HPM 通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系退休教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）
助理編輯：黃俊瑋（和平高中）
編輯小組：蘇意雯（台北市立大學）蘇俊鴻（北一女中）
葉吉海（桃園陽明高中）陳彥宏（成功高中）
英家銘（台北教育大學）
創刊日：1998 年 10 月 5 日
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng
聯絡信箱：suhy1022@gmail.com

第二十一卷 第四期合刊目錄(2018 年 4 月)

🗎 《數學的東亞穿越》編輯前言 …………………………………… 洪萬生
🗎 數學閱讀專欄：《平面國－向上，而非向北》讀書心得 …………………………………… 張祐銘
🗎 用心感受──從古埃及數字反思如何同理………………………… 陳映竹
🗎 推薦：《用數學的語言看世界》 …………………………………… 廖傑成

《數學的東亞穿越》編輯前言

洪萬生
台灣師範大學數學系退休教授

本書構想源自《數學人文》刊物的「東亞數學史專輯」(第 7、8 期)。在本書編輯過程中，我們基於年代因素及算學文本內涵特性，而將收羅文章範圍限制在大約 1600-1900 年間的中、日、韓等國數學發展之敘事與論述。這十一篇文章主題分配如下：和算史（日本數學史）有五篇、東算史（韓國數學史）與中算史（中國數學史）則各有三篇。我們希望藉由這些故事的鋪陳，帶給讀者一個初步的東亞穿越之數學知識圖像。

算學在東亞世界「穿越」，從中日、中韓甚至日韓的算學交流或關係脈絡來看，似乎都顯得自然而然。的確，東算（*tongsan*）或和算（*wasan*）都系出中算（*chungsuan*），這或許也解釋了何以它們的算學經典都以漢字書寫或出版。換言之，東算或和算都是以傳入的中算為基礎，而各自發展出來的獨特算學文明。這些獨特性在一般的「關係史敘事」中，常常隱晦不彰，或許「互動關係」之關照一直主宰史家視野，是可以「歸咎」的原因吧。因此，在本書中，我們雖然將中算史、東算史及和算史「同框」，但是，我們所極力著眼的，還是這三支算學文明的各自傳統特色。我們深信唯有如此，算學在東亞異時空之間的穿越，才會大大裨益於我們引發更豐富的歷史想像。

基於前述的考慮，我們在本書中，不會特別說明《楊輝算法》(楊輝著)、《算學啟蒙》(朱世傑著）以及《算法統宗》(程大位著）等中算經典，如何影響甚至形塑了東算與和算。取而代之的，在中算史這一邊，我們打算述說明清兩代較少為人所知的數學（家）故事。比如說吧，林倉億的〈明代日用類書「筭法門」的著述與出版：1597-1633〉，就非常清楚地告訴我們：「從明代各種算學文本來看，日用類書『筭法門』也標誌著一種社會空間的分化，有意從商、吏、幕的人，日用類書提供了合適的閱讀空間」。從這些書籍的著述與出版等「商業活動」，當然也可以看出其他相關的社會文化意義。在

拙文〈數學與明代社會：**1369-1607**〉指出明代算學的商業化之後，倉億針對日用類書筭法門的中算史意義，述說了更深入、更細緻的故事。

同樣具有相當新穎中算史洞識的論文，還有張秉瑩的〈帝國縮影：清代官方天文曆算發展與欽天監疇人世家〉，以及蘇俊鴻的〈學術贊助：清代數學發展一個社會史考察〉。在針對欽天監疇人世家的鉅細靡遺調查之後，張秉瑩以何國宗家族為例，指出：到了嘉慶中期，「何氏子弟再也沒有什麼特出的名聲，也許與對鑽研知識有興趣的數學家相比，他們更像以特定技能謀生的職人。」此外，在欽天監這種國家官僚機構中的疇人（天文技術人員）難免因循苟且，因此，她以原先熱中西法的羅士琳（**1789-1853**）之際遇為參照，特別指出：「羅士琳大約在嘉慶末期進入欽天監成為天文生，但因為遭到同儕的忌妒而且無法晉升，最後離開欽天監，轉而成為研究中算法的民間數學家。」

羅士琳離開欽天監之後的故事，顯然與（學者高官）阮元的學術贊助息息相關。而這正是蘇俊鴻〈學術贊助：清代數學發展一個社會史考察〉一文之主題。不同於康熙皇帝及其大臣李光地，乃至於自強運動督撫的作法，阮元以其崇高的政治與學術地位，贊助多數（民間）學者如羅士琳，以及較早的焦循與李銳等人從事算學研究或著書立說（如編纂《疇人傳》及《續疇人傳》)，「建立學統，開拓儒學知識內容」，將「興復古學、昌明中法」視為最神聖的學術使命，進而締造了乾嘉考據學派的盛世。阮元的贊助在算學研究尚未制度化之前，為算學研究者提供了「終身以之」投入的從容學術環境，從而為算學在晚清中國的逐漸專業化，埋下了深厚的基礎。

在東算史這一方面，本書總共收入三篇論文，分別是：〈從東算術士慶善徵看十七世紀朝鮮一場數學研討會〉、〈朝鮮儒家讀九章：以趙泰耉〈九章問答〉為例〉，以及〈「方程之術，即中等之法，何難之有？」-- 從朝鮮的中人技術官僚傳統看東亞算學的發展與交流〉。第一篇由我與李建宗合撰，主題是中人（***chungin***）算學者慶善徵（**1616-?**），他的故事說明了朝鮮中人的算學能力在兩班（***yangban***）階級中所贏得的專業尊重。相對而言，上述第二篇論文的主角是兩班階級的趙泰耉（**1620-1723**），則試圖在朝鮮儒學的論述結構中，說明算學的價值與意義。除了實用之外，趙泰耉還強調算學的道德功能。第三篇則是由英家銘與我合寫（由他主筆）的論文，主角有朝鮮中人洪正夏（**1684-?**）與清國疇人何國柱，後者是前述張秉瑩所說的何家主要成員之一。這個對話插曲說明了儘管東算源自中算，然而，朝鮮中人算學者還是對於東算自己的學術地位（在所謂「中華」的脈絡中） -- 尤其是其專業自主 -- 深具信心。此外，從比較史的觀點切入，同樣是「世襲」，朝鮮中人算學階級 **vs.** 清國疇人世家卻可以讓我們從各自封閉的社會系統中，看到中人或疇人如何透過制度運作，以保持家族的社會地位。

