HPM 通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系退休教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）
助理編輯：黃俊瑋（和平高中）
編輯小組：蘇意雯（台北市立大學）蘇俊鴻（北一女中）
葉吉海（桃園陽明高中）陳彥宏（成功高中）
英家銘（台北教育大學）
創刊日：1998 年 10 月 5 日
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng
聯絡信箱：suhy1022@gmail.com

第二十一卷第十二期目錄(2018 年 12 月)

棋盤上的穀粒：數大之奇

洪萬生
台灣師範大學數學系退休教授

一、等比級數求和問題

$2^0+2^1+2^2+2^3+\ldots+2^{63}=?$ 這是一個級數求（總）和的問題。在初等數學中，通常只介紹兩類級數：等差級數及等比級數，或者，另稱算術級數及幾何級數。

這個級數顯然是等比級數。如何求（總）和？這是國中數學問題，不過，多數師生所在意的，恐怕是如何運用下列公式，來求解給定的求和問題：

$$a+ar^1+ar^2+\cdots+ar^{n-1}=a(\frac{r^n-1}{r-1})$$

其中，公比 r 是不等於 1 的正數，a、ar^{n-1}分別是這個級數的第一項（或首項）、第 n 項。

不過，比較「酷」的方法，或許是模仿「證明」此一公式的進路，讓這個解題充滿了創意：令 S 等於這個級數的（總）和（sum）：

$$S=2^0+2^1+2^2+2^3+\ldots+2^{63}$$

如果等號兩邊都乘以 2，則上式變為

$$2S=2^1+2^2+2^3+\ldots+2^{63}+2^{64}$$

將這兩個式子相減 -- 不妨先交錯並列如下：

$$2S= \qquad 2^1+2^2+2^3+\ldots+2^{63}+2^{64}$$
$$S=2^0+2^1+2^2+2^3+\ldots+2^{63}$$

則 $2S-S=2^{64}-2^0$ 或 $S=2^{64}-1$，即為所求。

其實，如果你多「想」一點 -- 是「解析地想」（**analytical thinking**），而不只是「隨興地聯想」（**associative thinking**），那麼，說不定你已經發現上述求 ***S*** 總和的方法，可以引出（或類比出）證明等比級數求和公式的進路。

在這個脈絡中，教師如果覺得「勻出討論時間」是值得嘗試的教學策略（或投資），那麼，請不妨並列「上述例子解法」與「（一般）等比級數公式證明」，或許教室中就會出現此起彼落、令人驚喜的 ***Eureka***（發現）時刻了！

二、「等比級數」的源頭

在國中數學課程中，為什麼要學等比級數？這個「大哉問」不好回答。我們可以試圖搜尋數學史上的案例，來「正當化」（**justify**）此一教學（或智性）需求。

等比級數問題在數學史上出現甚早。以中國算書為例。最晚在西漢呂后二年（**186 BCE**）出現的竹簡《筭數書》中，我們已經可以解決按等比關係的比例分配問題：

> **女織　鄰里有女惡自喜也，織日自再，五日織五尺。問：始織日及其次各幾何？**
> **曰：始織日一寸六十二分寸卅八，次三寸六十二分寸十四，次六寸六十二寸十八，次尺二寸六十二分寸五十六，次二尺五寸六十二分寸五十。**
> **術曰：置二、置四、置八、置十六、置卅二，并以為法，以五尺遍乘之各自為實，實如法得尺。**

這個題目在稍後問世的《九章算術》（約為公元紀元前後問世）中，以幾乎一樣的面貌出現：

> **今有女子善織，日自倍，五日織五尺。問：日織幾何？**
> **術曰：置一、二、四，八、十六為列衰，副并為法。以五尺乘未并者，各自為實，實如法得一尺。**

至於答案，則兩書都正確：依序為（始織日）$1\frac{19}{31}$寸、$3\frac{7}{31}$寸、$6\frac{14}{31}$寸、1 尺$2\frac{28}{31}$寸、2 尺$5\frac{25}{31}$寸。請注意：上引《筭數書》的答案沒有約分，可見，約分與否完全是目前小學數學的課程規約。

這種涉及「實用」的歷史情境，是否有助於提升學生學習等比級數的動機，我們不

得而知。或許我們對照古埃及《萊因德紙草書》（*Rhind papyrus*）第 79 題，可以發現這一類題目不無娛樂效果。事實上，這一題是如下引述的斐波納契《計算書》（***Liber abaci*, 1202**）中的一首詩之濫觴：

當我走到聖伊維斯（**St. Ives**）時，
我遇到一個有著七個老婆(妻子）的男人
每個妻子都有七個麻袋，
每個麻袋裡裝著七隻母貓、
每隻母貓有七隻小貓，
請問共有多少小貓、母貓、麻袋、妻子和他一起前往聖伊維斯？

因此，解謎趣味的娛樂數學（**recreational mathematics**）問題往往成為普及知識的「梗」，這對於今日的數學教師也好，科普作者也好，都是極重要的歷史啟示。數學「有用」的訴求固然重要，說不定它「好玩」的特性，才是更好地「貼近」學生或讀者心靈之進路，我們千萬要謹記在心才好。

三、棋盤上的穀粒

然則我們究竟如何讓讀者（或學生）對等比級數更加「有感」呢？當然，我們可以利用斐波納契所引述的這一首詩，其「紅利」包括（順便介紹）斐波納契數列（或費氏數列）**1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, …** 及其與等比或等差級數「迴異」的模式等等。更有趣的，當推《萊因德紙草書》所提供的古埃及人的兩種解法，尤其是涉及遞迴關係的那一個，更是非常值得我們現代人參考借鏡。[1]

不過，出自竹簡或紙草的例題，除了「發思古之幽情」外，顯然欠缺數學知識可以帶給我們的驚奇感嘆（**wonder**），更何況它的敘事框架已定，沒有「多餘的」空間可以發揮。

可是，如果我們以本文開宗明義的例題「$2^0+2^1+2^2+2^3+\ldots+2^{63}=?$」，來引進等比（或幾何）級數，那麼，我們可以敘說的故事，或許就有趣得多了。尤其是這個級數的總和 $2^{64}-1$究竟有多大，更是值得我們深入探索。

