HPM 通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系退休教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）
助理編輯：黃俊瑋（和平高中）
編輯小組：蘇意雯（台北市立大學）蘇俊鴻（北一女中）
葉吉海（桃園陽明高中）陳彥宏（成功高中）
英家銘（台北教育大學）
創刊日：1998 年 10 月 5 日
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng
聯絡信箱：suhy1022@gmail.com

第二十一卷 第十一期目錄(2018 年 11 月)

台灣數學普及三十年

洪萬生
台灣師範大學數學系退休教授

科學普及書籍出版在台灣開始有「經濟規模」效應，應該是出自曾經是科學月刊社中堅份子林和、牟中原、李國偉及周成功之策劃。**1990** 年代，他們聯袂向天下文化出版社推薦，引進當時風行於英美出版界的科學人文書籍。這些以普及為目的出版品多半出自科學名家，其科學文化修辭（**rhetoric**）不難擄獲一般知識份子的品味。譬如說吧，戴森 **(Freeman Dyson**）的《全方位的無限》（***Infinite in All Directions***）（**1991**）就是一個絕佳範本。儘管它已絕版，不過，天下文化網頁（**https://bookzone.cwgv.com.tw/books/details/BCS003**）還保存有關該書的推薦語：「普林斯頓高（級）研（究）院的戴森教授是科學界的通人，他以高超的智慧和過人的勇氣，跨越科學的門檻，思索宇宙與人類心智的緊密關連。」

這種訴諸科學博學通儒的「究天人之際」之胸懷，對於科普書籍的印行與推廣，自然帶來莫大的助益，或許這也可以解釋何以這三十年來，科普書籍在台灣出版界所佔的比重，始終不容低估。由於數學普及也在這個科學文化的推波助瀾之下受到矚目，因此，數學普及書籍的出版不僅連帶受惠，甚至有後來居上之勢。譬如，系出科幻小說（**science fiction**）的數學小說（**mathematical fiction**）顯然已經自成一個文類（**genre**），吸引了許多傑出職業作家投入，他們的創作不僅怡情養性，同時也發揮不可思議的「認知」效果，是普及閱讀不可多得的選擇。[1]

在本文中，我將以過去近三十年來國內所出版的數學普及書籍為例，說明其書寫之面向或特色，聊供關心本土科普活動的有志之士參考借鏡。不過，我也將略論數學普及作家的主張，以及數學普及作品之分類，作為相關作品特色刻畫之依據。

[1] 請參考洪萬生，《數學小說閱讀筆記》，新北市：遠足文化出版社，**2017**。

一、數學普及的主張

數學普及（**popular mathematics**）的訴求對象，正如科學普及（**popular science**）一樣，是非（科學）專業的社會大眾。從務實的角度來看，這些大眾當然包括少數握有國家預算的決策菁英或其諮詢顧問，要是他們多少接受科學文化之薰陶，那麼，或許他們就會友善地對待科學研究預算。這其實也是二戰之後，史諾（**C. P. Snow**）那麼憂心所謂的兩種文化（**two cultures**）鴻溝的主要原因之一，因為當時英國內閣大臣及國會議員鮮少出身科學專業。因此，讓非科學專業人士分享科學文化的風雅，而在國家預算分配上嘉惠科學研究，顯然是這些科學名家十分在意的目標之一。其次，科學 **vs.** 迷信（或甚至目前大眾媒體資訊操弄所造成的理盲）的鮮明對比，一直也是科學文化旗手的主要修辭策略，不過，在數學普及文化訴求中，這個對比無法引發爭議，因為數學是非分明，「正信者」（**true believer**）的操作自然沒有什麼空間。

不過，對於數學家兼數學普及作家來說，為了正當化國家社會資源的爭取，他們也必須採用普及手法以說明數學作為一個學門的意義、價值及用途。然而，由於數學知識的專業（內容極端抽象艱澀）遠非一般人可以企及，因此，正如史都華（**Ian Stewart**）指出，數學普及（**popular mathematics**）在詞義（一個形容詞，一個名詞）連結上自我矛盾。同時，數學不時被貶抑、被低估乃至被誤解，像極了一種他所比喻的「灰姑娘式的科學」（**Cinderella science**）。為了改善這種處境，史都華認為「數學普及至少提供一種門徑，讓非專家無須拼鬥艱難無比的數學專門技巧，就得以體會數學從何而來？誰創造的？做什麼用的？它終將往何處去？這就像是聆聽音樂而無須學習作曲一樣。」（**https://www.theguardian.com/books/2012/jan/18/ian-stewart-top-10-popular-mathematics**）

這種對於公民素養的數學博雅期許，並非全然出自數學家或一些科普作家的道德承擔或社會責任感，更多時候，或許是基於他們企圖分享的一種知識獵奇（**intellectual curiosity**）品味。這種書寫有時甚至「超越」相關（大學）教科用書的品質，讓自學者可藉以掌握實質內容知識。譬如說吧，科普作家結城浩（**Hiroshi Yuki**，本業程式設計）或物理學家大栗博司（**Hisrosi Oguri**）有關伽羅瓦理論（**Galois theory**）的論述與敘事，[2]就是此一理論的絕佳教材，甚至連高中程度的讀者，都可以找到恰當理解的切入點。相形之下，史都華或李維歐（**Mario Livio**）的相關著作就多少顯得「語焉不詳」，[3]無從對非專業讀者提供五次方程根式求解的實質內容知識。日本 **vs.** 英美作品這種「推進」數學普及的鮮明對比，非常值得我們參考與借鏡。

上述這個面向，看起來是數學普及書籍所獨有。此外，數學小說這個新文類，也在傳統科幻小說創作的「強敵環伺」中脫穎而出。這是我們推動數學普及時必須高度重視

---

[2] 參考結城浩，《數學女孩：伽羅瓦理論》，新北市：世茂出版公司，**2014**；大栗博司，《用數學的語言看世界》，台北：臉譜出版社，**2017**。

[3] 參考 **Ian Stewart** (史都華), ***Why Beauty is Truth: A History of Symmetry*. New York: Basic Books, 2007**；李維歐，《無解的方程式》（***The Equations That Couldn't Be Solved***），台北：臉譜出版社，**2008**。

