ABCD 呢？

B：兩個。

S：4 對於 2 的關係是什麼？

B：是 2 的兩倍。

S：那麼 BEHD 面積多大？

B：8 平方英尺。

S：以哪一段為底？

B：這一段。

S：連接 4 平方英尺正方形的對角的線段嗎？

B：是的。

S：這個線段的專有名詞稱為「對角線」。有了這個名詞，你的說法就是，以某正方形的對角線為邊長做出的新正方形，面積是原正方形面積的兩倍。

B：是的，蘇格拉底。

(蘇格拉底再度轉向 M)

S：你說說看吧，他有說過什麼不是他自己想的嗎？

M：沒有。

S：幾分鐘前他還不知道答案---這是我們都同意的。

M：的確。

S：但這些想法是存在於他的思想的，對嗎？

M：是的。

S：因此一個對於某個主題毫無所知的人，其實是有一些正確的想法的。

M：看來似乎是的。

S：這些剛剛被激發的想法現在看來如夢似幻，很不真實。但假若同樣的問題在許多狀況中以不同的面貌呈現在他面前，你會發現，他可以對這個問題有準確的了解，就如其他人一般。

M：或許吧。

S：這些知識不由「教導」而來，而是由「發問」引導出來。他自己會去探索。

M：是的。

S：這自發的知識探索對他而言就是記憶的回溯，對嗎？

M：對。

S：他現在懂的這些知識，若不是在某個時候早已取得，就是他一直是擁有的。倘若他一直擁有，他自己必定知道；若他是之前某個時候取得的，除非有人教他幾何學，否則一定不是在這輩子。若學過幾何學，他會表現出學過的樣子。他既然一直在你的家中生長，你應該很清楚，曾經有人教過他幾何學嗎？

M：沒有人教過他。

S：然而這些想法他確實是擁有的，對嗎？

M：無可否認。

S：若他不是在這一生中得到這些知識，很顯然他是在其它時候獲得並擁有這些知識的，對嗎？

M：似乎是的。

S：在還未成為人之前嗎？

M：對。

S：很顯然他要嘛就是人，要嘛就不是人。既然在他是人或不是人的時候，他的思想中都有可以被激發、被轉化為知識的想法，我們是否可以說，他的靈魂一直處於具有知識的狀態？

M：很顯然。

S：如果對真理的認識一直存在我們的靈魂之中，而靈魂是不朽的，我們就必須鼓起勇氣去探索，也就是去追溯自己不知道的，或者更正確的說，不記得的。

M：不知怎麼的，我相信你是對的。

S：我認為我是對的。雖然我不需為這整個理論起誓，然而我已準備好盡我所能，以言語和行動捍衛一個理念----如果相信探索我們遺忘的知識是正確的，我們應當更努力更勇敢更主動。倘若自己都覺得無需探求，我們永遠也無法獲得它。

M：關於這一點，我也確信你是對的。

0 與沒有

林炎全老師

教育部台灣省中等學校教師研習會研究員

在感覺上０與「沒有」的關係是很密切的，例如０個蘋果就是沒有蘋果。但是它們畢竟還是不一樣。例如一位同學（Ａ）數學隨堂考考０分，另一位（Ｂ）請假沒考。老師的記分簿裡，A的記錄是０，B的記錄是空白。它們一樣嗎？讓我們再看兩個不易分辨的例子：答案為０，沒有答案；斜率為０，沒有斜率。

古代非位值制的記數法如古埃及的，古羅馬的，並沒有缺位的觀念，所以不需要一個代表缺位的符號。但是像巴比倫與中國的記數法屬位值制，就需要有代表缺位的符號。起初，大家都不知道用什麼符號比較好，很自然就在缺位的地方留一個空白。但是這種「沒有符號」的符號，似乎不是很好的設計。古代沒有間隔一致的印刷版面，空白的大小不易控制。到底有沒有空，空了幾格，都很容易引起爭論。後來逐漸形成用「０」代表缺位的共識。巴比倫的記數法到希律希底(Seleucid, 約 300~0 B.C.)時代，就採用這個符號代表缺位。根據李約瑟的說法，中國最早用「０」代表缺位的印刷算書是宋朝秦九韶所著的《數書九章》(1247 年)。印刷術是宋朝才發明的，印刷的書籍當然不會比它早。筆者猜測，應該有更早的手寫算書，採用這個符號。