在數學小說《蘇菲的日記》（*Sophie's Diary*）中，作者朵拉・穆西亞拉克（**Dora Musielak**）顯然藉由蘇菲的日記，「重述」（**recount**）這個可能是她童年閱讀（穀粒與棋盤）的故事。她的版本如下：很久很久以前，有一位國王想要一個其他人不曾擁有的獨特遊戲，希望可藉以教導後代子孫「成為更優秀的思想家以及戰場上更好的領袖。」結果，有一位賢者發明了一個遊戲（亦即今日的西洋棋，有 $8\times8=64$ 個正方格）獻給國王。國王龍心大悅，諭令要以賢者要求的任何賞賜（包括黃金珠寶等等任何東西）作為回報。

---

[1] 參考 **Luca N. H. Bunt** 等著（黃俊瑋等合譯），《初等數學史》（***The Historical Roots of Elementary Mathematics***），五南出版社即將出版。

萬萬沒想到這位賢者竟然只想要穀粒！要多少呢？賢者說他要的數量按照棋盤上正方形（數量）來算就可以了。他的公式很簡單：

> **第一個正方形他要一個穀粒，然後，在接下來的棋盤上的每一個正方形上加倍。換句話說，在第二個正方形上要有兩個（1 乘以 2）、第三個正方形要有四個（2 乘以 2）等等，直到全部六十四個正方形都計算出來以決定穀粒的總數。**

對於這樣「謙卑」的要求，國王也大感意外。國王命令下人帶一袋穀粒來，按照賢者的要求，一格一格地計算穀粒，結果一下子穀粒已經用罄，

> **於是更多的穀粒被帶進來。很快的，他們發現就算是全王國的穀粒，都不足以對應棋盤上一半（數量）的正方形。**

故事重述到這裡。作者穆西亞拉克緊接著布了一個「梗」，讓年方十四歲的蘇菲（1790 年）試著計算穀粒的數量。結果，她試到 $2^{18}=262144$ 就投降了：「**我必須在這裡停止。現在我只能想像第四列及棋盤上剩餘正方形上面的巨大數字了。我不用計算，也知道我可以利用數字2^{n}來代表每個正方形上面的穀粒，其中第一個正方形為$2^{0}=1$，然後，最後一個正方形為$2^{n}=2^{63}$。之後，我要將所有正方形上的所有穀粒加起來，而這總數將會無比巨大。光2^{63}就是個我無法想像的巨大數字了！**」

在這則日記（1790 年 3 月 7 日）的最後，蘇菲為這個故事提供了她的數學表徵：「**我要如何只用數學來敘述這個故事呢？我可以寫成總和 $1+2+4+8+16+32+\ldots+2^{63}$，讓我大約知道會有幾個穀粒。**」

四、普及版的再重述

故事雖然說到「已見數學真章」，不過，這個插曲卻尚未結束！在下一則日記（1790 年 3 月 15 日）中，蘇菲為了安撫焦躁的妹妹安潔莉，想教她下西洋棋，結果引不起她的興緻。直到蘇菲提起國王想要教導孩子們更聰明的故事，妹妹才終於安靜了下來。

不過，蘇菲也深知妹妹只能接受「美化的」版本，於是，她將故事改編如下：

> **在我的故事中，賢者變成了英俊的王子，並且會在贏得遊戲之後，娶得國王美麗的女兒。我又額外追加了國王對這新遊戲很滿意，並且願意給予任何王子想要的東西 – 黃金或鑽石 – 來作為公主的嫁妝。我也更改了賢者要求穀粒的部分。為了讓安潔莉保持興趣，我將故事改為王子要求的是鑽石！我妹妹完全著迷了，變得更想玩，也許她幻想著棋盤上每個正方形中都有閃閃發亮的鑽石。**

或許受到這個故事的啟發，妹妹終於願意下棋。蘇菲趁此機會解釋棋盤上的穀粒（或鑽石）的計算方式。她承認妹妹可能不明白究竟怎麼回事，但還是表現得很有耐心的樣子。

蘇菲的這個再重述插曲，說明普及者（如朵拉・穆西亞拉克）一旦掌握了數學知識活動的真諦，就可以針對閱聽對象，而提出不同的敘事版本。至於實效如何，那就請（讀者或老師）到現場見真章了！

五、結語

棋盤上的穀粒之敘事還有其他的變貌，有意使用者大可針對訴求對象及講述場合，來修訂或改編本文所提及的版本。不過，所有的版本都必須保留一個核心事實，那就是，2^n 的數大之奇（數目變大之快，令人嘖嘖稱奇）！若不如此，恐怕難以讓學生保持強烈的好奇心，而願意「順便」學習等比級數的求和公式。

至於是否在一開始就提出 $2^0+2^1+2^2+2^3+\ldots+2^{63}=?$ 的求和問題，或者先敘述棋盤上的穀粒之故事，還是引述漢簡筭書、紙草書或斐波那契詩歌問題，以作為等比級數求和單元之學習動機等等，則悉聽尊便，但求學生多少體會數學知識有其脈絡即可。

從數學敘事（**mathematical narrative**）觀點來看，這些脈絡（包括故事或古算源頭）都難以切割等比級數的知識內容。任何人只要接觸這些文本，就會不由自主地啟動數學思考，因為那些故事或源頭本來就是數學的一部份。總之，從棋盤上的穀粒，我們也可以考察數學的多元面貌。清水變雞湯，端看你怎麼烹煮了！

參考文獻

Musielak, Dora (2014).《蘇菲的日記》，台北市：三民書局。
洪萬生 **(2006).**《數之起源：中國數學史開章《筭數書》》，台北市：台灣商務印書館。
洪萬生 **(2017).**《數學小說閱讀筆記》，新北市：遠足文化出版社。

和算家安島直圓及其重要算學成就(II)

黃俊瑋
台北市立和平高中

續前期

四、安島直圓之《不朽算法》與圓柱穿空圓術

（一）《不朽算法》

如前所述，《不朽算法》是安島直圓死後由弟子日下城整理他的遺稿並於 **1799** 年編成書。《不朽算法》分成上、下兩卷，〈上卷〉的內容共包含了 **35** 個問題及解術。其中，第 **1** 問為整數論問題，第 **16**、**17**、**28**、**29** 雖為幾何問題，但第 **16** 題與第 **17** 題要求三角形與四面體邊長、體積為正整數，第 **28** 題要求半梯形的邊長與對角線為正整數、[2]第 **29** 題要求正方形及內容三角形之各邊長為正整數，因此這四個問題求解過程亦與整數解的討論有關。第 **2** 問為組合問題，第 **3** 問至第 **15** 問、第 **22** 問、第 **23** 問、第 **30** 問至 **34** 問皆是平面上幾何的問題，除了第 **10** 問與第 **13** 問之外，皆為平面上多邊形容圓或容橢圓問題，第 **30** 問至第 **34** 問則為平面上圓內、圓外容累圓相關問題。