在上一段的對比中，我們似乎看不到贊助者（**patron**）的角色 -- 前述清國阮元的贊助，似乎都不及於疇人世家，以羅士琳為例，他是在離開欽天監天文生的官僚身份，才投入阮元門下並接受贊助。或許，中人或疇人所擁有的知識或技能（「家學」？），都只是在各自封閉的社會系統中運作，而無法透過其他的傳播方式，促進算學（或天文曆算）的交流與發展。

無論如何，上文提及的中算與東算之歷史，強烈地映照出和算發展的一個獨特風貌，那就是，在德川幕府體制下，地方大名所扮演的贊助者角色。譬如說吧，久留米藩主有馬賴僮（關流弟子）為了促進藩內和算發展，特別敦聘藤田貞資（**1734-1807**，也是關流弟子）為算學師範。類似這種為算學武士挹注文化資本與生活保障的策略，對於和算流派之間的競爭（透過算額奉納），帶來了極為積極的效果，也是我們想要更好理解和算風格的必要憑藉。針對這一段歷史背景，數學小說《算法少女》的作者遠藤寬子，就提供了一個頗為溫暖的書寫，非常值得我們欣賞與參照。

事實上，黃俊瑋為本書所貢獻的〈江戶日本的一場數學論戰〉與〈江戶時期的算學道場、和算教科書與數學專業〉這兩篇論文，就刻劃了和算教育與傳播的獨特機制，其中，和算大師關孝和所創立的關流，當然扮演了最重要的角色。另一方面，黃俊瑋也以千葉胤秀（**Chiba Tanehidem, 1775-1849**）父子為例，說明農人階級如何利用和算的教育與傳播脈絡中，建立家學從而提升家族的社經地位：「雖然千葉胤秀原為農家子弟，但在其潛心學習數學這門學問後，最終得以因算學能力受聘於一關藩，擔任算學師範，並且自立門戶開設算學道場，廣收學生、教授和算以謀求生計，進而改變原有社會地位與名望。」而且，「除了千葉胤秀本身之外，『數學』也使得原本務農為生的千葉家族，得以依賴這樣一門『專業』的學問，提升了社會地位，轉而成為當時重要且頗具聲望的算學家族。」

儘管如此，和算始於更早的村松茂清（**Muramatsu Shigekiyo, 1608-1695**），這是廖傑成的〈前關流期的和算大師：村松茂清〉所要述說的故事。根據他的研究，村松茂清的《算俎》正是結合了《塵劫記》的實用性與《豎亥錄》的學術性，而成為一部具有百科全書風格的和算著作，讓一般商人或農民階層可輕易掌握與流傳。村松茂清生平事蹟的一個有趣插曲，是他與「赤穗四十七浪士」的關係（他的兒子與養子兩人都屬於這個集團），但是，在元祿文化時期（**1688-1704**）的脈絡中，我們還找不到後續的故事發展。

至於黃俊瑋與王裕仁合撰的〈和算家如何追求一般化與簡捷性：以安島直圓為例〉，以及黃俊瑋自己撰寫的〈江戶後期的算學研究：以和田寧《圓理算經》為例〉，都是在東亞數學的穿越中，針對和算家的獨特進路所做的研究報告。在前者中，黃俊瑋與王裕仁以安島直圓（**Ajima Naonobum, 1732 - 1789**）的算學為例，說明「和算家除了追求正確的術 － 演算法 － 之外，探尋精密程度更佳的術、逼近速度更快的術，以求得更精密的數值等目的，在在成為和算家推動數學研究的重要動機，譬如，他們針對圓周率與求圓周術問題不斷精益求精，舊題新解，甚至一題多解，都展現出他們對『正確性』與『精密性』等相關知識價值與知識需求的關懷。」

和算的推陳出新，尤其是就數學知識本身，不斷地挖掘難題的高度興趣，也充分表現在幕末和算家和田寧（**Wata Yasushi, 1787-1840**）身上。針對他的成就，黃俊瑋評論說：「儘管和算家並未發展出坐標、解析幾何乃至函數等西方現代微積分學的基礎工具，然而，他們利用固有的點竄符號系統，加上和田寧所製作各類圓理表的輔助之下，而發

展出一套處理求解弧長、面積、體積、穿去積、去面積與交周長的程序性方法。」因此，「雖然求得解術的過程，不似現代積分學那般簡捷容易明瞭，但他們所處理以及解決的許多問題，卻比基礎積分學可觸及的範圍來得廣泛。」這或許也可以解釋：何以和田寧的徒孫福田理軒及其子福田半，在通過中譯的《代微積拾級》（**Elias Loomis** 原著 **Elements of Analytical Geometry and of the Differential and Integral Calculus, 1851**）接觸微積分知識之後，還要根據（英文）原著重新翻譯，並在 **1872** 年出版《代微積拾級譯解》。這顯然是由於他們認識到微積分這個「工具」，遠比他們本土所發展出來的相關方法，要銳利得多，因此，非要徹底深究不可。另一方面，這也足以說明他們已經累積了足夠實力，可以立即學習並理解「洋算」（日本人稱西算為洋算），從而在數十年之內，得與國際數學尖端研究並駕齊驅。

