

# HPM 通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系退休教授）  
 主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）  
 助理編輯：黃俊璋（和平高中）  
 編輯小組：蘇意雯（台北市立大學）蘇俊鴻（北一女中）  
 葉吉海（桃園陽明高中）陳彥宏（成功高中）  
 英家銘（台北教育大學）  
 創刊日：1998年10月5日  
 網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horng>  
 聯絡信箱：[suhy1022@gmail.com](mailto:suhy1022@gmail.com)

## 第二十一卷 第五期合刊目錄(2018年5月)

- ▣ 數學閱讀策略教學初探  
..... 陳玉芬
- ▣ 勾股旁要法  
..... 王裕仁
- ▣ 數學閱讀專欄：《數學偵探物語》讀書心得 ..... 劉立祥

## 數學閱讀策略教學初探

陳玉芬

新北市明德高中

「閱讀投入」(reading engagement) 是影響閱讀表現和閱讀能力的重要因素。閱讀投入度愈高，閱讀成就及在校成績愈高 (Wigfield et al., 2008; OECD, 2010a)。此外，Guthrie & Wigfield (2000) 也對「閱讀投入」給了以下定義，即指聚焦於學生對閱讀活動的參與程度，而這樣的參與活動自然也涵蓋了與文本之間學習上的互動。因此，本文的主要目的，即在於嘗試透過一些閱讀的基本策略，呈現不同形式的數學文本，讓學生以不同的方式，理解數學多元的面向，以提高他們對閱讀活動的參與程度，進而提升學生對數學學習的成效。

根據 Mayer (1987, 引自張建妤&柯華葳, 2012) 的主張，數學解題歷程至少包括四個主要成份：問題轉譯、問題整合、解題與監控計劃，以及解題執行。問題轉譯是指在解數學問題的第一步，要將每一個句子轉譯為內在表徵，簡單來說，就是了解句子的意義，知道題目在問什麼，因此，需要有語言知識與事實知識的基礎。問題整合則是將問題中的每個陳述句整合成出問題的類型，所以，需要具備基模知識。解題計畫與監控是要想出並監控解題策略，這部分需要運用策略知識。最後是解題執行，就是應用算術法則得到答案。簡單地說，問題轉譯和問題整合就是要理解題目意義，所以，建立問題表徵的歷程，就像一個閱讀理解的歷程 (張建妤&柯華葳, 2012)。

針對於本文給定文本的設計，我們也試著以這樣的觀點出發，做為我們閱讀文本設計的基本策略，讓學生可以透過每一個主題式的單元閱讀，引導他們經歷其閱讀的歷程，以強化學生對於解題思維的訓練與解決數學問題的能力。另外，張建妤&柯華葳 (2012) 的研究指出，PIRLS 閱讀理解測驗主要檢驗兩種閱讀理解歷程，包括「直接理解歷程」和「解釋理解歷程」，其中「直接理解歷程」又可分為「直接提取」和「直接推論」，前者是指

讀者能明確找出文中有寫出的訊息，後者是指讀者需要連結文中兩項以上訊息。「解釋理解歷程」又分為「詮釋、整合觀點和訊息」（簡稱「詮釋」）和「檢驗、評估內容、語言和文章的元素」（簡稱「評價」），而前者指讀者須提取自己的知識以便連結文中未明顯表達的訊息；而後者則是指讀者需批判性考量文章中的訊息（柯華葳等人，2008）。而這四種閱讀理解中的每一種，都涵蓋不同的認知理解活動。（柯華葳等人，2008）所以，在閱讀文本中的每一篇文末，我們也將依此論述，設計與該文本相關的閱讀理解測驗，以檢視學生的閱讀或數學解題成效。

為了讓學生能積極參與，以及強化學習動機，我們設計了十篇數學閱讀短文，如下頁圖一與圖二所示。（圖片下方方格內各為四篇短文名稱，另外 2 篇尚未編輯成冊）。此外，每篇文本頁末均附有相關概念的閱讀理解測驗題目（完整的文本內容，可參閱新北市立明德高中國中部數學科網站）。<sup>1</sup>

而在本文中所提及的文本設計，主要對象是中一的學生，施行的時間，則是在固定的週二晨間閱讀時間，其學習的主題皆配合該學期學習之內容，知識內容亦奠基於既有的先備知識之上。由於此活動持續進行中，故尚未有具體的統計分析，但從部份學生的回饋中，我們似乎看到了某種改變數學學習方式之另類取徑。現在，本文將分為二個部份來討論，第一部份是「文本閱讀策略」，我們將文本的閱讀策略分成四個面向，依序為：正確理解詞彙和符號、掌握數學的程序性知識、融入數學的文化脈絡，以及培養學生的後設認知能力。第二部份則是「問題討論」，即每一篇文本後的問題討論（學生回饋），亦分為四個面向，依序為：「直接提取」、「直接推論」、「詮釋」以及「評價」。今分述如下文第一、二節。