其它第 **17** 問至第 **21** 問、第 **24** 問至第 **27** 問第 **27** 問之後的問題，皆屬於空間中的幾何問題，當中的第 **24** 問與第 **25** 問為大球容若干小球之容累球問題，第 **26** 問與第 **27** 問則為內弧錐與外弧錐容累球問題。最後的第 **35** 個問題為「圓柱穿去空圓」求其穿去積，書中僅列出此問題的解題術文，但未提出解此問題的方法與過程。相關解法安島直圓另外列於《圓柱穿空圓術》與《圓柱穿空圓術起源》兩本著作中。

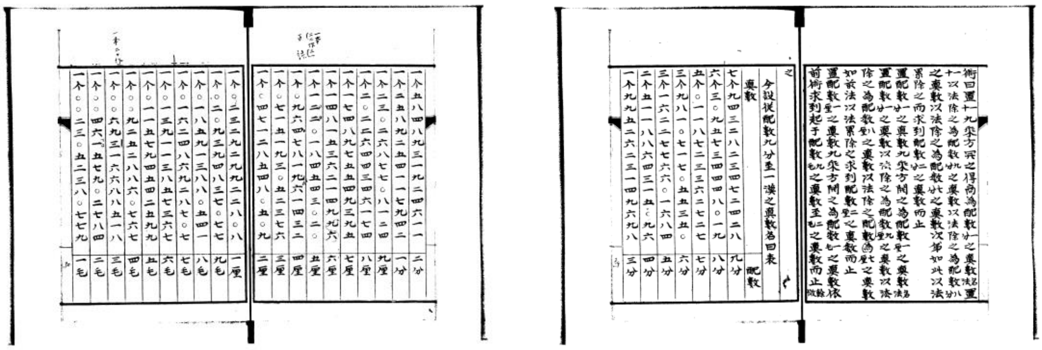
綜合來看，上卷 **34** 問中除了第 **1** 問與第 **2** 問之外都與幾何有關，同時，容圓或容球類問題占《不朽算法》比重最高。書中安島直圓也偏好提出「一般性」的問題，例如第 **12** 問的三角形容圓問題以探求「**求等圓徑通術**」為目標，第 **19** 問則是奇角柱截積問題，第 **23** 問「**問側圓數起於三個、至於數十百個，求短徑術**」在在可看出他追求的是一般性的術文。此外，第 **33** 問與第 **34** 問容累圓問題，皆是求「**容圓術若干，求各圓徑通術**」，同樣為了解決一般性的問題。此外，即使問題提供的是具體的數字或單位，但安島直圓最終也傾向提出抽象性的解題術文。

《不朽算法》〈上卷〉的內容主要是問題與答術集的形式，然而〈下卷〉的內容則與開方有關。下卷開宗明義提到：「**或曰：十二問三斜內容等圓術，界斜數十，則開方乘數亦數十乘方，得商數不易，可謂無用之術乎。**[3]」這裡他並不滿足於舊有開方術進行開方時的繁瑣與不易，因而探求新的開方法。由此可知，他不只關心數學知識的「正確性」，術文的簡捷性亦是他所重視的重要數學知識價值。因此，創造出指數表與新的開方法，透過指數表與指對數相關性質，簡化傳統開方法與開方綴術的繁雜程序與冗長計算。

---

[2] 半梯為直角梯形。

[3] 安島直圓，《不朽算法》下卷，引自徐澤林，《和算選粹補編》，頁 416。



圖四《不朽算法》書影－〈下卷〉指數表

而他的新方法，主要先造出一個指數表（如圖四所示為《不朽算法》〈下〉數表的一部份），該表包含了$10^{n\cdot 10^{-1}}$ 、$10^{n\cdot 10^{-2}}$ 、…$10^{n\cdot 10^{-12}}$的近似值，其中 n 為 **1** 至 **9** 的自然數。接著，利用此表搭配與指對數有關的性質，可較快速地求得實數開高次方之值。

最後，安島直圓進一步對此方法評論道：「**別雖有依綴術得開方商數，乘數多者，則諸數亦及繁多，故不載之。**」而這裡的綴術即前面提到過的「開方綴術」，即是利用二項展開式之冪級數公式進行開方，然而，他認為利用查表開方比起利用開方綴術的過程簡單，[4]同樣可看出他對方法或術文是否具簡捷性之關懷。

（二）安島直圓之圓柱穿空圓術

如前述《不朽算法》一書中的第 **35** 道問題為著名的穿去題：「**今有圓柱，徑若干如圖橫穿官圓，空徑若干，問所穿去積幾何。**」（如圖五所示），[5]此問題是已知一圓柱及其直徑，求以一圓形穿過該圓柱時，所交出立體之體積。即相當於求兩圓柱相交成的立體體積。

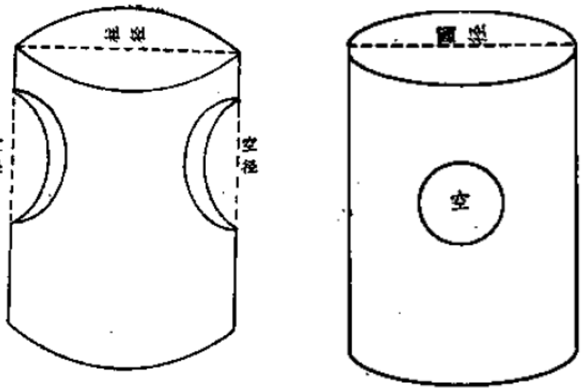
若假設圓柱的直徑為 R、穿去圓的直徑為 r，則《不朽算法》所列的解題術文－圓柱穿空圓術－相當於下列關係式：

$V=V_0-\sum_{k=1}^{\infty}V_k$ ，其中，$V_0=Rr^2\frac{\pi}{4}$ ，$V_k=\frac{(2k-3)(2k-1)}{2k(2k+1)}(\frac{r^2}{R^2})V_{k-1}$，其中，$k$ 為正整數。