和算、東算以及中算的現代化進程不是本書主題，儘管在本書中，蘇俊鴻在中算史部分不無著墨。不過，任何史家想要從比較史學切入研究，在深入檢視日本、韓國及中國建立數學教育之現代化制度之前，不可避免地，都必須面對它們各自的算學傳統（譬如「專業化」趨勢因素）。而這正是本書的編輯初衷。我們希望本書至少可以為史家乃至一般讀者，提供一個初步的歷史輪廓，按圖索驥，讓穿越東亞的算學，不僅有助於我們欣賞中、日、韓算學的各自豐富面貌，同時，也希望有機會藉由算學這個知識活動，來認識東北亞這三國的各自文化傳統之特色。

利用數學史的研究來探討一個文明的特色，這是我們的企圖，歡迎讀者一起加入我們的行列，乘著算學來穿越東亞世界。

最後，謝謝《數理人文》同意我們收入曾經在該刊發表的文章。

數學閱讀專欄

《平面國—向上，而非向北》讀書心得

張祐銘
台北市立和平高中二年級

一、感想

我覺得本書有如下幾大特色：

1. 透過虛構一位「平面國居民」，帶領大家進入空間的世界。

雖說本書故事主要著墨於平面，但作者旨意應是帶領讀者探索維度間奇幻的世界、定義空間幾何，以及發現每個維度間的差異。這樣創意的敘事手法，使我們能在無壓力的情況下，進入幾何的世界。

2. 本書內容用多樣面向切入平面國的生活。

從氣候、引力等地理學的知識到應運而生建築學，除了如此特別的自然因素，接著這位導遊帶著我們探索這世界的社會及文化。各圖形代表著各式各樣職業、地位。其中女人最卑賤，被設定為線段。除了有專屬女性的門，女性殺傷力最強（直線在有時以平面視角看會變成點，不僅隱形，更可刺傷人）、腦袋不靈光等特性，十分生動描摹出來。制度上以自身邊角數越多越尊貴。例如圓形便是最偉大的主教。當平民藉由修身養性、結婚等方式增加後代邊角數，只要子孫成為純正、官方認證的正三角形。就能擠身貴族的（晉升）行列。讀到這，總覺得這有如傳統中國社會的階級分明、男尊女卑及父母望子成龍的心態，不禁佩服作者豐富的想像力，賦予平面及圖形靈魂。

3. 本書的情節規劃

是從立體看到平面，再從平面看到直線，甚至到點，最後回到立體。我覺得這樣的安排是最好的導覽。讓我們先切換視角從立體到平面，之後就能更容易再切換視角，使得讀者思路更為邏輯和清晰。

4. 此書在很多頁插入了便於思考的範例插圖

例如 **p. 19**，作者以桌面上的一塊三角紙板作範例。隨著視角漸漸切齊桌面，我們看到的不再是三角形，而是一條細線。知道了視覺會變為線段，作者接著介紹平面中辨識彼此的方法。其中有文獻記載，曾有人利用彩繪法令訂定地位，為此甚至爆發彩色革命。

5. 本書主要可切為兩大部分。

除了前面提到的平面國介紹，還有主角正方形親身體會的跨維度遊記。這部分的時間安排富含寓意。作者正方形先安排主角在夢中與直線國王費盡心思談話、實驗、示範二維空間，再藉由球體的拜訪，睜開主角原本狹小的視野。這段過程用了大量敘述描寫主角無法說服直線國王的無奈，再用球體的步步開導，反襯出主角相對的無知及固執於平面。這樣角色互換使讀者更能發現跨維度思考使如此困難。只可惜在經歷過這些、回

到平面世界後，其想法未能受到認同。故只好反過來寫出這本書，向立體空間的我們介紹他的平面國。

二、反思

然則我們是否能從立體思考到四維空間？我們從平面國看見線性的視角，再從直線國看到點的視角。隨著減少的維度，我們看到的是更狹隘的視野。當接觸新事物的我們，是否也會拘泥、固執己見？這樣的我們，是擇善固執？抑或是不知變通？另外四維的世界是如何看我們？四維又是如何的樣子？恐怕難以用現在立體的視覺去解釋。我們時常以直觀的想法去看世界 -- 更正確的說法，是以自己的想法去解釋這宇宙中的一切。像是當初的地心說，便是結合宗教的觀點陳述宇宙觀。但科學並不是只需直覺，更需要藉由工具去推理。沒有球體這位賢者，主角正方形如何超出維度的思考？我們相對於三維以下的世界是如此偉大，但其實我們相對的也十分渺小狹隘吧！看過平面國的一切，真覺得「一沙一世界，一花一天堂」，如何恰當反思，是我們現代人必修的課題吧！

用心感受 — 從古埃及數字反思如何同理

陳映竹
國立台北教育大學數資教育研究所碩一

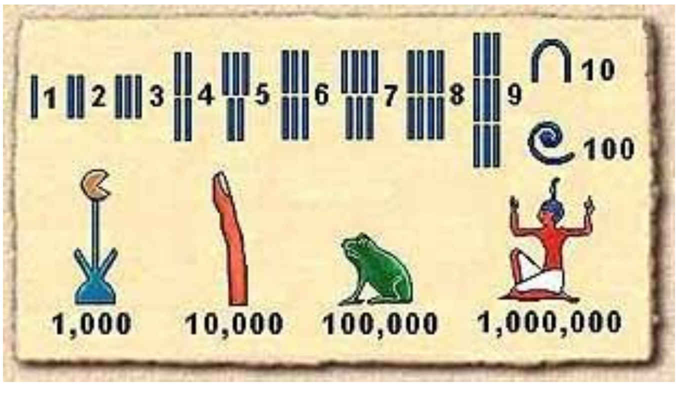
一、理解古埃及象形文字與數的表示方法

因為習以為常，所以無法與之同理 — 當我第一次閱讀古埃及數字時，我只看到一排難以使用的象形圖案。

古埃及數字最早被發現在西元前三千年，古埃及王 **Menes** 用於儀式中的權杖上面的石頭上。那是用來記錄王所征服過的所有成就，這記載了王所掠奪的四十萬隻水牛、一百四十二萬兩千隻羊，和十二萬的俘虜。不過比起這個，更廣為人知的古埃及數學活動，是西元前兩千五百年出土的莎草紙紀錄。有一說埃及會有數學活動，是為了在每次尼羅河氾濫之後，要重新為他們的領土邊界上好標記，所以，對於幾何關係以及代數算數都有發展。