的議題，在下一節中，我將略事說明。

二、數學普及讀物分類

數學普及讀物大致可分為三類。第一類是數學小說（含電影、舞台劇、漫畫及繪本等），正如前述，它是一個新興的文類，既是一種（文學範疇中的）小說，也可歸屬於數學普及書寫。過去，由於創作量有限，因此，數學小說常被歸類為科幻小說，比如說，**A. J. Deutsch** 的數學小說〈名為莫比烏斯環的地鐵〉**(A Subway Named Mobius, 1950)**，就被艾西莫夫（**Isaac Asimov**）收入十七篇傑出的科幻短篇小說選集 ***Where Do We Go From Here?*** 之中。此外，數學詩（含散文）及數學繪本也被歸類為數學小說，儘管詩或散文有時純粹關乎想像而無涉敘事。

無論如何，數學小說成為一個全新的文類，是最近幾年才出現的一個文化現象。正如前述，數學小說不過是科幻小說的子類，直到過去二、三十年來，數學小說才發展成熟，而成為一個不可忽視的創作文類。根據我的粗陋觀察，日本傑出作家小川洋子（**Yoko Ogawa**）在 **2003** 年出版《博士熱愛的算式》(同名電影版 **2004** 年發行)，應該可以視為數學小說獨立成為一個文類的忠實見證。**2009** 年，加拿大作家艾莉絲・孟若（**Alice Munro**）出版《太多幸福》**(*Too Much Happiness*)**，對數學小說帶來了更多「加持」，那是根據俄羅斯女數學家索菲亞・柯巴列夫斯基（**Sophia Kovalevsky, 1850-1891**）的傳記創作而成的短篇小說。**2013** 年孟若榮獲諾貝爾文學獎桂冠，本短篇小說也成了她最得意的代表作品之一。

另一方面，數學普及讀物還有一大類與傳統的趣味數學問題有關，目前這個文類又向（仿綜藝表演的）「數學魔術」、（美術勞作相關的）「摺紙玩數學」，或以高等數學為張本的「藝術創作」等三個方面擴張，讓數學知識活動有了全新的「遊戲」意義。在可預見的未來，魔術師、摺紙達人或（數學）藝術家將會介入數學教育現場，[4]也讓我們得以想像「制式教育」的教學評量在「獨斷的」紙筆測驗之外，還有極大的「另類」空間可以揮灑！在這個關聯中，或許我們也可以將親子教養主題的數學書籍歸入此類，因為這些著述意在「喚醒」為人父母的生活數學經驗，對於幼童的數學教育思考頗有啟發。

除了上述兩大類之外，數學普及讀物還有大量涉及數學知識或概念的演化史，乃至於數學與文化的互動關係。這是從數學的歷史與文化面向來書寫的普及作品，作者大都從數學（文化）史取經，在歷史文化脈絡中說明數學的價值及意義，譬如，毛爾（**Eli Maor**）、史特格茲（**Steven Strogatz**）、史都華、艾倫伯格（**Jordan Eilenberg**）、洛克哈特（**Paul Lockhart**）、桑托伊（**Marcus du Sautoy**）、德福林（**Keith Devlin**）等英美數學家、小島寬之、岡部恆治等日本數學家，或如曹亮吉等本土數學家乃至我自己帶領的團隊成員，無不嘗試在普及論述及敘事中，分享他們有關數學及歷史的雙重洞察力。事實上，這些作品的確都洋溢著數學的博雅素養，其中涉及數學史的基本功夫，則是不爭的事實。

---

[4] 在此將摺紙達人（業餘的）與藝術家（職業的）分列，只是權宜之計，沒有不敬的意思。

三、數學普及的全新風貌

根據上文的簡要說明，以及我所撰寫的數十篇數學普及書籍深度評論，[5]近三十年來，數學普及書籍的書寫與出版，的確呈現了如下特色：

・主題訴求變得（比起一般科普）更加多元。譬如，以普及書寫來論述教育改革議題，[6]或者以更貼近讀者心靈的手法，詳述某一理論（如伽羅瓦理論）內容全貌，對即使是專家讀者而言，也裨益良多。
・數學小說異軍突起，職業作家積極投入，在故事情節（**plot**）中融入數學知識活動，讓此一文類也發揮知識普及的功能。
・數學家採取數學文化史進路書寫時，對於數學史文獻（無論是原始典籍或史家研究報告）都相當得心應手，總能分享他們豐富多元的數學經驗。
・前述英美數學普及作者有多位是傑出數學家，而且，在他們生涯早期即投入普及書寫，或許他們在數學家養成階段已發為宏願。[7]

由此可見，數學普及書寫及出版，已經成為國際數學文化創新中，不可或缺的一個重要環節。即使我們只是根據中譯本的少量資訊，也足以看出此一主流趨勢。我們的普及書籍大都仰賴英文或日文著作的中譯，顯然還不夠資格談論創新。不過，究竟該如何因應此一潮流，卻是我們的數學家社群及科學文化界必須共同面對的課題，我們責無旁貸。

2018/9/28 附記：本文曾刊於 **Open Book** 閱讀誌。

---

[5] 參考台灣數學博物館舊網頁「科普特區・深度書評」（**http://mathmuseum.tw/old/**）。
[6] 參考洛克哈特的《一個數學家的嘆息》及《這才是數學》。
[7] 史特格茲是康乃爾大學應用數學講座教授。史都華是英國皇家學會院士。艾倫伯格擁有創意寫作碩士學位。桑托伊是牛津大學數學系教授兼科普講座教授。德福林是南加州企業界的數學顧問，也是電視影集《數字搜查線》（***NUMB3RS***）的數學編導顧問。

和算家安島直圓及其重要算學成就(I)

黃俊瑋
台北市立和平高中

一、 前言

十八世紀末期，關流算學研究上最重要且最具代表性的人物要屬安島直圓（**Ajima Naonobu, 1732 - 1789**）。在拙文〈安島直圓的數學研究動機 –一般化與簡捷的價值〉一文中，筆者先簡單介紹安島直圓的生平與算學研究成果，並探討他從事數學研究動機。例如，從他的《綴術括法》一書可發現，除了對問題作推廣外，更追求解題術文的一般性，他發明的「括」法，展現出處理開方問題時，對於代數乘方上的推廣與一般化的成果。再者，《不朽算法》一書，雖然是以問題集的形式呈現，但他一方面將書中的問題作「幾何維度」或「幾何數件數量」巨推廣，同時，他也偏好提出一般性的「通術」，以求解出一般化的公式為研究目標。