---

[4] 這裡我們進一步比較，當我們以查表法開方求 $\sqrt[n]{A}$ 時，只需先查表計算出滿足 $10^x=A$ 的 x 值(x= $\log_{10}A$)，此時計算可得 $\frac{1}{n}x=\frac{1}{n}\log_{10}A$，再查表反求出滿足($\log_{10}r=\frac{1}{n}\log_{10}A$)的 r 值即為所求。相較於前述開方綴術，除了先得造出原數、定乘數 r、定除數 a^n ，之後，必需依序造出各差的乘率 p_i 與除率 q_i ，從而遞回地造出一差、二差、三差等各差。最後「累減逐，得商數」。由此冗長的機械化程式來看，前文中安島直圓所創立之查表開方「新術」，無疑比開方綴術能更加簡捷地開方求得商數。

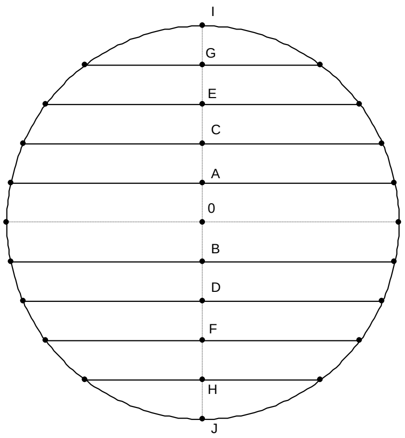
[5] 左圖為《不朽算法》圓柱穿空圓側視圖，引自徐澤林，《和算選粹》，頁 476。右圖為《不朽算法》圓柱穿空圓正視圖，引自徐澤林，《和算選粹》，頁 488。



圖五《不朽算法》圓柱穿空圓側視圖與圓柱穿空圓正視圖

安島直圓於 **1784** 年所著的《圓柱穿空圓術》與《圓柱穿空圓術起源》，提出兩種解題方法，以下，我們進一步作探討。

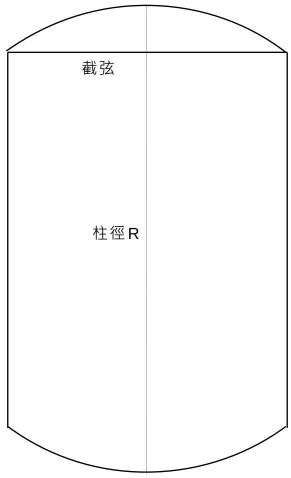
《圓柱穿空圓術》首先「**如圖穿去積數片截之**」，將圖六當中所交出立體圖形橫切成 $2n+1$ 片，每一片成「**帶直台形**」，其底為帶直弧，高為 $\frac{r}{2n}$ 。



圖六安島直圓對穿圓徑分割示意圖

接著，安島直圓對穿去圓的直徑作分割，以圖六為例，他先依直徑等分割共分成 **10** 片。接著，再將上下對稱位置的兩片配對，使得 $\frac{r}{n}=\overline{AB}=\overline{AC}+\overline{BD}=\overline{CE}+\overline{DF}=\overline{EG}+\overline{FH}=\overline{GI}+\overline{HJ}$ ，即第一片以 $\overline{AB}=\frac{r}{n}$ 為高、第二片以 $\overline{AC}+\overline{BD}=\frac{r}{n}$ 為高、第三片以為 $\overline{CE}+\overline{DF}=\frac{r}{n}$ 為高，依此類推。

換句話說，和算家依據上述截徑方法將穿去圖形分割成 n 片的過程，事實上是先分成 $2n$ 片，並令中間 **2** 片自成一片，其高為 r/n ，其它上下對稱的兩片（高各為 $r/2n$ ）合而為一片，如此共得 n 片。筆者將此分割法稱為「配對等分割」。如圖七所示，每一片帶直台形的底面皆為帶直台形。



圖七 各帶直台形之底面：帶直弧形

以割五片為例，第一弦冪 $c_1^{\ 2}=r^2-(\frac{r}{n})^2$ 、第二弦冪 $c_2^{\ 2}=r^2-(\frac{2r}{n})^2$ 、…第五弦冪 $c_5^{\ 2}=r^2-(\frac{5r}{n})^2$ 。利用開方綴術（二項展開式）將各弦 $c_k=\sqrt{r^2-(\frac{kr}{n})^2}$ 展開得：

$$c_1=\sqrt{r^2-(\frac{r}{n})^2}=r-\frac{1}{2r}(\frac{r}{n})^2-\frac{1}{8r^3}(\frac{r}{n})^4-\frac{1}{16r^5}(\frac{r}{n})^6-\frac{5}{128r^7}(\frac{r}{n})^8-\frac{7}{256r^9}(\frac{r}{n})^{10}-\ldots$$

$$\ldots$$

$$c_k=\sqrt{r^2-(\frac{kr}{n})^2}=r-\frac{1}{2r}(\frac{kr}{n})^2-\frac{1}{8r^3}(\frac{kr}{n})^4-\frac{1}{16r^5}(\frac{kr}{n})^6-\frac{5}{128r^7}(\frac{kr}{n})^8-\frac{7}{256r^9}(\frac{kr}{n})^{10}-\ldots$$

再將上述 $c_1,c_2,c_3\ldots$ 代入《弧背術解》一書所得帶直弧積公式：

$$A=Rc-\frac{1}{6}\frac{Rc^3}{R^2}-\frac{1}{42}\frac{Rc^5}{R^4}-\frac{1}{112}\frac{Rc^7}{R^6}-\frac{5}{1152}\frac{Rc^9}{R^8}-\ldots$$

則帶直弧積為：

$$A_1=Rc_1-\frac{1}{6}\frac{Rc_1^{\ 3}}{R^2}-\frac{1}{42}\frac{Rc_1^{\ 5}}{R^4}-\frac{1}{112}\frac{Rc_1^{\ 7}}{R^6}-\frac{5}{1152}\frac{Rc_1^{\ 9}}{R^8}-\ldots$$