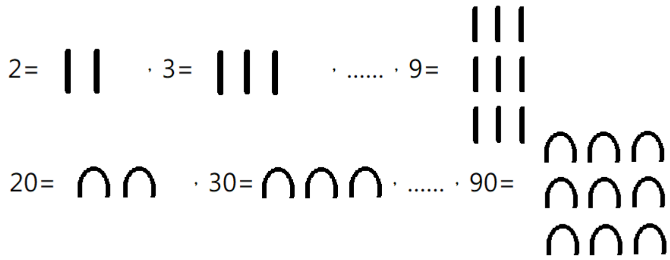
記得曾經學過的課堂上，有介紹過每個數字圖案的由來，知道是十進位記數 …… 就沒有下文。真要說讓人印象深刻的部分就是「難以使用」。每次使用數字都要畫圖，而且若是像九萬，就得畫九根手指，和現在只需要寫 **90000** 就能表示，無論是表達上或是速度上都差太多了；甚至是使用乘法時，還要把被乘數的每個 **2** 倍數都列出來，然後再相加。「當時用這樣的表示法到底有什麼實質用處呢？」我不禁這樣感嘆，難怪到現在還在使用的，是簡潔易用的阿拉伯數字。

古埃及數字是以十進位為基礎的象形符號表示。如下圖一所示，**1** 為一槓，**10** 為馬蹄鐵形，**100** 是漩渦狀，**1000** 則是蓮花，**10000** 是一根向前彎一點的手指，10^5 是一隻蝌蚪，10^6 是一個人興奮地向上舉起雙手。因為當時用到的數字不會到太大，到 10^6 已經是某種天文數字了，所以那個象形符號也有一說是代表（數字大到）很驚訝的表現。



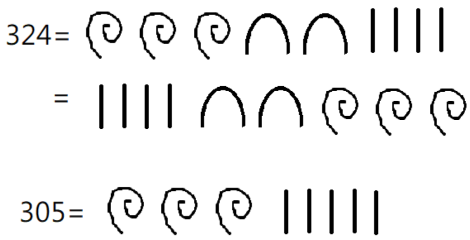
圖一 古埃及數字，出自
https://myancientegyptpractice.wordpress.com/2015/10/16/%E5%8F%A4%E5%9F%83%E5%8F%8A%E6%95%B8%E5%AD%97/

這種數字表達的方法很簡單，有多少數字就畫多少圖案。如下圖（圖二）所示，**2**、**3**、**4** …… 就照數量畫，到 **10** 便進位。



圖二 古埃及數字表示範例 **1**

而表達不同位數的數字，也是照其十進位位值的係數為多少就畫多少，**324** 就是三個百及兩個十及四個一，所以，就是三個漩渦、兩個馬蹄鐵及四條橫槓。從這點也能看出埃及數字是沒有位值意義的，不像現在的阿拉伯數字，在二位數以上時數字放左放右，代表的位數值是不同的；古埃及數字即使不從左至右排列，也不影響其代表的數字（見圖三）。另外，古埃及數字比較特別的一點，是沒有「零」這個符號及意義。例如，要表達 **305** 時，只會畫出三個漩渦以及五條橫槓，並不會特別在中間加上其他代表「零」的符號。



圖三 古埃及數字表示範例 **2**

直到與老師說出自己的感想後，得到了「因為你沒有試著去感同身受」的回答，才像是當頭棒喝一般地，發覺自己根本沒有了解什麼是埃及數字。若只是表面上的看過，那麼確實就是這樣的反應沒錯，對於已經學習許多數學知識，使用流傳已久系統良好的阿拉伯數字的，現在的我而言 — 但那時候的人又是怎麼想的呢？我從來沒有意識到這個問題：沒有阿拉伯數字的埃及人，是怎麼使用這套數字的？

二、古埃及的四則運算

古埃及人的加法是很簡單的。

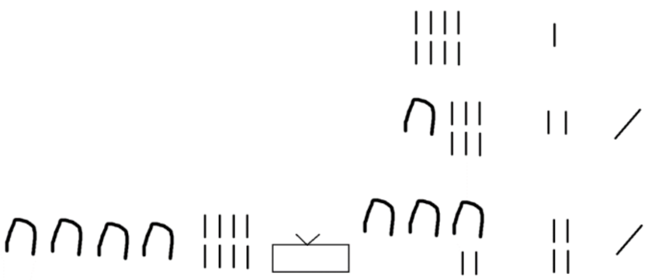
即使是使用象形文字也非常好使用 — 或者說，就因為是象形文字，才可以這麼容易被使用。像是 **1+1** 就是一槓加一槓，一邊寫下兩個 **1** 時就等於完成了加法（兩條一

槓），其他位數也是如此。若是遇到第十條槓，就重新畫一個馬蹄鐵，而不用畫十條槓紀錄。

減法的部分是用加法的反元素的想法進行。不是用減掉多少還剩下什麼，而是還需要加上多少才會等於擁有的數。例如不是 **12-7=？**，而是 **7+？=12**。

再來較為特別的是乘法。

古埃及人的乘法與我們現今的阿拉伯數字運算不同，採取的是「兩倍再相加」的方式。例如 **6・8**，他們沒有九九乘法表直接得出 **48**，而是將被乘數做兩倍記錄：**2・8=16**，**4・8=2・(2・8)=32**，所以**(2+4)x8=16+32=48**。用當時的象形文字寫法則如下圖（圖四）將乘數寫在右邊，被乘數寫在左邊，然後再用斜線當作輔助標記要加總起來的合，最後在總合旁邊畫上一個類似電視機的符號當作結尾。