紀元後 600 年代之後，印度人逐漸把０當做一個數字看待。印度的數學家馬哈維拉(Mahavira, 約紀元第九世紀)曾說以０乘一個數得０，而減去０則未減小一個數。他甚至考慮除以０的運算，結果是除以０後不變。另一印度數學家巴斯卡拉(Bhaskara, 生於 1114 年)則認為以０為分母的分數，不論再加多少或減多少均不變。這至少已經接近現在的無限的概念。中國方面，《張邱建算經》(成書於隋朝之前)卷下最後的百雞問題，顯示當時並沒有把０當做數。這個問題是：１隻公雞、１隻母雞、３隻小雞各值５錢、３錢、１錢。一百錢要買一百隻雞，問各買幾隻？書中提出三組答案：4、18、78；8、11、81；12、4、84。按照所提供的算法，可以算出另外一組 0、25、75。但它並沒有被接受。可見當時還是只把０當做缺位的符號，不能參與運算。事實上，明朝程大位的《算法統宗》所標示的數碼只有九個，０並不在其中。筆者沒有資料顯示在西方數學傳入之前，中國已經把０當做一個數字。

你有學生或同學分不清：答案為０、沒有答案或斜率為０、沒有斜率之間的區別嗎？如果有，一點都不要覺得奇怪，也不要覺得他(她)們笨。他(她)們只是把０和「沒有」之間黏得太緊，還未把０抽象為一個數。中國人的祖先幾千年來就一直是這樣的。

和角公式的另一種表徵

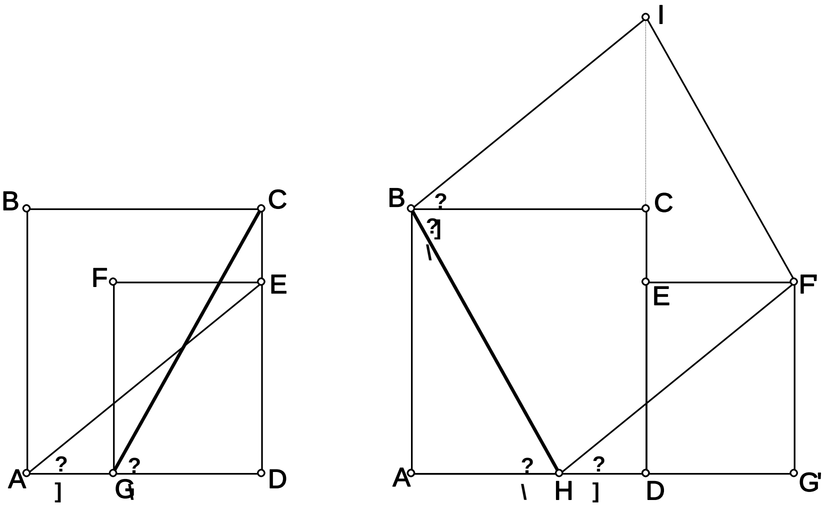
張簡漢華老師

北縣錦和中學

在之前的 HPM 通訊中，曾經刊載有關倍角公式的幾何說明，其內容真是令我感到訝異，那時才知道原來倍角公式可以用幾何中面積的方式呈現，雖然只用面積的方式，並不能說明所有的情況，只能說明某一種特殊的情況之下，但這已足以讓學生瞭解到數學的另一種相通之美；或許有人會認為這些方式有點畫蛇添足，但我相信，對同一種東西多一點不同的詮釋，對某一些學生有一定的啟發性，也將使你的教學內容多一點色彩。

後來在參加某一次的研習中，聽洪萬生教授的演講時，又再次看到那份資料，我才注意到：怎麼洪教授的資料中，沒有有關和角公式的幾何說明，卻直接跳到倍角公式，所以我決定自己嘗試看看。很巧的，正當我如此想時，交大黃大原教授於另一場演講提出了另一份資料，是有關和角與和差化積公式的幾何說明；不過，在和角公式方面是用長度方式說明，而非面積方式，所以我繼續朝著以面積方式說明和角公式研究，以下就是我的研究結果：