此時期，安島直圓除了展現創造問題與解題方面的才華外，並創立對數表與綴術括法，用於開方與數值計算，簡化了過去「開方術」所需的繁雜計算過程。同時，他也利用截斷術（截徑法）與綴術，解決了弧長與穿去積問題，承先啟後地為往後算題研究開啟新方法與新路。以下，本文先簡單介紹安島直圓《綴術括法》、《不朽算法》、《弧背術解》、《圓柱穿空圓術》以及《圓柱穿空圓術起源》等著作，並論述安島直圓的數學成就，以及他承先啟後的角色－延續十八世紀和算家研究，並引領十九世紀和算研究新方向。

二、《綴術括法》與二項式定理的推廣

《綴術括法》成書於天明四年 **(1784 年)**，主要是安島直圓死後由弟子日下城整理而成書。它僅討論了「開方」一個問題，充分展現作者對於一般性問題與一般性術文的重視，首先，他在書中提出以下問題：

> **今有起于平方、而二乘、三乘乃至無量乘方積名曰原積，欲不用開方，依歸除術求開方商數、問其術。**[8]

這裡，他所欲處的問題是將開平方推廣至開任意正整數次方的情況，同時，他要求不使用傳統的開方法，[9]而是以綴術的方式，表現出求得$\sqrt[n]{A}$近似值的演算法。在該書中，他將十八世紀初期和算家所提出的開方綴術，即$(1\pm x)^{\frac{1}{2}}$的展開式，推廣至 n 為任意正整數時的情況，並提出了開方綴術的「括法」，透過係數表格與同一個術文，表示出$(1\pm x)^{\frac{1}{n}}$的展開式。[10]

為解決這個問題，他在書中提出自己的方法，讓我們來一起來欣賞。假令要開方數

---

[8] 引安島直圓，《綴術括法》。
[9] 傳統開方法即為宋代的「增乘開方法」，原理與今日的「直式開方法」相同。
[10] 實際上，安島直圓給出了兩個術文。

為 A，[11]要計算$\sqrt[n]{A}$。首先「**計泛商數、名原數**」先估計一個適當的數a使得$a^n \approx A$，並稱此泛商數a為原數。接著令a^n為定除法，並令$A - a^n = r$為定乘法。其中，若$a^n < A$，即當$r > 0$時稱為弱，若$a^n > A$，即當$r < 0$ 時稱為強。接著，安島直圓「**置原數、乘定乘法、以定除法除之、得數，以一差除率除之、為一差。置一差、乘定乘法、以定除法除之、得數乘二乘率、以其除率除之、為二差。…餘仿之。**」[12]利用前述造出的原數、定乘數r、定除數a^n，以及各差的乘率p_k與除率q_k，依次造出一差、二差、三差等各差：

原數 $a_0 = a$、

一差 $a_1 = a(\frac{r}{a^n})(\frac{p_1}{q_1})$ 、

二差 $a_2 = a_1(\frac{r}{a^n})(\frac{p_2}{q_2})$ 、⋯

k 差 $a_k = a_{k-1}(\frac{r}{a^n})(\frac{p_k}{q_k})$。

術文中又提到：「**弱者、置原數、累加陽差、得內減陰差、得商數。強者、置原數、累減逐差、得商數。**」亦即，這個方法可進一步區分成兩種情況：

1. 當$a^n < A$時，即$A = a^n + r$，$r > 0$ 時，可得：

$$A^{\frac{1}{n}} = (a^n + r)^{\frac{1}{n}} = a_0 + a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$$

$$= a + a\left(\frac{r}{a^n}\right)\left(\frac{p_1}{q_1}\right) - a_1\left(\frac{r}{a^n}\right)\left(\frac{p_2}{q_2}\right) + a_2\left(\frac{r}{a^n}\right)\left(\frac{p_3}{q_3}\right) - a_3\left(\frac{r}{a^n}\right)\left(\frac{p_4}{q_4}\right) + \cdots$$

$$= a + a\left(\frac{r}{a^n}\right)\left(\frac{p_1}{q_1}\right) - a\left(\frac{r}{a^n}\right)^2\left(\frac{p_1}{q_1}\right)\left(\frac{p_2}{q_2}\right) + a\left(\frac{r}{a^n}\right)^3\left(\frac{p_1}{q_1}\right)\left(\frac{p_2}{q_2}\right)\left(\frac{p_3}{q_3}\right) - \cdots$$

2. 當$a^n > A$ 時，即$A = a^n + r$，$r < 0$ 時，可得：

$$A^{\frac{1}{n}} = (a^n + r)^{\frac{1}{n}} = a_0 - a_1 - a_2 - a_3 - a_4 - \cdots$$

$$= a - a\left(\frac{r}{a^n}\right)\left(\frac{p_1}{q_1}\right) - a_1\left(\frac{r}{a^n}\right)\left(\frac{p_2}{q_2}\right) - a_2\left(\frac{r}{a^n}\right)\left(\frac{p_3}{q_3}\right) - a_3\left(\frac{r}{a^n}\right)\left(\frac{p_4}{q_4}\right) + \cdots$$

$$= a - a\left(\frac{r}{a^n}\right)\left(\frac{p_1}{q_1}\right) - a\left(\frac{r}{a^n}\right)^2\left(\frac{p_1}{q_1}\right)\left(\frac{p_2}{q_2}\right) - a\left(\frac{r}{a^n}\right)^3\left(\frac{p_1}{q_1}\right)\left(\frac{p_2}{q_2}\right)\left(\frac{p_3}{q_3}\right) - \cdots$$

其中，針對$n = 2, 3, \cdots, 8$ 等情況，他以表格的方式整理了各差乘率與除率，即上述公式中的p_k與q_k，其中$p_k = \begin{cases} 1 & , \quad k = 1 \\ (n-1) + (k-2)n & , \quad k \neq 1 \end{cases}$、$q_k = kn$。[13]