原數　一差　　二差　　三差　　四差

其中，把上述 c_1 代入後可得：

原數= $Rc_1=Rr-\frac{R}{2r}(\frac{r}{n})^2-\frac{R}{8r^3}(\frac{r}{n})^4-\frac{R}{16r^5}(\frac{r}{n})^6-\frac{5R}{128r^7}(\frac{r}{n})^8-\frac{7R}{256r^9}(\frac{r}{n})^{10}-\ldots$

一差= $Rc_1(\frac{1}{6}\frac{c_1^{\ 2}}{R^2})$

$$=(Rr-\frac{R}{2r}(\frac{r}{n})^2-\frac{R}{8r^3}(\frac{r}{n})^4-\frac{R}{16r^5}(\frac{r}{n})^6-\frac{5R}{128r^7}(\frac{r}{n})^8-\ldots)(\frac{1}{6R^2})(r^2-(\frac{r}{n})^2)$$

$$=\left(Rr-\frac{R}{2r}(\frac{r}{n})^2-\frac{R}{8r^3}(\frac{r}{n})^4-\frac{R}{16r^5}(\frac{r}{n})^6-\frac{5R}{128r^7}(\frac{r}{n})^8-\ldots\right)\left(\frac{r^2}{6R^2}-\frac{1}{6R^2}(\frac{r}{n})^2\right)$$

$$=\left[\frac{r^3}{6R}-\frac{r}{6R}(\frac{r}{n})^2\right]+\left[-\frac{r^3}{12R}(\frac{r}{n})^2+\frac{1}{12rR}(\frac{r}{n})^4\right]+\left[-\frac{1}{48rR}(\frac{r}{n})^4+\frac{1}{48r^3R}(\frac{r}{n})^6\right]\ldots$$

二差$=Rc_1(\frac{1}{40}\frac{c_1^4}{R^4})$

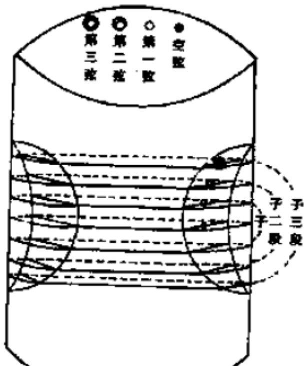
$$=\left[\frac{r^5}{40R^3}-\frac{r^3}{20R^3}(\frac{r}{n})^2+\frac{r}{40R^3}(\frac{r}{n})^4\right]+\left[(\frac{r}{n})^2-\frac{r^3}{80R^3}(\frac{r}{n})^2-\frac{r}{40R^3}(\frac{r}{n})^4+\frac{r}{80R^3}(\frac{r}{n})^6\right]$$

以此類推，可得各差的展開式。最後，以原數減去逐差的展開式即為第一帶直弧積 A_1。第一帶直台積為底面帶直弧積乘上高，即 $V_1=A_1\cdot\frac{r}{n}$。又由於，$\lim_{n\to\infty}\frac{r}{n}=0$，所以化簡後可得 V_1。同理可得第二帶直台積 V_2、…、第 k 帶直台積 V_k，而所求穿去積即可整理成 $V=V_0-\sum_{k=1}^{\infty}V_k$，其中，$V_0=Rr^2\frac{\pi}{4}$，$V_k=\frac{(2k-3)(2k-1)}{2k(2k+1)}(\frac{r^2}{R^2})V_{k-1}$。依此法所得結果即前述《不朽算法》中所列的術文。

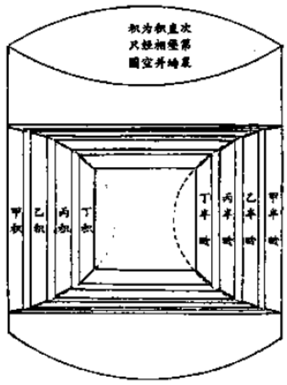
前述《圓柱穿空圓術》的解題過程，安島直圓採取截鉛直直徑的方式，將所求相交立體圖形切成若干橫切片「帶弧直台」(如圖八所示)，[6]利用「開方綴術」與「垛積術」各自求積後再併之得所求穿去積。而後安島直圓在《圓柱穿空圓術起源》又提出另一方法，他採取截水平直徑的方式（如圖十與圖十一所示)，[7]將所求相交立體圖形切成若干直立切片「直堡壔形」(如圖九示)，[8]同樣利用「開方綴術」與「垛積術」求得積各直堡壔積，最終併之為所求穿去積。安島直圓在《圓柱穿空圓術起源》所得穿去積公式為：[9]

$$V=1-T-\frac{1\cdot 3}{3}D_1T-\frac{3\cdot 5}{6}D_2T-\frac{5\cdot 7}{10}D_3T-\ldots$$

其中，$T=\frac{r^2}{8R^2}$，$D_1=T$、$D_2=\frac{1\cdot 3}{3}D_1T$、$D_3=\frac{3\cdot 5}{6}D_2T$、$D_4=\frac{5\cdot 7}{10}D_3T$。