（一）



$\overline{AE}=\overline{CG}=1, \square \mathrm{DEFG} \cong \square \mathrm{DEF'G'}, \overline{\mathrm{AH}}=\overline{DG'}=\overline{DG}, \therefore \overline{BH}=\overline{CG}$,同理$\overline{\mathrm{HF'}}=\overline{AE}$,

作平行四邊形 $HBIF'$,則平行四邊形 $HBIF'$面積 $=\square ABCD$面積 $+\square \mathrm{DEF'G'}$面積

$(\because \Delta ABH \cong \Delta EIF', \Delta F'G'H \cong \Delta ICB)$

$=\square ABCD$面積 $+\square \mathrm{DEFG}$面積

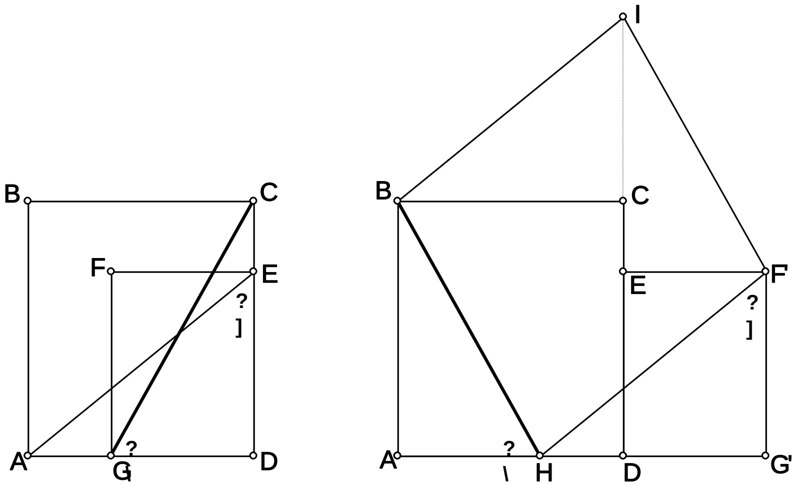
平行四邊形$HBIF'$面積 $=\overline{BH}\cdot\overline{BI}\cdot\sin\angle IBH=\sin(\alpha+\beta)$

$\square ABCD$面積 $+\square \mathrm{DEFG}$面積 $=\overline{CD}\cdot\overline{AD}+\overline{GD}\cdot\overline{ED}$

$=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$

所以$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$

（二）



將 β 的位置調整一下,此時

平行四邊形 $HBIF'$ 面積

$$= \overline{BH}\cdot\overline{HF'}\cdot\sin\angle BHF'$$

$$=\sin[(\frac{\pi}{2}-\alpha)+\beta]$$

$$=\sin[\frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta)]=\cos(\alpha-\beta)$$