---

[11] 此處的 A，就是文中的「原積」。

[12] 引安島直圓，《綴術括法》。

[13] 以上有關綴術括法的討論，引自黃俊瑋，王裕仁(2018)，〈和算家如何追求一般化與簡捷性：以安島直圓

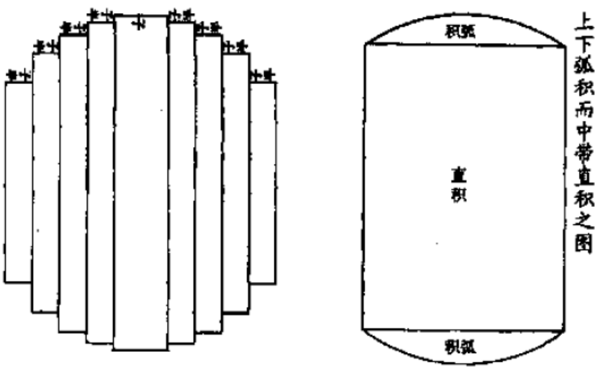
上述可遞推、且包含無窮多項的二項展開式即為「開方綴術」，據此可求任意實數開 n 次方之近似值 $\sqrt[n]{A}$ ，另一方面，安島直圓等和算家也廣泛地利用這類展開式求解圓弧長或穿去積等圓理問題。例如，十九世紀的和算家和田寧（**Wata Yasushi,1787~1840**）便是透過造表的方式再將上述的開方綴術作進一步的推廣，用之於各類圓理問題的求解過程。

三、《弧背術解》之截弦術與求弧背術

圓與弧形相關研究一直是關流和算家關切的重點，繼松永良弼（**Matsunaga Yoshisuke, 1692?-1744**）與久留久義太（**Kurushima Yoshihiro, ?-1757**）之後，關安島直圓亦在求弧長公式的方法上，取得了重要的突破。他所著作的《弧背術解》，主要處理了求弧長問題，他先求出「帶直弧積」(如圖一右圖)，再利用「面積與弧長間的關係」從面積反推得弧長。[14]

求解上述問題的過程中，安島直圓提出了「截弦術」，透過對弓形之弦作分割，獲得若干個矩形，再利用圖一左圖之中的「矩形面積和」逼近圖一右圖中的「帶直弧積」，[15] 當圖一中「子」的寬度趨近於 **0** 時，「矩形面積和」的面積即為「帶直弧積」：

$$A = cR - \frac{1}{6}\frac{Rc^3}{R^2} - \frac{1}{40}\frac{Rc^5}{R^4} - \frac{3}{336}\frac{Rc^7}{R^6} - \frac{15}{3456}\frac{Rc^9}{R^8} - \cdots$$



圖一 安島直圓以矩形面積和」逼近帶直弧積

接著，安島直圓將此帶直弧積命為甲，中間的矩形命為乙，再依據帶直弧積與扇形面積的關係即可求得弧背：「**列甲，倍之，內減乙，餘以徑除之，得弧背**」。如此，安島直圓在已知圓徑與弦長的條件下，求得弧長的冪級數展開式：

$$s = c + \frac{c^3}{6R^2} + \frac{3c^5}{40R^4} + \frac{5c^5}{112R^6} + \frac{35c^7}{1151R^8} + \frac{63c^9}{2816R^{10}} + \cdots$$

此公式亦可進一步表示成具遞迴關係的術文形式：

$$s = c + \frac{2c\cdot D_0}{3R} + \frac{4c\cdot D_1}{5R} + \frac{6c\cdot D_2}{7R} + \frac{8c\cdot D_3}{9R} + \frac{10c\cdot D_4}{11R} + \cdots$$

為例〉。

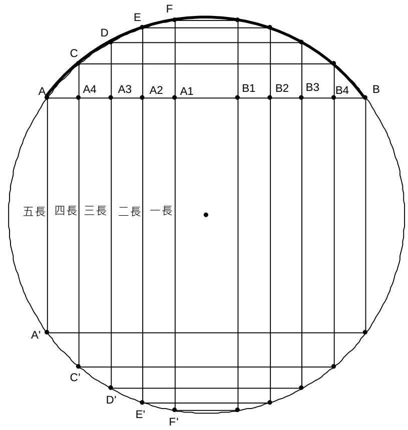
14 此研究徑路同於劉徽先證明圓面積公式後，再割圓求圓周長。

15 本圖引自徐澤林，《和算選粹》，頁 469。

其中，原數 $D_0 = c$ 、$\boldsymbol{k}$ 差 $D_k = D_{k-1}\dfrac{2k}{2k+1}(\dfrac{c}{R})$ 。[16]

安島直圓所得上述公式，即為松永良弼在《方圓算經》一書所提到的「內元率」公式。接著，筆者簡單說明安島直圓造此弧背公式的方法。

如圖二所示，假設圓直徑為 $\boldsymbol{R}$、弦長為 $\boldsymbol{c}$，安島直圓求 $\boldsymbol{AB}$ 弧長的作法如下：首先他以下述方式將 $\boldsymbol{AB}$ 弦截為五段，使得 $\overline{A_1B_1}$ 為 a 、 $\overline{A_2B_2} = 2a$ 、 $\overline{A_3B_3} = 3a$ 、 $\overline{A_3B_3} = 3a$ 、 $\overline{A_4B_4} = 4a$ 、 $\overline{AB} = 5a$ 。[17]圖中的 $\overline{FF'}$ 為一長、 $\overline{EE'}$ 為二長、 $\overline{DD'}$ 為三長、…、 $\overline{AA'}$ 為五長。利用勾股定理可得一長^2=$\overline{FF'}^2$= $R^2 - a^2$ 、二長^2=$\overline{EE'}^2 = R^2-(2a)^2$ 、三長^2＝$\overline{DD'}^2$= $R^2-(3a)^2$ 、四長^2＝$\overline{CC'}^2$= $R^2-(4a)^2$ 、五長^2＝$\overline{AA'}^2$= $R^2-(4a)^2$ 。則一長 $b_1 = \overline{FF'} = \sqrt{R^2-a^2}$ 、二長 $b_2 = \overline{EE'} = \sqrt{R^2-(2a)^2}$ 、…、五長 $b_5 = \overline{AA'} = \sqrt{R^2-(5a)^2}$ 。



圖二 《弧背術解》示意圖

利用開方綴術：

$$\sqrt{a^2-b} = a - \frac{1}{2}\frac{ab}{a^2} - \frac{1}{8}\frac{ab^2}{a^4} - \frac{3}{48}\frac{ab^3}{a^6} - \frac{14}{384}\frac{ab^4}{a^8}\cdots$$