圖八 圓柱穿空圓橫截圖



圖九 圓柱穿空圓縱截圖

[6] 本圖引自徐澤林，《和算選粹》，頁 477。

[7] 圖 3.5.12 與圖 3.5.13 皆引自徐澤林，《和算選粹》，頁 488。

[8] 本圖引自徐澤林，《和算選粹》，頁 488。

[9] 受篇幅限制，本文不列出安島直圓的解題求術過程，至於詳細作法可參考本文後續內容或參考王裕仁，《安直直圓《不朽算法》之內容分析》，2013。

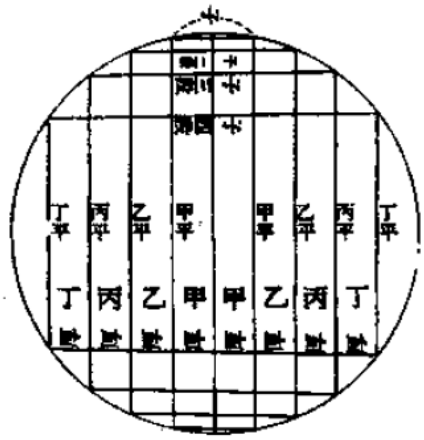


圖 **3.4.12** 截水平直徑側視圖

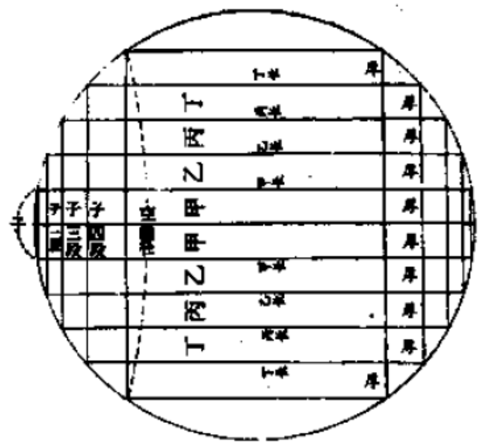


圖 **3.4.13** 截水平直徑俯視圖

安島直圓求弧背術以及圓柱穿空圓術的過程，主要是利用截徑與截弦法，將所求圖形作「分割」再「求和」。在求和的過程中，安島直圓利用到《弧背術解》一書所得之弧背術和《綴術括法》中的開方綴術（二項展開式）對帶根號的式子作展開，並以垛積術求和。最終，略去$\frac{R}{n}$相關項，相當於利用了$\lim_{n\to\infty}\frac{R}{n}=0$的性質。

五、結語

綜觀安島直圓在算學上的主要成就與貢獻，除了作為十八世紀末期關流最重要的代表性人物之外，他在關流中可謂扮演了承先啟後的角色。首先，他承繼了十八世紀初期與中期建部賢弘與松永良弼等關流和算家對弧背術的興趣，利用圓理二次綴術處理了弧背與穿去積問題。[10]在《弧背術解》一書中，透過截弦的方式，對帶直弧形分割求和求得帶直弧積，進而求得弧長公式。一方面安島直圓的「截弦法」打破關孝和以來「截背術」之傳統，雖然悖逆了建部賢弘處理此一問題時，所主張的「順形質」原則，[11]卻也為往後和算家開創新路，諸如十九世紀《圓理算經》所列各類截法，多為截弦法的推廣。

同樣地，安島直圓還透過兩種分割求和的積分方式，解決了前人所提出的穿去積問題，並開創和算家算學研究與設計問題的新方向，這類穿去題儼然成為十九世紀和算家關心的重要問題之一，[12]諸如《圓理算經》或《算法圓理鑑》等和算著作，皆包含了許多更複雜且更具創意的穿去題，同時也從求穿去體的體積問題進一步推廣至求穿去體的表面積以及求交周問題。到了十九世紀，和田寧等關流和算家亦以安島直圓「分割求和」的積分為基礎，輔以各類圓理表的發明，推廣出更具一般性且更簡捷的和田寧積分法－「圓理豁術」。例如《圓理算經》一書所解決的圓周、弧長、橢圓周長、穿去積、去面積、交周等圓理問題，多是以「截弦（徑）法」為基礎，搭配分割求和的方式來處理。

[10] 過去史家認為安島直圓使用了圓理二次綴術，亦相當於二重積分，然筆者就文本的考察發現，其所使用的綴術包含了開方綴術，即有理數的二項式定理展開式，其與積分概念無關，而處理「平圓穿空圓術」之穿去積問題過程中，共使用了三次綴術。王裕仁，《安直直圓《不朽算法》之內容分析》相關研究中亦持同樣觀點。

[11] 建部賢強在《綴術算經》中提到，對圖形作分割時，必慮考慮圖形本身的特性。欲求圓弧長或圓周長時，對圓周或弧作等分割才是「順應圖形特性」的方法，對直徑或弦長等分割則否。

[12] 小林龍彥、田中薰的研究中收集整理了十九世紀之後，奉納於算額上的穿去題，共計 138 面算額、178 個問題，可見十九世紀後，穿去題所受重視。參考小林龍彥、田中薰，〈算額にあらわれた穿去問題について〉，《日本數學史學刊》，第 90 卷，1981 年。

另外，安島直圓《綴術括法》，延續了前人的研究，將「開方綴術」，即$(1\pm x)^{1/2}$之展開式推廣至$(1\pm x)^{1/n}$，其中 n 為任意正整數的情況，書中並以表的方式來表示此二項展開式的各項係數，這樣的方法也被十九世紀和算家所繼承。例如，和田寧除了對二項展開式的指數作更一般化的推廣之外，更利用「表」的方式來記錄、表示出各類展開式之各項係數之間的關係。除了以綴術括法處理開 n 次方問題外，安島直圓考量傳統開方法以及開方綴術在實作過程中需要做複雜的計算，因而編製了指數表，以此表搭配指數、對數相關性質，求解高次開方問題的數值解，整體而言，比傳統開方綴術來得簡便許多。

而安島直圓死後由他的弟子日下城整理而成的遺稿－《不朽算法》，則是安島直圓生前所創造的數學問題集，從此書可看出安島直圓創造、推廣、解決各類幾何問題時的創意與能力。安島直圓先是繼承了《精要算法》的累圓問題，並將原問題中的「等腰三角形」、「兩個圓」等條件，進一步作推廣至任意三角形以及任意多個圓的一般化情況。除了平面上三角形容累圓問題外，《不朽算法》更進一步推廣至平面上圓容累圓問題、空間中錐體容累球、空間中內弧錐與外弧錐容累球等問題，也發明了其它平面圖形的容圓、容橢圓問題。從這些幾何問題推廣，以及求解這些問題所提出的「通術」，也看出他對問題抽象性與一般性的關懷。

當時的關流和算家們，便是以一般化的問題與術文為目標，並基於術文是否簡捷易操作等原則，從事舊題新解，改進舊有術文與方法，進而創造出新術文與新方法。換言之，追求數學問題與解題公式的抽象化與一般化，以及追求更好或更簡捷的術文，皆是引發安島直圓和當時代和算家從事數學研究的重要動機與知識需求。