（圖四　**6x8=48** 用古埃及數字的運算表示）

於是老師要我捨棄孰悉的阿拉伯數字的思考方法，直接使用埃及數字做運算一次。**12・12**，這個用直式乘法就能輕易算出答案的二位數乘法，甚至這是常用的平方數馬上就能得出答案。一開始寫下 **12** 畫出一個馬蹄鐵及兩槓時我還是不以為然，接著寫下兩倍— 當我還在思考，老師這時提示了我：只要重複畫一次剛才的數字就是；接著是四倍，再來是八倍……其實我根本也沒做到所謂的乘以四或是乘以八，都只要把前一個乘以二的答案再乘以二，也就是重複寫一次相加就好。最後只要把四倍的答案加上八倍的答案，就是十二倍的 **12**，也就是 **12・12** 的答案。

為什麼會古埃及數學的乘法會使用兩倍再相加呢？這個方法可以用在所有的乘法上嗎？答案是可以的。

我們把剛才舉例的 **6・8** 再看一次：我們先把 **6** 改寫成 **2** 的次方和 $6=(2^2+2^1)$，再乘上 **8**，可以得到$(2^2+2^1)\cdot 8$，再使用分配律展開得到 $(2^2\cdot 8)+(2^1\cdot 8)$，如果配合古埃及數字的乘法方式來看，就剛好能夠搭配上其兩倍的原因。所有數字皆能展開成 **2** 的次方和，就如同 **10** 進位一樣，就只是改成 **2** 進位罷了。再加上乘法對加法有分配律，因此就能用不斷變成兩倍的被乘數之總和得到乘法的答案。當然，我們不能斷言埃及人已經有二進位的概念，我們只是說這樣的方法一定行得通。

至於整數除法的想法和減法一樣，不是除法，而是還需要幾倍才能得到所求的數字。例如不是 **45/9=？**，而是 **9x？=45**。

「有沒有覺得哪裡不一樣了？」我看著剛才的算式，我發現我從頭到尾都沒有用到「加法」以外的數學。無論是被乘數的兩倍就是自己相加，到最後湊出乘數的數字再把所有數字相加得到答案，全部都只用到了加法。這就是在沒有阿拉伯數字，甚至是九九乘法的情況下，埃及人進行乘法的方式。「因為你的數學高度已經產生了，要你回頭看這樣的數學內容一定無法理解，這個時候就得把自己放在與那時相同的高度，融入那樣的情境。」

三、從古埃及四則運算反思教學

經過前面的理解之後，不知怎地我突然想起曾經輔導過的一名學生，他已經四年級卻還不會背九九乘法，所以十分排斥乘法，堅持使用加法解決問題。雖然說學習乘法是目前升學主義為主的環境不可避免的一環，但我若能用埃及人乘法的方式，教導這名學生還有這樣進行乘法的方式，或許能讓他恢復對乘法的一點信心，進而願意再次學習九九乘法以及一般乘法計算。

說到教學，不也是需要將自己的高度與學生一致，才有辦法看見學生的問題所在嗎？已經身為老師的我們，比起學生學習了更多知識，站在更高的視野去教學，有時（非本科系的更有感觸）會不知道這個單元內容的困難點在哪裡，明明就是這麼淺顯易懂的，為什麼學生總是學不會呢？然後以為是熟能生巧的原因，要學生一昧的靠練習去解決，但沒想到沒有解決到根本的問題，反而還可能會造成學生對學習這個內容的陰影，而我們老師也會認為掌握不到教學的要領感到失落。雖然這不能全怪罪於老師，畢竟許多知識對我們而言已經是習以為常，所以，我們能做的就是盡量貼近學生的思考方式去看待問題，一步步地去分析每個步驟可能會有的思考模式，好讓我們能理解學生的困難點在哪裡，能夠進一步去解決。

我隨著蘇老師的引導才開始對埃及數字有點概念，但也才發現我先前的閱讀，對埃及數字一點真正的了解都沒有，甚至感覺才把自己放在埃及人的思考位置時 — 老師繼續說明數字可以拆成 **2** 的指數相加組合，而我卻沒有意識到這個就等同於現在的十進位處理方式，看來又是回到了理所當然所以沒有理解的位置了。

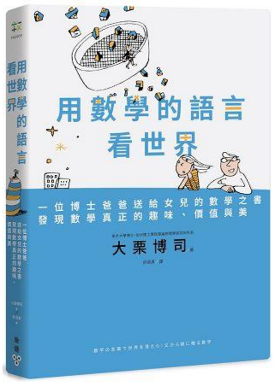
無論是對於同理心還是古埃及數字，或說是數學史以及教學，我想我都還有很多事要學習呢。

參考資料

Bunt, L. N. H., Jones, P. S., & Bedient, J. D. (1988). ***The Historical Roots of Elementary Mathematics*. New York: Dover Publications.**

推薦《用數學的語言看世界》

廖傑成
新北市立錦和高中



書名：《用數學的語言看世界》
作者：大栗博司
出版社：臉譜出版社
譯者：許淑真
出版資料：**288** 頁，平裝本，定價新台幣 **350** 元
出版年月：**2017** 年 **10** 月
ISBN 碼：**978-986-235-589-3**

一、前言

本書作者大栗博司是加州理工學院 **Walter Burke** 理論物理學研究所所長，其學歷為東京大學理學博士。其學術背景為物理方面的專家，但是為何會跨界來寫數學的普及書籍呢？這實在令人好奇。原來，作者的女兒恰好要從小學畢業了，而作者則應邀在其畢業典禮以家長身分演說，其主要訴求就是「希望身兼日語、雙語能力的各位，也能夠學習數學，期待各位能以三語的身分活躍在社會上」。而出版社也覺得這個話題頗有興味，邀請作者將此內容整理擴充，最後形成本書。另外，本書的自序裡，作者也提到曾有數學系的教授邀請他兼任數學系的教授，並對他說「對數學有貢獻的方法並不只是證明定理而已，你的研究可以提出新的數學問題，刺激數學產生新的發展」，可見除了證明數學定理外，能提供好的數學問題也是一個有助於數學發展的能力。接下來，就讓我們來看看本書有哪些特色吧。