可得：

$$b_1 = \overline{FF'} = \sqrt{R^2-a^2} = R - \frac{1}{2}\frac{Ra^2}{R^2} - \frac{1}{8}\frac{Ra^4}{R^4} - \frac{3}{48}\frac{Ra^6}{R^6} - \frac{14}{384}\frac{Ra^8}{R^8}\cdots$$

$$b_2 = \overline{EE'} = \sqrt{R^2-(2a)^2} = R - \frac{1}{2}\frac{R(2a)^2}{R^2} - \frac{1}{8}\frac{R(2a)^4}{R^4} - \frac{3}{48}\frac{R(2a)^6}{R^6} - \frac{14}{384}\frac{R(2a)^8}{R^8}\cdots$$

$$b_3 = \overline{DD'} = \sqrt{R^2-(3a)^2} = R - \frac{1}{2}\frac{R(3a)^2}{R^2} - \frac{1}{8}\frac{R(3a)^4}{R^4} - \frac{3}{48}\frac{R(3a)^6}{R^6} - \frac{14}{384}\frac{R(3a)^8}{R^8}\cdots$$

$$b_4 = \overline{CC'} = \sqrt{R^2-(4a)^2} = R - \frac{1}{2}\frac{R(4a)^2}{R^2} - \frac{1}{8}\frac{R(4a)^4}{R^4} - \frac{3}{48}\frac{R(4a)^6}{R^6} - \frac{14}{384}\frac{R(4a)^8}{R^8}\cdots$$

$$b_5 = \overline{AA'} = \sqrt{R^2-(5a)^2} = R - \frac{1}{2}\frac{R(5a)^2}{R^2} - \frac{1}{8}\frac{R(5a)^4}{R^4} - \frac{3}{48}\frac{R(5a)^6}{R^6} - \frac{14}{384}\frac{R(5a)^8}{R^8}\cdots$$

將各長相並可得：

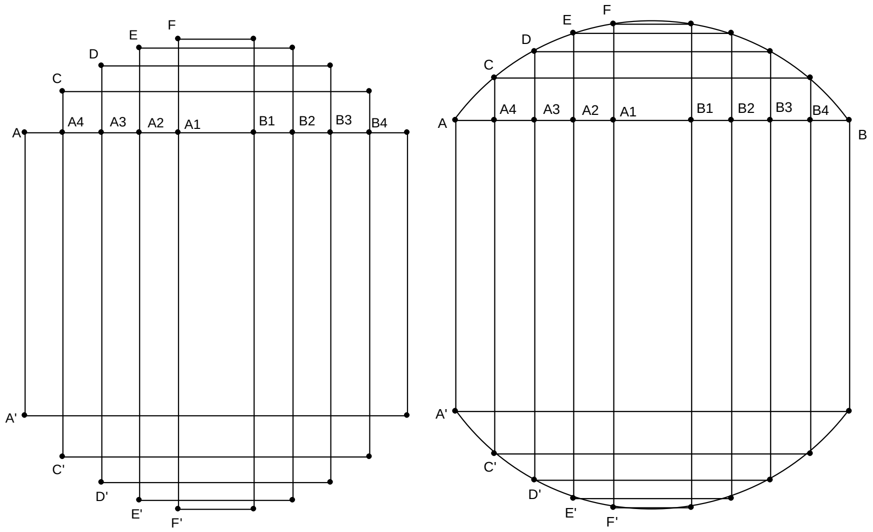
[16] 安島直圓在此所求得的公式即為松永良弼在《方圓算經》一書所提出的「內元率」弧長公式

[17] 這裡安島直圓並非對弦等分割，而是利用左右配對等分割的方式。

$$5R-\frac{1}{2}\frac{Ra^2}{R^2}(\sum_{i=1}^{5}i^2)-\frac{1}{8}\frac{Ra^4}{R^4}(\sum_{i=1}^{5}i^4)-\frac{3}{48}\frac{Ra^6}{R^6}(\sum_{i=1}^{5}i^6)-\frac{14}{384}\frac{Ra^8}{R^8}(\sum_{i=1}^{5}i^8)\cdots$$

再以 a 乘之即得 $a(b_1+b_2+b_3+b_4+b_5)$，此為圖 **3.3. 9** 左邊圖形各矩形的面積和，亦即圖三右邊帶直弧積的近似面積為：

$$5aR-\frac{1}{2}\frac{Ra^3}{R^2}(\sum_{i=1}^{5}i^2)-\frac{1}{8}\frac{Ra^5}{R^4}(\sum_{i=1}^{5}i^4)-\frac{3}{48}\frac{Ra^7}{R^6}(\sum_{i=1}^{5}i^6)-\frac{14}{384}\frac{Ra^9}{R^8}(\sum_{i=1}^{5}i^8)\cdots$$



圖三 以帶直弧積與其近似面積

若分割成 ***k*** 段則近似面積為：

$$kaR-\frac{1}{2}\frac{Ra^3}{R^2}(\sum_{i=1}^{k}i^2)-\frac{1}{8}\frac{Ra^5}{R^4}(\sum_{i=1}^{k}i^4)-\frac{3}{48}\frac{Ra^7}{R^6}(\sum_{i=1}^{k}i^6)-\frac{14}{384}\frac{Ra^9}{R^8}(\sum_{i=1}^{k}i^8)\cdots$$

利用垛積術可得近似面積為：

$$A_k=kaR-\frac{1}{2}\frac{Ra^3}{R^2}(\frac{2k^3+3k^2+k}{6})-\frac{1}{8}\frac{Ra^5}{R^4}(\frac{6k^5+15k^4+10k^3+k}{30})-$$
$$\frac{3}{48}\frac{Ra^7}{R^6}(\frac{7k^7+21k^6+21k^5+7k^3+k}{42})-\frac{14}{384}\frac{Ra^9}{R^8}(\frac{10k^9+45k^8+60k^7+42k^5+20k^3+3k}{90})\cdots$$