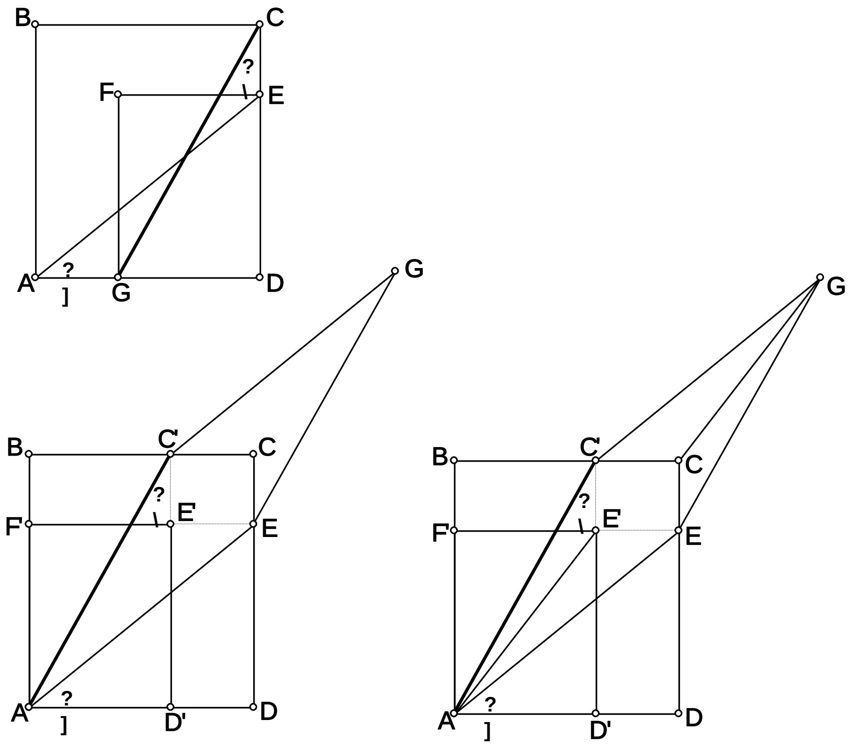
$\square ABCD$面積$+\square$DEFG面積

$=\overline{CD}\cdot\overline{AD}+\overline{GD}\cdot\overline{ED}$

$=\sin\alpha\cdot\sin\beta+\cos\alpha\cdot\cos\beta$

所以 $\cos(\alpha-\beta)==\sin\alpha\cdot\sin\beta+\cos\alpha\cdot\cos\beta$

（三）



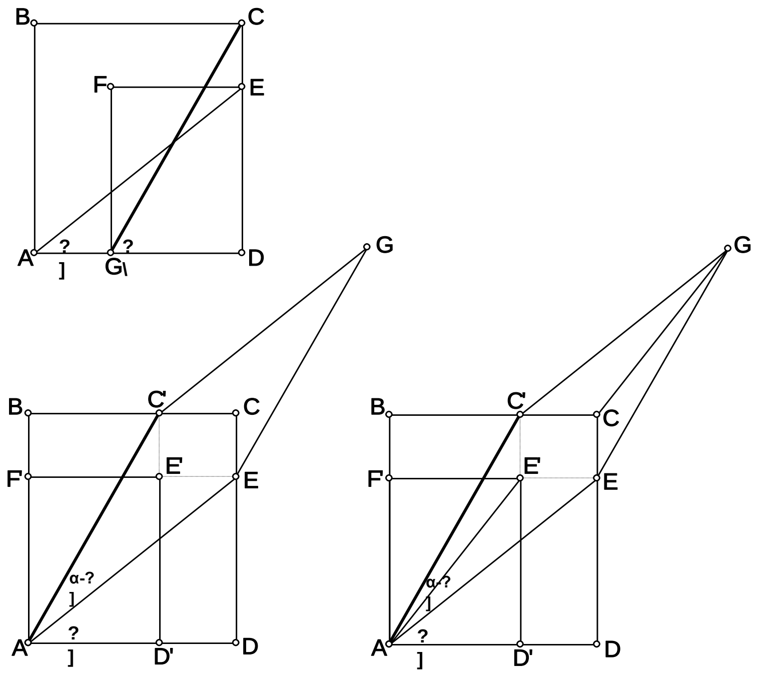
平行四邊形$AC'GE$面積 $=\overline{AE}\cdot\overline{AC'}\cdot\sin\angle C'AE=\sin[(\frac{\pi}{2}-\alpha)-\beta]$

$$=\sin[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)]=\cos(\alpha+\beta)$$

$\square ABCD$面積 $-\square$DEFG面積 $=\overline{CD}\cdot\overline{AD}-\overline{GD}\cdot\overline{ED}=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$

所以 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$

（四）



將α的位置調整一下,此時

$\overline{AE}=\overline{CG}=1, \square\mathrm{DEFG}\cong\square\mathrm{D'E'F'A}, \therefore \overline{AC'}=\overline{GC},$

作平行四邊形 $AC'GE$,則我們將可以證明

平行四邊形$AC'GE$面積 $=\square ABCD$面積 $-\square\mathrm{D'E'F'A}$面積 $=\square ABCD$面積 $-\square\mathrm{DEFG}$面積

可知$\Delta AC'E'\cong\Delta GEC, \Delta AEE'\cong\Delta GC'C$

$\because \Delta AC'E'$面積 $=\dfrac{1}{2}\square BC'E'F'$面積............................(#)

$\therefore \Delta AC'E'$面積 $+\Delta GEC$面積 $=2\cdot\Delta AC'E'$面積 $=\square BC'E'F'$面積