二、內容提要

首先，作者是以「機率」的主題引入，這倒是挺讓人耳目一新的設計，畢竟以介紹給普羅大眾的數學普及書籍來說，大部分第一章都是以「數」開始。舉例來說，在亞瑟．班傑明 **(Arthur Benjamin)** 的《數學大觀念》**(*The Magic of Math: Solving for x and Figuring Out Way*)** 裡，第一章就是數字的魔術，介紹級數和的一些奇特模式。而在克勞森 **(Calvin C. Clawson)** 的《數學妖法》**(*Mathematical Sorcery: Revealing by the Secrets of Numbers*)** 裡，第一章即為「數字是怎麼來的？」介紹古埃及人、蘇美人、巴比倫人的數字與六十進位。[1] 由此觀之，以物理見長的大栗博司教授與專業數學家所分別著作的數學普及書，其著眼點有相異之處，也因此，本書亦可讓喜愛數學的讀者們，有另一番風景可以閱讀。

《用數學的語言看世界》的第一話為「利用不確定的資訊來判斷」，即以辛普森 **(O.**

---

[1] 以這《數學大觀念》、《數學妖法》兩本書來對比大栗博司的著作，僅是筆者主觀認為這兩本數普書的寫作對象差不多也是高中生。

J. Simpson) 判決，來說明條件機率與機率解讀的重要性，**1994** 年世界知名的美式橄欖球員辛普森的前妻妮可爾・布朗 **(Nicole Brown)** 與她的友人羅納德・高曼 **(Ronald Goldman)** 被發現陳屍在家門前，又因為辛普森有家暴的前科，所以被懷疑牽涉其中。但是，在這個判決中辯護團主張，有家暴行為的丈夫殺害妻子的機率只有 **1/2500**，這個機率太小，所以，辛普森的家暴不能成為殺人事件的證據。也就是

$$P(\text{殺害妻子}\,|\,\text{家暴})=\frac{1}{2500}$$

然而，真正應該討論的機率應該是「在已經發生家庭暴力的情況下，妻子被殺害時，是由丈夫殺害妻子的機率是多少？」因此，由美國已婚女性當中，平均 **20000** 人中才有 **1** 人會遭受丈夫以外的人殺害。換言之，**100000** 人中有 **5** 人會遭受丈夫以外的人殺害。而有家暴行為的丈夫殺害妻子的機率有 **1/2500**，因此 **100000** 個受到家暴的女性有 **40** 人會被丈夫殺害。因此，全部被殺害的女性有 **45** 人，而全部被丈夫殺和的女性就佔有 **40** 人，當遭受家暴的女性死亡時，丈夫是犯人的機率為

$$P(\text{丈夫殺害}\,|\,\text{家暴且他殺})=\frac{40}{45}=\frac{8}{9}\approx 88.89\%$$

也就是說，若將辛普森的家暴當作證據，他有將近 **9** 成的機率殺害他的妻子。雖然最後判決沒有朝這個數學證據決定，但這裡已提出一個令人為之一亮的機率思考驚艷。

第二話的標題是「回歸基本原理」，也就是，作者回到「數」來說明了。在此，作者特地引述了電動車特斯拉汽車 **(Tesla Motors)** 公司的執行長伊隆・馬斯克 **(Elon Musk)** 說的話：

> **如果想要開拓一個新的領域，達到真正所謂的創新，就必須是從基本原理發想的計畫。不管是哪個領域，先找出那個領域最基本的真理，然後從頭開始思考。雖然需要耗費許多精神以及努力能到達目的，但這給予我的火箭事業很大的助益。**

換句話說，數的創造往往跟基本原理有關。首先是自然數的加法、乘法滿足封閉性，但減法的產生誕生了零與負數，而有了除法即產生分數的概念。除此之外，這裡作者還特別利用連分數來介紹曆算的想法，例如，一年精確的天數應為 **365.24219** 天，因此若每年以 **365** 天計算，到了第四年就會有一天的誤差（$0.24219\times 4=0.96876\approx 1$），因此，如將 **365.24219** 表示成近似分數

$$365.24219=365+0.24219\approx 365+\frac{1}{4.12899}\approx 365+\frac{1}{4}=365.25$$

也就是，平常會說四年一閏的由來，不過，**365.25** 與 **365.24219** 仍多了 **0.00781** 天，即在 **127** 年又會多一天 **(**$0.00781\times 127=0.99187\approx 1$**)**，因此，可以採用更精確的算法。例如

1582 年羅馬教皇格列高利十三世 **(Pope Grerorius XIII)** 制定了格里曆 **(Gregorian calendar)**，其中就調整了閏年的頻率，將能被 **4** 整除的年份定如閏年，而能被 **100** 整除卻不能被 **400** 整除的年份，則不視為閏年。於是變為

$$365+\frac{1}{4}-\frac{3}{400}=365.24250$$

這樣與實際的天數就相差不遠了。[2]

至於第三話名為「天文數字也不怕」，作者別出心裁的使用「費米推定」來作為開場白。何謂費米推定呢？**1945** 年 **7** 月美國在舉行世界上第一次的原子彈試爆，而物理學家恩里科・費米 **(Enrico Fermi)** 在爆炸後 **40** 秒，看著爆炸中心地點，再將兩手高舉過頭並將手上的紙放開，讓暴風將紙在空中分行約兩公尺半後落地，費米看了一下，思考一番便對參與核爆的其他人員說：「原子彈爆炸相當於大約兩萬噸 **TNT** 火藥爆炸的威力。」參與核爆計畫的科學家們花了三周的時間，進行許多精密的計算後，得到的答案跟費米相差不遠。像這樣利用邏輯，反覆思考後的估算，就稱為費米推定。[3]像這樣由於常常估算時會估出一個大的數字，或是常常自運算時碰見大數字時，我們就利用指數去表示，而要做大數字乘法時，就可以利用對數去處理。