又弦 ***c*** 為截數 ***k*** 乘 a，所以將 $c=ka$ 代入上式可整理得：

$$A_k=cR-\frac{1}{2}\frac{R}{R^2}(\frac{2c^3+3c^2a+ca^2}{6})-\frac{1}{8}\frac{R}{R^4}(\frac{6c^5+15c^4a+10c^3a^2+ca^4}{30})-$$
$$\frac{3}{48}\frac{R}{R^6}(\frac{7c^7+21c^6a+21c^5a^2+7c^3a^4+ca^6}{42})-$$
$$\frac{14}{384}\frac{R}{R^8}(\frac{10c^9+45c^8a+60c^7a^2+42c^5a^4+20c^3a^6+3ca^8}{90})-\cdots$$

最後，安島直圓說明：「**截數至多，子至少矣，至少之極數者，空也。**」亦即上式中的 $\lim_{k\to\infty}a=0$，上式取極限後可得：

$$\lim_{k\to\infty} A_k = cR - \frac{1}{6}\frac{Rc^3}{R^2} - \frac{1}{40}\frac{Rc^5}{R^4} - \frac{3}{336}\frac{Rc^7}{R^6} - \frac{15}{3456}\frac{Rc^9}{R^8} - \cdots$$

此即「帶直弧積」。接著他令帶直弧積為甲，中間直積為乙，又因為

2 倍甲積 － 乙 （= **4** 扇形面積）＝弧長‧徑

於是，安島直圓「**列甲，倍之，內減乙，餘以徑除之，得弧背**」，如此可求得弧長的冪級數展開式：

$$s = c + \frac{c^3}{6R^2} + \frac{3c^5}{40R^4} + \frac{5c^5}{112R^6} + \frac{35c^7}{1151R^8} + \frac{63c^9}{2816R^{10}} + \cdots$$

繼安島直圓之後，和算和田寧進一步發展，並搭配各類「表」的使用，上述分割求和積分法（圓理豁術），便成為十九世紀和算家處理弧長、面積、體積與穿去積等各類幾何問題的重要方法。

【未完待續】

數學史融入的特色課程

蘇惠玉
台北市立西松高中

一、前言

近年來，各高中職為因應 **108** 課綱的到來，提前規劃與開設各類選修課程。除了加深加廣的選修課程與數學知識直接相關之外，數學教師無不絞盡腦汁開設各種與「數學」有關的多元選修課程，筆者參加過的研習或知道的選修課程就有多面體摺紙、桌遊、程式設計或程式遊戲、各類益智遊戲的解謎、音樂與數學、數學詩、統計與理財規劃等等，這些課程多元多樣，皆可豐富數學學習的不同樣貌，不過說實話，有些課程真的與高中數學知識內容沒甚麼相關。在此筆者以自身的教學經驗，提供一種將數學史融入高中數學的選修課程設計，讓學生在多元選修課程中學到的知識與能力，可以用來加強或輔助高中三年的數學學習。

對於即將到來的 **108** 課綱，以目前公布的內容來看，未來的評量方式將強調「素養」能力的評量。今年大考中心學測的國文試題被普遍認為是此種評量方式的試金石，在此種方式的評量下，每個學科都在思考學生應該具備甚麼樣的能力才能考出高分。以此次的國文試題為例，閱讀題組佔的比重從去年的 **29.6%**提升到 **46%**，雖說因為作文分開考了，選擇題的題數增加，不過還是可以看出閱讀題組在國文考科上確實愈受重視。從此次備受矚目的選擇題組 **17-18** 題，或是寫作試題中的第一題，都可看出國家在未來 **108** 課綱的改革中，想要強調學生的閱讀理解與分析的能力，以及整合各領域知識的能力，這一點在國文教學的訓練中，似乎比較容易看出成效，因此今年已有些大學校系申請的比序，改以國文為優先，譬如台大工管系科管組同分時先比總級分，再來就是比國文級分，而不是如往年的比序英文或數學。

這種評量方式的改變在數學考科出現了嗎？以今年為例，單選題的第 **6** 題與多選題的第 **8** 題，題目敘述較長，都是強調閱讀理解與分析的題型：

> 第 **6** 題：
> 某貨品為避免因成本變動而造成售價波動太過劇烈，當週售價相對於前一週售價的漲跌幅定為當週成本相對於前一週成本的漲跌幅的一半。例如下表中第二週成本上漲 **100%**，所以第二週售價上漲 **50%**。依此定價方式以及下表的資訊，試選出正確的選項。
>
> 【註：成本漲跌幅 $=\dfrac{\text{當週成本}-\text{前週成本}}{\text{前週成本}}$，
>
> 售價漲跌幅 $=\dfrac{\text{當週售價}-\text{前週售價}}{\text{前週售價}}$。】

	第一週	第二週	第三週	第四週
成本	50	100	50	90
售價	120	180	x	y

(1) $120 = x < y < 180$　**(2)** $120 < x < y < 180$　**(3)** $x < 120 < y < 180$
(4) $120 = x < 180 < y$　**(5)** $120 < x < 180 < y$

第 **8** 題：
某年學科能力測驗小華的成績為：國文 11 級分、英文 12 級分、數學 9 級分、自然 9 級分、社會 12 級分。他考慮申請一些校系，表 **1** 為大考中心公布的學測各科成績標準；表 **2** 是他最有興趣的五個校系規定的申請檢定標準，依規定申請者需通過該校系所有檢定標準才會被列入篩選。例如甲校系規定國文成績須達均標、英文須達前標、且社會須達均標；丙校系則規定英文成績須達均標、且數學或自然至少有一科達前標。表 **2** 空白者表示該校系對該科成績未規定檢定標準。

表 **1** 學測各科成績標準

	頂標	前標	均標	後標	底標
國文	13	12	10	9	7
英文	14	12	9	6	4
數學	12	10	7	4	3
自然	13	11	9	6	5
社會	13	12	10	8	7

表 **2** 校系篩選規定

	國文	英文	數學	自然	社會
甲校系	均標	前標			均標
乙校系	前標	均標			前標
丙校系		均標	一科達前標		
丁校系	一科達前標			均標	均標
戊校系	均標	前標	均標	前標	

根據以上資訊，試問小華可以考慮申請哪些校系（會被列入篩選）？
(1)甲校系　**(2)**乙校系　**(3)**丙校系　**(4)**丁校系　**(5)**戊校系