同理$\Delta AEE'$面積 $+\Delta GC'C$面積 $=\square DD'E'E$面積

平行四邊形$AC'GE$面積

$=\square CC'E'E$面積 $+(\Delta AC'E'$面積 $+\Delta GEC$面積$)+(\Delta AEE'$面積 $+\Delta GC'C$面積$)$

$=\square CC'E'E$面積 $+\square BC'E'F'$面積 $+\square DD'E'E$面積

$=\square ABCD$面積 $-\square\mathrm{D'E'F'A}$面積 $=\square ABCD$面積 $-\square\mathrm{DEFG}$面積

平行四邊形$AC'GE$面積 $=\overline{AE}\cdot\overline{AC'}\cdot\sin\angle C'AE=\sin(\alpha-\beta)$

$\square ABCD$面積 $-\square\mathrm{DEFG}$面積 $=\overline{CD}\cdot\overline{AD}-\overline{GD}\cdot\overline{ED}=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$

所以$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$

眼尖的讀者或許已經發現，(一)(二)中所用的方式跟國中第三冊教師手冊上所列四個商高定理證明的第四個(阿拉伯數學家 Thabit ibn Qurra 的證法)一樣，是以切割再重新拼補的方式；而(三)(四)則在(#)式的部分應用幾何原本中，歐幾里得對畢氏定理的證法一樣的方式(註)而得到。

註：第一卷命題 41—如果一個平行四邊形和一個三角形同底，而且在二平行線之間，則平行四邊形是這個三角形的兩倍。

你願意再次參與「數學之旅」嗎？

唐書志老師
北市百齡中學

一、楔子

有沒有人曾經想過：從事非關數學工作的自己與家中長輩，還會在踏入社會之後，再度拾起數學課本，繼續（或開始）學習與關心數學？如果真有如此機遇，那又將是什麼樣的感覺？

有一天，我在聯合報上（民國 87 年 3 月 15 日 16 版）看到一則關於「媽媽讀書會，放膽讀數學」的報導。很顯然的，記者使用「放膽」做為新聞主軸。報導中的主角媽媽們，處處顯露諸如「數學，好久都沒碰過了」、「這是揭以前的『瘡疤』，讓舊傷口浮現」等等的想法，以及後來發覺「原來數學這麼有趣」的戲劇性心理轉折；請各位注意報導裡所引用的文句和語氣，原來，「放膽讀數學」、「鼓起勇氣再度接觸數學」也算是一則「新聞」啊！如果你知道民國 85 年來台參加關懷聽障宣導活動的一九九五年美國小姐 Heather Whitestone 與北一女學生座談分享人生觀，提到自己高中最喜歡的科目是「數學」時，竟然引起「全場一陣嘆服」（民國 85 年 5 月 19 日民生報），那麼你一定不難猜想一般人聽到日本女星廣末涼子在「秘密日記」中自述數學是他最拿手科目（民國 88 年 10 月 29 日自由時報 42 版）之後的第一反應？

二、我在過去兩年的工作成果

從學術觀點或平民角度來看，數學這個領域早就令人望之儼然，可能也正因為如此，大家往往賦予它更多與數學理論無關的價值和評斷，同時在有意無意之間將數學同其他想法結合起來。例如 NCTM（National Council of Teachers of Mathematics）、NRC（National Research Council）以及部分數學家們（ex.: P. J. Davis, R. Hersh and so on）都曾經想用不同角度與例證去說明數學應該被視為工業及資訊世界的基石，或者描繪它在個人求學與社會演進過程裡所扮演的關鍵角色（像是發揮某種「篩檢」人才的功能）；我們也常會認為擅長數學的人彷彿有某種特殊的天份，B. M. Foss 便曾為 R. Skemp 的《數學學習心理學》寫過這樣的序言：「從心理學來說，數學是很奇怪的一科。就像我們說有人愛貓、有人愛狗一樣，數學似乎也把人們分成兩大陣營，有人是高手、有人一竅不通，或者說他們自認為一竅不通並且在第一次碰到不懂的符號時立刻劃地自限。」——是故，雖然增強並改善數學教育與數學知識傳播的效能已成為教育界的重要課題，然而仍然有不少人在人生初期便苦於應付變化多端的數學，成為只能嘆服別人數學成就的一群，甚至是個「數學弱勢者」。