第四話主題為「不可思議的質數」。作者以佛蘭克・納爾遜・柯爾 **(Frank Nelson Cole)** 於 **1903** 年 **10** 月 **31** 日在一場名為「天文數字的因數分解」中，在黑板上寫下底下的式子：

$$2^{67}-1=147573952589676412927$$

之後又繼續書寫

$$193707721\times 761838257287=147573952589676412927$$

為開場白，介紹了形如 $2^{n}-1$ 的質數為梅森質數 **(Mersenne number)**，並陸陸續續介紹判斷質數的方法，例如最早的「埃拉托斯特尼 **(Eratosthenes)** 篩法」，即將書字寫下一個個將較小的質數倍數篩去，再到帕斯卡三角形判定質數，之後又介紹了費馬小定理與歐拉定理，一直到現今最重要的密碼學「公開金鑰密碼」。這是一章相當有趣的數論研究。

第五話正如它的標題「無限世界與不完備定理」一樣，一開始就毫不含混的介紹希爾伯特旅館，即某旅館宣稱「有非常多房間，一年之中無論何時，都有空房間等候您的光臨。」而客房服務員某次對著經理說：現在已經客滿了，但是外面來了一台觀光遊覽車，上面寫著「自然數旅遊」。這樣該如何安排住宿呢。經理不慌不忙的指定之前的 **1** 號客人往 **2** 號房，**2** 號客人往 **4** 號房，**3** 號客人往 **6** 號房，依此類推。就可以剩下 **1** 號房，**3** 號房，**5** 號房，…… 給新客人住了。接著又繼續處理好幾輛自然數旅遊的觀光客。直到碰到了「實數旅遊」就出了麻煩。作者風趣地將這個旅館問題描寫後，還介紹了無窮

[2] 對曆算有興趣的讀者，可以參考片山真人所著的《用科學方式輕鬆懂曆法》。亦可參看冲方丁的小說《天地明察》。

[3] 對費米推定有興趣的讀者，可以參考吉田雅裕與脇田俊輔的《費米推定筆記》。

等比的極限概念與哥德爾不完備定理。

第六話則回到測量即幾何學，標題是「測量宇宙的樣貌」，在這一話中，作者倒是提到 **geometry** 是從古希臘文 **Υεωμετρία (geometria)** 而來，**Υεω (geo)** 指土地，**μετρία (metria)** 指測量的意思。意思就是要測量土地，由於埃及這個地方，尼羅河每年都會氾濫，淹沒河川兩邊的土地，水退去之後就必須重新測量農地面積，也因此埃及人對於圖形面積的計算方法與角度關係有非常深入的研究。之後，就提到「幾何原本」與笛卡爾的解析幾何，並延伸到六維，九維，n 維空間，最後非歐幾何與高斯曲率的問題。[4]

第七話介紹的是微積分，標題卻是「微積分從積分開始」。為何我要說「卻」呢？原因在於台灣高中數學的教科書都是從微分開始的。作者為何要說從積分開始呢？原來因為積分跟面積與體積有關，而這是與眼睛可以直接看到的可以計算的量，但是，微分卻必須要能確實理解無限小或極限的概念。例如，利用微分來定義運動中的物體，而也因為古希臘人還未確定極限的概念，所以，才會產生「飛行中的箭是靜止的」這種芝諾 **(Zeno)** 悖論，換言之微分對於數學而言，是相對高端的概念喔。這樣的書寫順序與 **Tom M. Apostol** 的初等微積分有異曲同工之妙呢！[5]之後，作者即開始介紹面積的計算方式與極限的使用，再來即引出微積分基本定理。

第八話名為真實存在的「幻想的數」，就是要介紹虛數 i。不過作者倒是先提到小朋友在小時候常常會有「幻想的朋友」，一直到七歲左右才會消失。[6]這樣的介紹非常符合作者寫本書的目的—寫給自己念中學的女兒。就像幻想的朋友對小朋友的心理成長有所幫助，同樣的幻想的數對數學的發展也很重要。不過不免俗的介紹虛數 i，一定要介紹歐拉方程式

$$e^{i\pi}+1=0$$

其中 e 是納皮爾數，而 π 圓周率，在這個方程式中有加法單位元 **0** (無論加上任何數都還是本身)，與乘法單位元 **1** (無論乘任何數也還是本身)，及虛數 i，及兩個無所不在的常數亦是超越數 (不是任何一個有理係數代數方程的根) 所構成的美麗方程式。[7]不過，作者在本章最精彩的，莫過於將三角函數與指數函數做連結的歐拉公式推導。我將其陳列如下，供讀者欣賞。

首先，利用棣美弗 **(Abraham de Moivre)** 公式

---

[4] 對測量有興趣的讀者可以參考保羅·拉克哈特所著的《這才是數學》。

[5] 在台灣的數學系學生應該對 Tom M. Apostol 教授不陌生，其著作 *Mathematical Analysis* 是高等微積分的經典之作。

[6] 關於幻想朋友可以欣賞 2015 年皮克斯(PIXAR)的動畫《腦筋急轉彎》(*Inside Out*)，裡面有一隻粉紅色棉花糖構成身體、大象鼻子、貓尾巴、還會發出海豚叫聲的生物乒乓(Bing Bong)，就是女主人翁的幻想朋友。

[7] 關於超越數，是指不是任何一個有理係數代數方程的根，即不是代數數。而何謂代數數，即是指可以用有限運算解出來的多項式方程根，係數可為分數。另外在小川洋子的小說《博士熱愛的算式》對於歐拉方程式有優美的譬喻，值得讀者欣賞。

$$\left(\cos\frac{\theta}{n}+i\sin\frac{\theta}{n}\right)^{n}=\cos\theta+i\sin\theta$$

特別地，若 ***n*** 趨近無限大時，會發生

$$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{\theta}{n}=1 \quad 與 \quad \lim_{n\to\infty}\sin\frac{\theta}{n}=\frac{\theta}{n}$$

換言之，

$$\cos\theta+i\sin\theta=\lim_{n\to\infty}\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{\theta}{n}+i\sin\frac{\theta}{n}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+i\frac{\theta}{n}\right)^{n}$$