## 一、文本閱讀策略



圖一



圖二

### (一) 正確理解詞彙和符號

我們知道數學語言常是非常簡潔，而且數學概念或是一些數學名詞又常是隱晦含

<sup>1</sup> 明德數食園 <https://sites.google.com/a/mdhs.ntpc.edu.tw/math/reading>

蓄（王海俠，2006），所以，在閱讀上，數學詞彙符號的精確理解是有必要的，因為那是數學解題的第一步。以本文中的「美麗的幾何鑲嵌」一文為例，我們就會以相關的圖文輔助說明，甚至讓學生尋找規則鑲嵌的模式（**pattern**），使學生能具體感知並強化理解概念。

鑲嵌的歷史從人類文明時期即已開始。因為當人們在建築他們的房子或做工事防禦時，已經知道在空隙中隨機地填滿碎石（如圖三）。漸漸地，使用次數愈來愈頻繁之後，人們就開始發揮創意，運用多彩的石頭並大量且有規則地鑲嵌了，而到了中世紀，哥德式的窗格鑲嵌就開始出現了（如圖四）。



圖三



圖四

那麼鑲嵌在數學上它的定義是什麼呢？那就是可以利用多種的幾何圖形將平面拼貼的完全密合，不會重疊，而且沒有空隙。而第一個對鑲嵌在數學中做深入研究的，可說是克



## （二）掌握數學的程序性知識

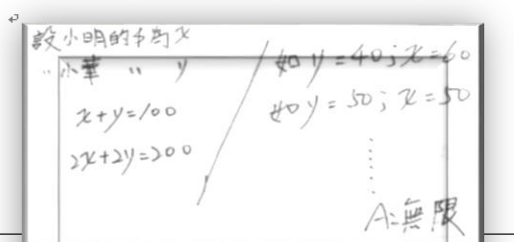
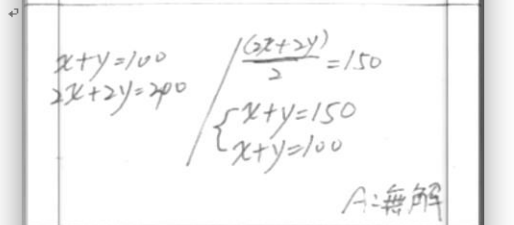
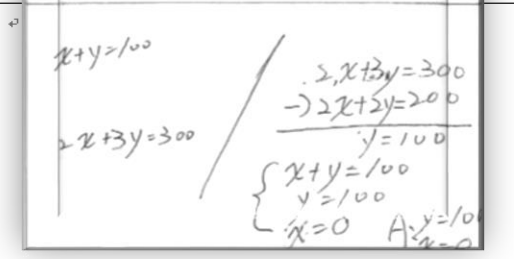
秦麗花與邱上真（2004）也指出數學閱讀有特定的學科閱讀技能，包含數學先備知識、數學圖示理解、以及數學作圖程序理解，所以，在供給學生閱讀文章中，我們會有學生先備知識概念的鋪陳，讓學生不會覺得增加思考的負擔，以增加他們閱讀的耐性。

### 閏年的故事

同學們對於閏年這名詞絕對不陌生，因為每遇年份中含有 4 的倍數，那一年的二月就會有 29 天，而那一年就叫做閏年。比方說：2016 年的二月就有 29 天，因為 2016 是 4 的倍數。但嚴格說起來，閏年的計算方式是該年份必須是 4 的倍數，且不是 100 的倍數，但是如果同時又是 400 的倍數，那麼它也是閏年。所以 2016 年是閏年，因為是 4 的倍數而且不是 100 的倍數，1900 年不是閏年，因為它是 4 的倍數而且是 100 的倍數，但是 2000 是閏年，因為它是 400 的倍數。

為何要如此計算呢？那是因為地球繞太陽一圈大約 365.2422 天，也叫做回歸年。而我們使用的曆法卻是 365 天，顯然這樣的誤差太大，因為每 4 年誤差就近一天了，因此，在 1 世紀中期，古羅馬的凱撒大帝（Julius Caesar）使用了以他為名的曆法，每四年閏一次，所以它的一年平均是 365.25 天（ $\frac{365 \times 3 + 366}{4} = 365.25$ ），即所謂的儒略曆。這乍看之下和回歸年差不多，但經過 1500 年之後，這誤差已達 11 天了