我所說的「數學弱勢者」，指的是數學學習之路上，走得相對艱辛的一群。這一群人也許是受制於外在環境或制度，也許是受制於內在能力和興趣，他們的共同點，乃是自己無法獨力走在數學學習的路上。如果數學學習是一條必行的旅程，那麼從許多史料、研究與經驗中可以發現，不是每個人都能在這趟旅程裡行走得輕鬆愉快的。

說明：

我的研究方法乃是植基於「質的研究」理念。這種理念與以往計量為主的研究方法所強調的不同。例如這裡所說的「參與者」，指的是一般計量研究裡的「研究對象」；但是質性研究者認為在進行觀察與記錄的同時，無可避免地將有交互作用發生，故名之為「參與者」。也因此，研究歷程與研究者的角色定位亦是此類研究中不可或缺的部分。

過去兩年，我曾經在台北市的某所商科高職補校裡進行教學，並且利用「實地研究」（人類學中常稱為「田野研究」）的方式進行觀察與記錄，期望能夠在實地深入認識並瞭解高職補校學生文化中的數學與數學學習，同時探討從研究進展過程浮現出來的現象以及凝聚而成的問題。有時候我會想，我們從事數學教育的對象似乎常是較為年輕的一群人，而這群人又多是正規教育制度下的學習者；倘使數學知識真是人類文化的共同結晶，那麼我們實在沒有理由不去理會那些非正規教育制度下的學生，或者及長才有機會一親數學知識芳澤的人士——這些人，正是前面所提到「數學弱勢者」中的一份子。此外，就學術研究的層面來說，我們對於這群高職補校學生的數學學習特性以及數學課中的關懷焦點所知仍然不多，實地研究或許能增進我們的知識內容，甚至啟發我們的想法與視界。

說明：

•「基礎研究（basic research）」的目的是為了求得知識，冀望能瞭解「世界」運行的方式與現象中的本質，不同於「應用研究（applied research）」與「行動研究（action research）」。基礎研究者的目標是能夠「瞭解（understand）」和「解釋（explain）」。

•「三角交叉法（triangulation）」是質性研究中常見的資料蒐集與複核原則，強調多元資料的相互參照與檢驗。

•「歸納分析（inductive analysis）」是質性研究裡分析所得資料的方法，基本上是一種歸納與分類的過程，以尋得蘊藏於資料之中的本質、特性或關連。

這份研究的初步成果，記錄在我的碩士論文中。在我的研究裡，「參與者」是補校資料處理科兩個年級的 40 位女學生。我依據研究目的將本研究定位為「基礎研究」，秉持「實地研究」理念，以進入實地從事自然現場的深度探訪做為蒐集資料、達成研究目的之重要步驟；同時參酌「三角交叉法」的精神，採用「歸納分析」的方法分析研究所得資料。我在本研究中的角色定位則是這群學生的「數學教師」。

經過將近三個學期的現場瞭解，在分析了包括學生上課相關文件、非正式晤談與教室觀察紀錄等資料後，我至少在這群高職補校學生「數學印象」以及「生活與數學」間聯繫的想法上獲致發現，並加以報導，從而建立以數學（M）、人（P）與時間（T）為主要向度的「MPT 動態模型」，藉以描繪本研究參與者的數學印象模式及對於「生活與數學」的相關想法。種種想法顯示，學生在「接近數學」的歷程中，會對自己所有的生活經驗（包括人際關係、數學經驗等等）進行統整處理，而這些處理包含了「理性」、「超越」與「虛擬」的成分，使得「我」的「數學經驗」和體會，並不全然源自本身的實作經歷，亦有可能從對別人的觀察，或是閱聽電視、書籍等得來，虛擬形成自己的經驗和數學印象。

我也利用蒐集到的資料與分析結果，試圖從高職補校學生的角度探討數學教育的存在意義及可能扮演的角色，進一步討論成人學習數學的可能性、必要性和他們期待數學教育回應的方式。結果發現：成人確實有學習數學的可能，在他們自發的表現中，「必要性」也不一定非得從「實用」角度切入設