又因為，

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e\text{ 可以得到 }e^{x}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{x}\text{，即 }\lim_{n\to\infty}\left(1+i\frac{\theta}{n}\right)^{n}=e^{i\theta}$$

合起來就是，

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta \quad \text{(將}\theta=\pi\text{ 代入就是歐拉方程式了！)}$$

最後一話（亦即第九話）名為「測量難度與美」，要說的是 ***n*** 次方程式的公式解。自從 **1545** 年卡當諾 **(Girolamo Cardano)** 與其學生費拉里 **(Lodovico Ferrari)** 將三次方程及四次方程的公式解，發表於其著作《大術》**(*Ars Magna*)** 中，[8]之後的數學家莫不想要尋找是否有更高次方程式的公式解。但直到 **1826** 年挪威數學家阿貝爾 **(Niels Henrik Abel)** 發表了一篇名為《一般一元五次方程式無公式解的代數方程證明》的論文，數學家們才知道五次方程式是沒有公式解的，而之後 **1846** 年由法國數學家劉維爾 **(Joseph Liouville)** 替英年早逝的伽羅瓦 **(Évariste Galois)** 發表其曠世論文，更進一步的說明「***n*** 次多項式可以有根式解的充要條件」，也才確認五次以上的方程式都沒有公式解。[9]至此我們可以解釋作者所謂的測量難度，指的就是測量方程式的「難度」。至於「美」則與伽羅瓦發明的抽象代數概念「群」，與其「伽羅瓦理論」有關，[10]因為要了解方程的根時，需要利用到對稱性的想法，[11]在本章最後面，作者特別利用二次方程式與三次方程式來解說這個對稱的模式，深入淺出容易理解。

---

[8] 三次方程式的發明歷史上有一段有趣的數學對決歷史，可參考哈爾・赫爾曼所著的《數學恩仇錄》或是傅鍾鵬所著的《三次方程風雲記》。

[9] 關於方程式或伽羅瓦的歷史可參考馬里歐・李維歐所著的《無解方程式》。

[10] 讀者若要初步了解伽羅瓦理論，可參閱日本數普大師結成浩所著的《數學女孩：伽羅瓦理論》。

[11] 關於對稱可以欣賞伊恩・史都華 (Ian Stewart) 教授的 *Why Beauty Is Truth: A History of Symmetry*，本書有簡體書《對稱的歷史》。

三、結語

本書是由本科為物理的教授寫給高中生的數學普及書籍，因此，讓我們得以用不同的角度審視數學的進路，了解物理學家對於數學的看法，與他們對於覺得數學重要的部分在哪裡。而且，作者提供了不同於數學家的思路，對於習慣看數學教授寫的數普書的讀者，又多了一份對於數學的了解。回到本書一開始的安排，作者率先使用機率的舖陳，不知道是不是在物理上往往在推估的東西跟機率有關，或是作者認為機率乃是最重要的數學分支。不過，這或許也呼應了亞瑟·班傑明 (**Arthur Benjamin**) 教授於 **2009** 年在 **Ted** 的演說《亞瑟·班傑明的改變數學教育方案》。[12]班傑明教授提及，對於一般人而言，我們學習數學的金字塔頂點不應該是微積分，反而應該是機率與統計，特別是處理數據的統計，畢竟討論風險，討論可能性，才是普羅大眾日常生活最常使用到的數學呢！而最後一話，作者特別提到「美」，是不是要跟他的女兒說 (包含讀者) 數學是真正的美呢！此外，作者在本書的文字脈絡裡，提及了很多數學典故與其他數普書籍供有興趣的讀者擴充閱讀文本。相信不論您是否喜愛數學，一定能在閱讀本書後能更加了解數學的語言。

參考資料

Apostol, T. M. (1991), ***Calculus- Vol.1*****, 2nd edition. New Jersey: Wiley.**

Apostol, T. M. (1974), ***Mathematical Analysis*****, 2nd edition. New Jersey: Pearson PLC.**

Stewart, I. (2008), ***Why Beauty Is Truth: A History of Symmetry*****. New York: Basic Books.**

班傑明(**Benjamin, Arthur**) (**2017**)，王君儒譯，《數學大觀念》，台北：貓頭鷹出版社。

克勞森(**Clawson, Calvin C.**)(**2004**)，陳可崗譯，《數學妖法》，台北：天下文化。

赫爾曼(**Hellman, Hal**)(**2016**)，范偉譯，《數學恩仇錄：數學史上的十大爭端》二版，台北：五南出版社。

拉克哈特(**Lockhart, Paul**)(**2015**)，畢馨云譯，《這才是數學：從不知道到想知道的探索之旅》，台北：經濟新潮社。

李維歐(**Livio, Mario**)(**2008**)，蔡承志譯，《無解方程式：數學天才與對稱性之謎的鬥智之旅》，台北：臉譜文化。

斯圖爾特(**Stewart, lan**）(**2011**)，王天龍譯，《對稱的歷史》，上海：上海人民出版社。

冲方丁(**2013**)，徐旻鈺譯，《天地明察》，台北：新經典文化。

片山真人(**2014**)，蘇暐婷譯，《用科學方式輕鬆懂曆法》，台北：臺灣東販。

吉田雅裕、協田俊輔合著(**2017**)，張乾譯，《費米推定筆記》，台北：九韵文化。

小川洋子(**2011**)，王蘊潔譯，《博士熱愛的算式》，台北：麥田出版社。

結成浩(**2014**)，陳冠貴譯，《數學女孩：伽羅瓦理論》，台北：世茂出版社。

傅鍾鵬(**2006**)，《三次方程風雲記》，新竹：凡異出版社。

維基百科：腦筋急轉彎 (***Inside Out***) **https://goo.gl/jYWDaC**。

維基百科：超越數 **transcendental number** **https://goo.gl/yeHmCb**

---

[12] 《亞瑟·班傑明的改變數學教育方案》演說網址如下：https://goo.gl/DCsJUa。