參考文獻

一手文本

安島直圓，《不朽算法》，**1799** 年。收入徐澤林《和算選粹補編》。北京：科學出版社，**2009**，頁 **399 - 423**。

安島直圓，《弧背術解》，收入徐澤林《和算選粹》。北京：科學出版社，**2008**，頁 **467 - 475** 。

安島直圓，《圓柱穿空圓術》，收入徐澤林《和算選粹》。北京：科學出版社，**2008**，頁 **476 - 487**。

安島直圓，《圓柱穿前圓術起源》，收入徐澤林《和算選粹》。北京：科學出版社，**2008**，頁 **488 - 500**。

安島直圓，《綴術括法》，收入徐澤林《和算選粹補編》。北京：科學出版社，**2008**，頁 **426 -431**。

研究論文與專書

小林龍彥、田中薫，〈算額にあらわれた穿去問題について 〉，《日本數學史學刊》，第 **90** 卷，**1981**。

王裕仁，《安直直圓《不朽算法》之內容分析》，國立台灣師範大學碩士論文未出版。

徐澤林，《和算選粹》。北京：科學出版社，**2008**。

徐澤林，《和算選粹補編》。北京：科學出版社，**2009**。

徐澤林，《和算中源-和算算法及其中算源流》。上海：交通大學出版社，**2013**。

黃俊瑋，《關流算學研究及其歷史脈絡：1722-1852》，國立台灣師範大學博士論文未出版，**2015**。

黃俊瑋，王裕仁，〈和算家如何追求一般化與簡捷性：以安島直圓為例〉，本文收錄於《數學的東亞穿越》，**2018**。

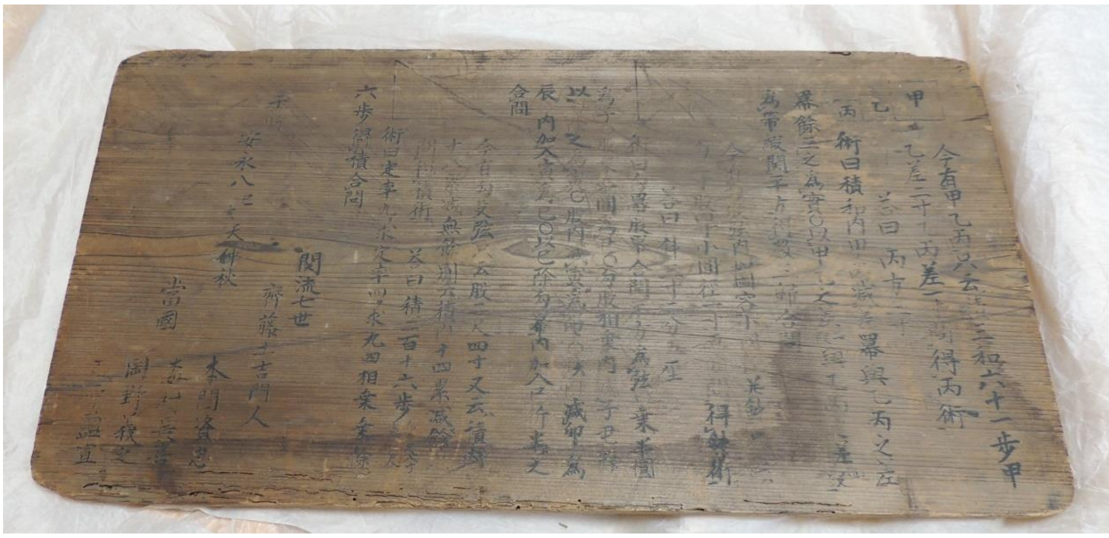
研究隨筆：愛知縣岡崎市六所神社算額

英家銘、吳韋霖
國立臺北教育大學數學暨資訊教育學系

2018 年 **1** 月，本文的第一作者赴日本愛知縣、岐阜縣與京都府進行訪問研究。在愛知縣的部分，第一作者拜訪了愛知縣岡崎市的六所神社。岡崎是江戶時代開創者德川家康（**1543-1616**）的出生地，而六所神社則是以家康出生地守護神的地位從江戶時代一直被保存到今日。

圖一：愛知縣岡崎市六所神社（攝影：英家銘）。

岡崎市六所神社中，保存有一幅 **50cm x 25cm** 的算額，並不算太大。第一作者在 **2018** 年 **9** 月參加日本全國和算大會時，聽和算研究者佐藤健一老師說，六所神社的這幅算額是他在 **1970-71** 年左右發現的。下圖是岡崎市六所神社保存的算額。



圖二：愛知縣岡崎市六所神社算額（攝影：英家銘）

這幅算額並沒有在神社內公開展示，第一作者是向在神社中工作的巫女詢問，確認有收藏算額之後，再麻煩她從倉庫取出讓筆者觀看且拍照。所幸這間神社並非熱門觀光景點，巫女才有時間應第一作者的不情之請，把算額取出。

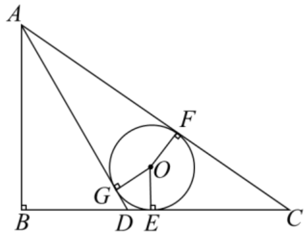
根據算額上面的記載，這幅算額是當地的關流斎藤土吉門人本間資忠等四人，在 **1779** 年奉納。相對於大多數現存的 **19** 世紀算額，這幅 **18** 世紀後半的算額算是較為古老。算額上面共有三個題目，第一題是很基本的二次方程問題，第三題解讀上目前有困難。至於第二題，則是和算中較具有代表性的平面幾何問題。這題是適合國中程度的平面幾何問題。下面我們將第二題進行解讀，主要的解讀內容為第二作者所完成。首先，第二題的問題與術文如下：

> **今有勾股弦內如圖容圓小圓徑并斜只云勾三寸股四寸小圓徑一寸五分**
> **問得斜術**
> **答曰斜三寸二分五厘**
> **術曰勾冪股冪合開平方為弦〇乘半圓為子〇股乘半圓為丑〇勾股相乘**
> **內減子丑餘以勾除之為寅〇股內減寅為卯〇弦內減卯為辰〇內加入寅**
> **為巳〇以巳除勾冪內加入巳折半之合問**

根據問題與術文，我們可以用現代符號如此解讀。問題是這樣的：

直角三角形 ABC 中有一線段與一小圓，小圓與直角三角形 ABC 及線段分別交於點 E、F、G，已知直角三角形 ABC 之勾 AB 與股 BC 長及小圓直徑長，問線段 AD 長。如圖三。