想，同時這群已有社會工作經驗的學習者，會期待數學教育回應的內容包含許多對於生活內涵與品質的更深層需求——包括了數學知識本身以及悠游於知識的生活知覺在內。

三、讓數學教育在人心埋下足以發展的種子

要回顧這段研究歷程，本研究據以進行的基本理念和方法是必須說明的重要部分。我所做的應該是真實、自然環境之下，未刻意設計實驗的探究工作，因此在過程中會盡量以「瞭解」而非「證實」的態度進行並忠實記錄，不為學生預設立場、也不批判研究中浮現的內容。除了盡可能蒐集深度資料與保持研究彈性外，我還視「變動」為常態，並且敏感於脈絡裡的關連，將「全體」看作一個複雜的系統，而非單純以離散或線性的因果關係簡化任何觀察到的現象。這些都是從事質性研究的前提。

基本上，我發現研究歷程裡看到的正是這群學生從以前到現在、甚至可能延續到未來的數學經驗整體發展過程，我稱它為「體驗數學的旅程」，或是「數學之旅」。無論學生透露自己「從小就是數學白痴」，還是「一向對於數學都沒有困難之處」，我們都可以看到時間在數學印象裡刻下了明顯的痕跡，讓人感受無遺。雖然學生的年齡從 17 歲分布到 60 歲（17-20 歲有 24 人，20-30 歲有 12 人，40-50 歲 2 人，50 歲以上有 2 人），但是在這段「旅程」中，每個學生豐富多樣的知覺都同樣使「數學」與「生活」密切相連為一個整體；整體中可能有令人驕傲的記憶，也可能有讓人感傷的場景，但無論如何，他們也似乎會帶著這些富含知覺的數學經驗繼續往生命的未知邊疆開拓出去，一如從過去帶著這些數學經驗走來。有趣的是「數學」這個字眼在他們心目中好似裹上了不同於數學專家所見的朦朧色彩，我開始能夠稍稍理解 Whitestone 和廣末涼子回想數學在他們生命中地位的心情了；如果你有機會看到我的碩士論文，我會極力建議你抱持著對「人」進行瞭解的心情閱讀。陪伴他們走過一小段「旅程」的我不禁也同時思索起自己的「數學之旅」，還有眾人的「數學旅行環境」，使我至盼有更多的人能參與這個行列，一同思考和享受這些問題；但我也建議各位應該先翻開這本論文，看看這群高職補校學生的「數學之旅」，聽聽他們很少被人聽到的聲音。這或許也是探索數學學習在生命中所扮角色為何的另類起點吧。

藉由察覺與討論浮現自學生身上的現象模式，我進一步認為數學教育應可參考「終身學習」的觀點理論通盤考慮設計。一般說來，「終身學習」談的是個人「貫串一生的學習」，是「終其一生」的學習態度與學習歷程，更是個體在一生中「持續發展」其知識、技巧和態度的過程（引聯合國教科文組織與美國聯邦政府的定義）；它不但重視個人「發展」與「學習的整體性、貫串性」，也強調「自我導向學習」，不拘學習內容，更不拘學習場域和學習形態。這與本研究中浮現的個人整體數學經驗發展頗有異曲同工之趣。另一方面，當越來越多人認同「足供學習的時間可以拉長（拉長到一輩子！）」、「一生中任何時候都有（各種不同的）發展，發展可以在任何時候開始」，我的一位 60 歲學生的說法就很值得我們為人師者深思：

> 學習對於天賦聰明的反應比較快，容易領悟，但是老師教學很重要，不要讓學生產生厭惡，起跑慢的也許耐力十足，即使離開學校，<u>因工作需要再學習，進步更是驚人</u>，社會上有許多傑出人士，其學歷並不高，但其後續學習的確有博士的程度。

再進一步想想，如果今天的數學教育確實是為迎接將來做準備，那麼在這些學生的數學旅程當中，數學教育該如何保持與豐沛他心田的活力——保住學生學習數學的興趣與動力，保住學生繼續發展學

習的基礎知識與能力，保住學生對於自我的期望與潛力，盡量在當下的生命沃土裡植入日後可以繼續發展的「種子」，應該是我們必須思考的重大課題。我稱呼這個想法為「數學教育終身學習」的隱喻，即便是「種子」不易發芽茁壯，最終也冀盼能對「土地」（學習者）有所貢獻。我同意這群高職補校學生的學習特性不能任意推廣到其他年齡層的學生身上，但是我也確信勢將無法輕忽這些學習特性帶給我們的反思。像是數學教育裡的終身學習議題，以及終身教育裡的數學學習科目都可能會是社會上參與學習人口愈來愈多、平均壽命愈來愈長以及社會條件愈來愈適合多元學習時難以迴避的主題。