我們姑且不論試題的難易度，從近些年各考科的大考試題來看，學生想要拿高分，除了掌握學科內的知識之外，培養閱讀理解與分析整合的能力似乎也變成學生應試的基本功了。另一方面，在生活、科技型態的種種轉變下，具備跨領域的整合能力、能夠獨立作業又能與團隊合作的人才，向來是各種行業管理者的最愛。在這樣的時代潮流需求下，筆者想要在數學科除了傳統的學科知識教授之外，藉由數學史材料的融入，從學習單問題的設計中培養學生閱讀分析的能力，讓學生能夠從這樣課程中學習如何搜尋資料、整理與分析資料，除了能夠自主學習之外，在需要時可與團隊分工合作。當然，其中最重要的教學目標就是利用數學史材料幫助高中數學的學習，尤其在提升單元學習動機，或是相關數學知識的整合方面，從許多教育學者的研究，或是現職數學教師實施後的學生

回饋來看，數學史材料的融入學習方式都有相當的成效。

二、數學史融入特色課程的方式

就筆者的教學經驗而言，在進行一門新的多元選修課程規劃時，會先設想這一門課程的教學目標，是要配合課程的學習，或是以數學知識活動的認識、理解與欣賞為主。教學目標的不同，關係到學習單問題的設計方向，以及選擇的材料內容。譬如下面的問題可以輔助三次函數與三次方程式之單元的學習：

1. **16** 世紀當時的數學家們仍然習慣將未知數的一次方、平方和立方當成是幾何的線、面、體積，一個代數方程式通常表示這些幾何量的加減運算。在這個脈絡下，你覺得卡丹諾在求三次方程式 $x^3+cx=d$ 的解時，假設 $x=\sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{v}$ 的幾何意義為何？他這樣假設的可能原因為何？

2. 利用卡丹諾的公式解三次方程式 $x^3+9x=10$ 。

3. 當我們要對一般的三次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 消去二次項時，可假設 $ax^3+bx^2+cx+d=a(x-h)^3+p(x-h)+k$ ，展開比較係數即可得 **h=? p=? k=?**

4. **(1)** 證明三次方程式 $x^3=cx+d$ ，當 **c>0, d>0** 時必有一個正實根。
(2) 證明 $x^3=15x+4$ 由公式解得的根為正實根。

5. 利用微分，求出當 $x^3=cx+d$ **(c>0, d>0)**只有一個實根時，**c** 與 **d** 須滿足之條件。

6. 將 $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$ 化簡成 $a+bi$ 的形式，其中 $i=\sqrt{-1}$ ，得 **a=? b=?**

同樣針對三次方程式的單元，下面的問題設計則是以數學的人文素養或知識的理解欣賞為主：

1. **(1)** 以現在國中與高中教授的解方程式方法，你覺得一個高次方程式要能解出它的根，要先對這個方程式做什麼樣的運算？
(2) 你覺得為什麼現在的高中課程不教授 **3** 次方程式的公式解？

2. **(1)** 你覺得數學知識對現代的商人而言，是不是必備的知識？如果是必備的話，你覺得他們需要什麼樣的數學知識？
(2) 你覺得數學知識對 **15, 16** 世紀的商人而言，是不是必備的知識？如果是必備的話，你覺得他們需要什麼樣的數學知識？
(3) 你覺得在 **15, 16** 世紀時，什麼樣的人會需要 **3** 次方程式的公式解？他們學習這些知識的目的為何？

3. 下面這一到題目實際出現在費拉里與塔塔利亞的挑戰賽中，請試著解解看：
求兩個數 x,y ，其中 $x>y$ ，滿足 $x+y=y^3+3yx^2$ 且 $x^3+3xy^2=x+y+64$

4. 請利用網路搜尋資料，回答：在數學領域中如何確定一個定理或理論的發明者？

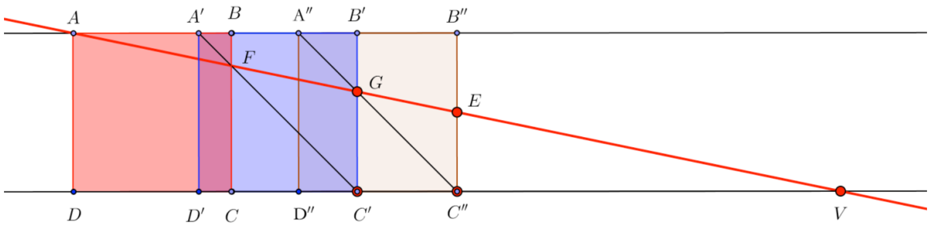
5. 你同意「卡丹諾發明三次方程式的公式解」這樣的說法嗎？為什麼？

教師決定了教學目標之後，接著要選擇適當的單元。在目前的高中課程教材中，可供數學史著力的單元相當多，每一單元也有不少的材料可以使用。筆者在《追本數源─你不知道的數學秘密》一書中，所選定的單元皆是與高中數學有關的單元，譬如高一的部分有無理數、虛數、三次方程式、對數、斐氏數列、數學歸納法、巴斯卡三角形、機率；高二的部分有三角、正餘弦定理、海龍公式、向量、高斯消去法、圓錐曲線、克卜勒的橢圓軌道；高三的部分有機率與統計、自然對數底 e，以及微積分。筆者選擇的這些單元，都是在教學過程中發現學生在這些單元的學習容易產生迷思，或是在課本教材的敘述中，需要補充數學的發展脈絡才能使學習較為完整的單元。教師可依時間或教學過程選擇適當的單元來作多元選修課程的教材設計。

教師選定單元之後，接著必須決定課程的進行方式，是以學生活動的方式進行，還是以教師講授為主。依筆者的經驗而言，若教師選擇的單元數學知識內容較艱深時，學生無法獨力完成，通常需要以老師講授為主；不過若將課程的進行設計成活動，或將牽涉到的數學知識內容分割成數個學生容易動手做的問題，學生比較會有參與感，也能從中學習與團隊合作共同解決問題，經歷這種以「人」為主的數學知識活動。在選修課程中，通常可以將數學史料中古代的作法稍作調整之後作為活動，不過須考量可行性與學生的能力。譬如在無理數單元時，可以考慮融入畢氏音階、十二平均律與等比中項的作圖器，譬如下面的學習單問題設計：