而算額上的解法，我們可以分步驟敘述如下：



圖三

(1)勾冪股冪合開平方為弦：$\sqrt{勾^2+股^2}=弦$

$\overline{AC}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

(2)乘半圓為子：弦$\times$**半圓**$=$**子**

$子=0.75\times5=3.75\ (=2\Delta AOC)$

(3)股乘半圓為丑：股$\times$**半圓**$=$**丑**

$丑=0.75\times4=3\ (=2\Delta BOC)$

(4)勾股相乘內減子丑餘以勾除之為寅：$\dfrac{(勾\times股)-子-丑}{勾}=寅$

$$(勾\times股)-子-丑=子=2\Delta ABC-2\Delta AOC-2\Delta BOC=2\Delta AOB$$

$$寅=\frac{(勾\times股)-子-丑}{勾}=\frac{2\Delta AOB}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AB}\times\overline{BE}}{\overline{AB}}=\overline{BE}$$

$$\Rightarrow\overline{BE}=\frac{(3\times4)-3.75-3}{3}=1.75$$

(5)股內減寅為卯： 股$-$寅$=$卯

卯$=4-1.75=2.25\ (=\overline{CE}=\overline{CF})$

(6)弦內減卯為辰： 弦$-$卯$=$辰

辰$=5-2.25=2.75\ (=\overline{AF}=\overline{AG})$

(7)內加入寅為巳： 寅$+$辰$=$巳

$$\text{巳}=\text{寅}+\text{辰}=\overline{AG}+\overline{BE}=\overline{AG}+\overline{BD}+\overline{DE}=\overline{AD}+\overline{BD}=1.75+2.75=4.5$$

(8)以巳除勾冪內加入巳折半之合問： $\left(\dfrac{\text{勾}^2}{\text{巳}}+\text{巳}\right)\div 2=\text{斜}$

$$\left(\frac{\text{勾}^2}{\text{巳}}+\text{巳}\right)\div 2=\left(\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AD}+\overline{BD}}+(\overline{AD}+\overline{BD})\right)\div 2=\left(\frac{\overline{AD}^2-\overline{BD}^2}{\overline{AD}+\overline{BD}}+(\overline{AD}+\overline{BD})\right)\div 2$$

$$=\left((\overline{AD}-\overline{BD})+(\overline{AD}+\overline{BD})\right)\div 2=\overline{AD}$$

$$\text{斜}=\overline{AD}=\left(\frac{3^2}{4.5}+4.5\right)\div 2=3.25$$

日本目前現存有九百多片算額，上面有許多問題都可以對應到中學數學相關的幾何問題，有些問題即使從 **21** 世紀的角度還是頗有創意。未來我們也希望繼續介紹算額與其中的數學問題，供臺灣中學師生學習與欣賞。

1. **為節省影印成本，本通訊將減少紙版的的發行，請讀者盡量改訂 PDF 電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail 至 suhy1022@gmail.com**
2. **本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。**
3. **歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請 e-mail 至 suhy1022@gmail.com**
4. **本通訊內容可至網站下載。網址：http://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/hpmletter.htm**
5. **以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡**

《HPM 通訊》聯絡員

日本：**陳昭蓉** (東京 Boston Consulting Group)
基隆市：**許文璋**（銘傳國中）
台北市：**楊淑芬**（松山高中）**杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍**（成功高中）**蘇俊鴻**（北一女中）**陳啟文**（中山女高）**蘇惠玉**（西松高中）**蕭文俊**（中崙高中）**郭慶章**（建國中學）**李秀卿**（景美女中）**王錫熙**（三民國中）**謝佩珍、葉和文**（百齡高中）**彭良禎、鄭宜瑾**（師大附中）**郭守德**（大安高工）**張瑄芳**（永春高中）**張美玲**（景興國中）**文宏元**（金歐女中）**林裕意**（開平中學）**林壽福、吳如皓** (興雅國中) **傅聖國**（健康國小）**李素幸**（雙園國中）**程麗娟**（民生國中）**林美杏**（中正國中）**朱賡忠**（建成國中）**吳宛柔**（東湖國中） **王裕仁**（木柵高工）**蘇之凡**（內湖高工）
新北市：**顏志成**（新莊高中） **陳鳳珠**（中正國中）**黃清揚**（福和國中）**董芳成**（海山高中）**孫梅茵**（海山高工）**周宗奎**（清水中學）**莊嘉玲**（林口高中）**王鼎勳、吳建任**（樹林中學）**陳玉芬**（明德高中）**羅春暉** (二重國小) **賴素貞**（瑞芳高工）**楊淑玲**（義學國中）**林建宏** （丹鳳國中）**莊耀仁**（溪崑國中）、**廖傑成**（錦和高中）
宜蘭縣：**陳敏皓**（蘭陽女中）**吳秉鴻**（國華國中）**林肯輝**（羅東國中）**林宜靜**（羅東高中）
桃園市：**許雪珍、葉吉海**（陽明高中）**王文珮**（青溪國中） **陳威南**（平鎮中學）**洪宜亭、郭志輝**（內壢高中） **鐘啟哲**（武漢國中）**徐梅芳**（新坡國中） **程和欽** (大園國際高中)、**鍾秀瓏**（東安國中）**陳春廷**（楊光國民中小學）**王瑜君**（桃園國中）
新竹市：**李俊坤**（新竹高中）、**洪正川**（新竹高商）
新竹縣：**陳夢綺、陳瑩琪、陳淑婷**（竹北高中）
苗栗縣：**廖淑芳** (照南國中)
台中市：**阮錫琦**（西苑高中）、**林芳羽**（大里高中）、**洪秀敏**（豐原高中）、**李傑霖、賴信志、陳姿研**（台中女中）、**莊佳維**（成功國中）、**李建勳**（萬和國中）
彰化市：**林典蔚**（彰化高中）
南投縣：**洪誌陽**（普台高中）
嘉義市：**謝三寶**（嘉義高工）**郭夢瑤**（嘉義高中）
台南市：**林倉億**（台南一中）**黃哲男、洪士薰、廖婉雅**（台南女中）**劉天祥、邱靜如**（台南二中）**張靖宜**（後甲國中）**李奕瑩**（建興國中）、**李建宗**（北門高工）**林旻志**（歸仁國中）、**劉雅茵**（台南科學園區實驗中學）
高雄市：**廖惠儀**（大仁國中）**歐士福**（前金國中）**林義強**（高雄女中）
屏東縣：**陳冠良**（枋寮高中）**楊瓊茹**（屏東高中）**黃俊才**（中正國中）
澎湖縣：**何嘉祥 林玉芬**（馬公高中）
金門：**楊玉星**（金城中學）**張復凱**（金門高中） **馬祖：王連發**（馬祖高中）

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。懇請各位老師惠賜高見！