我在研究中還發現，只是單獨強調知識或強調實用，對他們似乎都失之偏頗，都是小覷了學生的心智以及在實質層面、精神層面上的需求。根據研究成果和從中獲得的反思，我在報導研究成果的論文裡也對有興趣的研究者或數學教育工作者提出若干建議，其中包括可以繼續共同努力的主題與方向，我相信，我們沒有理由認為「數學」只和兒童與年輕人有關，數學教育與成人教育、終身教育聯繫的這塊領域仍將會是許多人繼續深入探究的範疇。

四、尾聲：對於開場問題的回應

發掘這些現象與問題後，即使無法遍閱所有人重拾數學課本的想法及感受，我開始有一個夢：我希望我和我的學生都能在自認有所成就的時候，告訴子女，自己永遠有勇氣與信心開始一段新的數學之旅。然而當我的研究資料顯示：終身學習早已是不少人正在實踐的行動、世人的學習有不拘時地不限主題的整合趨向、不同領域的知識和不同形態的能力可以交相統整時，數學教育界會想要帶給大家什麼樣的數學之旅呢？

「圓錐截痕與二次曲線：一個數學老師的無聊之舉」作者回應《HPM 通訊》第二卷第十二期(1999 年 12 月)之〈管窺集〉

鄭英豪老師
北市中國工商專科學校

說真的，若不是窮極無聊，誰會去寫自己不懂的東西？

我是個數學史的門外漢，對如何瞭解數學的歷史其實沒什麼概念，如果我必須用到、知道一些數學史，通常就是翻書，翻自己有的、書局陳列的數學史的書，然後把「讀到的」當作「就是」，通常自得其樂，沒有人會懷疑我究竟知不知道，畢竟大家都知道我不是搞這個的，不會有人考我，就像我通常不會去問搞代數的同事幾何裡為什麼限定尺與規、也不會去問作 PDE 的同事為什麼群環體之後還要來個 category 一樣，不是那一行的，沒人指望你會那一行的東西。

可是學生沒那麼世故，對學生來說，數學老師就是數學老師，所有的數學都該知道，跟數學有關的都得會。

探究圓錐曲線的發展是學生引動的，如我文章裡所說，學生問的許多問題讓我覺得應該要在歷史裡找答案，於是就去讀書，這點跟大家都一樣，反正讀了就多知道些，不一定教，但總是該知道。我並不驚訝以前學到的跟真的歷史不同，也不害怕自己原來知道的那麼有限，當一個老師，即便學生再怎麼崇拜相信，畢竟也只是年輕的血肉之軀，所知本來就不多，我所在乎的是，一旦解開課堂上話語的禁錮，學生的問題我該如何解決，還有，不同的學生要用什麼不同的方法來解決。

數學老師很容易感覺到數學問題，就像我的學生問我的，表面看來都是數學問題，為什麼這樣為什麼那樣之類的，解決這些問題有很多方式，閱讀、請益、自己走一遍都可以，不過我會在知道更多後逼迫自己去想一個問題：「對不是數學圈內人的學生來說，我所知道的數學知識有什麼意義？」。

我相信很多人相信不管老師學問多好、講課多精彩，老師該照顧的還是學生的學數學，講故事、談應用都只是引起動機、活化氣氛的手法，主體還是數學，抽象的、形式的數學結構的心靈複製是學生學數學的目的。歷史一直是配角，甚至只是路人甲或遠方的浮雲，主角仍是數學結構，觀念、定理、演算、解題等等，基於這樣的相信，數學老師塑造了一個無形的話語禁錮，學生會知道什麼是重點、什麼是要考的、什麼只是引起動機的、什麼只是閒聊打屁的，然後，什麼是該說該問的、什麼是不該的。

五專數學的課程架構與高中相當，同樣有圓錐曲線，與高中不同的是，那是一個獨立章節，從圓開始，前面沒有空間幾何。圓錐曲線的應用價值對五專生而言毫無意義，學校裡一卡車的技職?