1. 畢達哥拉斯透過簡單的實驗發現兩個聲音能夠聽起來和諧悅耳，跟兩弦的長呈簡單整數比有關，依照畢達哥拉斯所提出的整數比所定出來的音階，稱為畢達哥拉斯音階（**Pythagorean scale**）。在畢達哥拉斯音階中，若將發出 **C (Do)**的頻率定為 **k**，高八度的 **C(DO)**頻率是 **2k**，從第一個 **C** 開始，每隔五度的音其頻率為前一個的 $\frac{3}{2}$ 倍，因此下一個音為五度音 **G(So)**的頻率是 $\frac{3}{2}$ **k**，並把超過八度的音降低八度(除以 **2**)，或低於八度音的升高八度(乘以 **2**)，就可以得到七個音的畢氏音階。請計算寫出七個音(**C**、**D**、**E**、**F**、**G**、**A**、**B**)的畢氏音階的頻率比。

2. 下圖出現在 **16** 世紀的一個倍立方問題的作圖器中，利用這個作圖器可作出 $\sqrt[3]{2}$ 這個無理數。如圖，四邊形 **ABCD**、**A'B'C'D'**、**A"B"C"D"**皆為正方形，$\overline{AD}$**=2**，$\overline{EC''}$**=1**，設 $\overline{GC'}=x$，證明 $x^3=2$。



3. 畢氏音階使用了很長一段時間之後，因為有某些不協調音的存在，音樂學家開始從數學著手，調整弦長的比例關係，因而出現所謂平均律（**well temperament**）的調音方式，例如現在我們使用的系統稱為等律（**equal temperament**），亦稱作十二平均律，即將一個八度間的聲音頻率以等比的形式均分成 **12** 等分，定義出 **12** 個音階。請利用問題 **3.**之原理，設計一個作圖器，可作出 **12** 平均律中的基本半音比值 $\sqrt[12]{2}$ 這個無理數。

4. 古人對開方的計算能力通常只會開平方根與開立方根，以及計算平方與立方。若已知 $\sqrt{2}\approx 1.414$，$\sqrt[3]{2}\approx 1.26$ 設 $a=\sqrt[12]{2}$ ，利用指數律計算 **a**，$a^2,a^3,\cdots,a^{11}$ 各次方的近似值。

當教師做好事前的規劃之後，接著就是材料的蒐集，再根據蒐集而得的材料調整內容。目前市面上有許多的數學普及書籍，這些書通常是比較可信賴的數學史料來源，網路上亦有許多資源可供利用，譬如數學家傳記可參考 **MacTutor History of Mathematics archive** 網站，網址為 **http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/**；有些數學家的文本可在 **Internet Archive** 網站找到，網址為 **https://archive.org**。事實上，當我們需要了解某一主題，或是要找某位數學家的著作時，**google** 搜尋是相當好用的工具，只是網路資料通常有真有假，必須謹慎使用。在課程設計中，也可配合單元設計需要學生自主蒐集資料、分析整理與報告的議題，利用這些議題的口頭報告與論文寫作，可以補足數學科在閱讀、分析整合與寫作訓練上的不足。譬如在斐氏數列單元的課程設計中，可以設計這樣的問題：

1. 請寫一篇 **800** 字的小論文說明：
   (1) 羅馬數碼與阿拉伯數碼的優缺點
   (2) 假設你是生活在 **12** 世紀的數學家，你想要推廣使用阿拉伯數碼，你會用什麼方法？原因為何？請詳細說明你的推廣策略。

2. 請尋找花瓣數為斐氏數的花朵至少 **2** 種，拍下照片並查出花名。

3. 拍下向日葵或松果的照片，在照片中以不同顏色畫出向日葵或松果中的順時針螺線與逆時針螺線，並計算這兩種螺線各自的數量。

4. 利用網路搜尋符合或利用斐氏數列或黃金分割比的創作，在繪畫、雕塑、音樂、建築、文學或影片等領域中至少選擇三個領域各一件作品，並說明你選擇的這些作品中那些部分包含了斐氏數列或黃金分割比，以及你選擇它的理由。

當課程準備完畢，教師預計上第一節課時，建議可以做簡單的前測，用以知道學生的相關背景，可用問題回答的形式，知道學生的數學程度、對數學、數學課的感覺，以及對這一門選修課的期待。課程最後亦可進行後測，用以對比這門課對學生造成的影響或改變，以及評估課程進行的成效，作為下次課程修正的依據。筆者個人使用的前後測

問題如下：

課前測驗：
1. 經過了國小與國中的數學學習，你對數學的印象為何？
2. 你為何選擇選修這門課程？
3. 你對本課程的預期學習目標為何？
4. 你希望在本課程中有何收穫？對你的數學學習有何幫助？

課後測驗：
1. 上了一學期的高中數學之後，你對數學的印象為何？與國中時有何不同？
2. 在本學期的選修課程中，你對哪一單元與活動印象較深？為什麼？
3. 在上選修課程的過程中，對你的數學學習有沒有幫助？若有，是在哪一方面？若沒有，為什麼沒有幫助？
4. 上完選修課程之後，你對數學的感覺有無改變？為什麼？
5. 上完選修課程之後，你的收穫是什麼？
6. 若以後還有相關課程，你會推薦給同學參加嗎？理由為何？

三、結語

多元選修的特色課程上課內容與方式，取決於教師的個人信念與「素養」，教師想要在高中數學課程之餘，想再多給學生什麼樣的知識與訓練，就會決定這位教師的課程內容與形式。因應多元與數位科技的時代，除了傳統的數學冷知識之外，我們應該再多給學生更多元、更人文、更生活的數學連結課程訓練。筆者近年來，已經上過幾次這樣的選修課程，雖然課程名稱掛上數學之後，會影響許多學生的選修意願，然而從學生填寫的回饋問卷中，還是得到許多的正面回應，讓筆者願意繼續進行以數學史融入方式的選修課程，希望身為數學教師的你也可以試試。

附註：本書提供的學習單問題釋例，為筆者專為想要利用《追本數學—你不知道的數學秘密》(三民出版社，**2018**)這一本書為素材，進行多元選修課程所設計的學習單，因此背景內容知識皆來自本書，課程進行時可搭配本書的閱讀進行。

編者按：本文刊登於三民書局《數學頻道》No.29(2018, 11)。