比如，在二元一次聯立方程式的單元中，我們就以循序漸進方式，引導學生掌握有關二元一次聯立方程式對解的類型概念之理解。

問題與討論	
1. 請根據下面的題意列出二元一次方程式，並以你的觀點說明它的合理性。	
<p><b>開學第一天</b></p> <p>小妍想知道小明與小華身上有多少元？小明說他的錢和小華的錢加起來共有 100 元，小妍說，這樣她還是不知道他們各自多少元？小華又說：我的 2 倍和小明的 2 倍加起來剛好是 200 元。依據所給的條件你覺得小妍知道小明和小華各自身上有多少錢了嗎？</p>	
<p><b>開學第二天</b></p> <p>小妍又想知道小明與小華身上有多少元？小明說他的錢和小華的錢加起來共有 100 元，小妍說，這樣她還是不知道他們各自多少元？小華又說：我的 2 倍和小明的 2 倍加起來剛好是 300 元。依據所給的條件你覺得小妍知道小明和小華各自身上有多少錢了嗎？</p>	
<p><b>開學第三天</b></p> <p>小妍已經不想知道小明與小華身上有多少元了，但是小明主動說他的錢和小華的錢加起來共有 100 元，小妍說，這樣她還是不知道他們各自多少元呀，小華又說：我的 2 倍和小明的 3 倍加起來剛好是 300 元。依據所給的條件你覺得小妍知道小明和小華各自身上有多少錢了嗎？</p>	

### (三) 融入數學的文化脈絡

探究文化中的數學，就是理解數學知識宏觀發展的歷程（劉柏宏，2016），而對於數學的學習，若去其脈絡化，知識就顯得瑣碎、冰冷而不知其所以然了，所以，如果學生的數學學習，能透過閱讀將其完整知識呈現，也是另一種有效學習。以下圖中部份截圖內容為例，大部份的學習者都知道閏年的計算方法，但卻不知如何以如此計算，如果教師能透過閱讀鋪陳，將更豐潤學習者對數學知識的文化脈絡完整認識。

的儒略曆。這乍看之下和回歸年差不多，但經過 1500 年之後，這誤差已達 11 天了（ $(365.25 - 365.2422) \times 1500 = 11.7$ ），雖說對於人們生活可能還沒有太大的影響，但是對於宗教節慶就有不可輕忽的改變了，因為復活節的時間，是從春分的時間推算而來的，這對教廷來說是件大事。於是，在 1582 年，教皇格里高利十三世宣布改曆。他要讓曆法的年逼近回歸年，原來只要是 4 的倍數就要置閏，但這樣閏太多了，於是改成 100 的倍數但不是 400 的倍數，就不是閏年了。也就是說，西元 1700、1800、1900 年都不再是閏年，但 2000 年仍然是閏年。以上的作法，將「4 年 1 閏」變為「400 年 97 閏」。現在我們簡單計算一下：

以 400 年為一單位，那就表示第 100、200、300 年時不置閏，但第 400 年置閏，所以 400 年中，有  $24 \times 3 + 25 = 97$  個閏年， $400 - 97 = 303$  個平年，

故每年平均為  $(303 \times 365 + 97 \times 366) \div 400 = 365.2425$  天。

很顯然，這與回歸年的誤差已縮減到每年 0.0003 天，這樣縱使到西元 3000 年左右也才會有近一天的誤差，而這套曆法就一直沿用成為現代的「公曆」了，也就是所謂的格里高利曆。

#### (四) 培養學生的後設認知能力

所謂後設認知能力，即以自己的認知活動為對象的認識，如自我質疑，自我辯證等（王海峽，2006）。學生在閱讀一篇文章時，教師提供了學生調整思路或對數學表徵的自我詮釋意義，這樣的自我對話，自能提高解題思維的能力。以下圖為例，學生可以透過科學知識或生活經驗，作為問題解決的背景訊息，或是詮釋他自己的答案。

前陣子最夯的議題，莫過於「太陽花學運」，也就是台灣大學生針對「二岸服貿協議」<sup>1</sup>通過的程序產生一些質疑所發起的抗議活動，當然我們無心捲入政治的漩渦，但針對電視上斗大的標題（如左下圖）寫著反服貿人數達 50 萬人，訊息合理嗎？因為警方聲稱當天僅 11 萬抗議群眾遊行，但反服貿者卻打著 50 萬支持群眾的旗號，其實各自的立場不同，自然解讀出不同的數據，就像右下圖的漫畫一般，但也許這時候，數學可以提供一個客觀的數據。

對於估算遊行人數，在統計上確實有一定的根據，例如『區域面積法』<sup>2</sup>，它比較適合面積有限的定點式集會，估算方式為：道路面積以每平方公尺 2 至 3 人的密度來計算，即可得出遊行的大約人數。

以「太陽花學運」為例，警方估算方式為一平方公尺內有 3 人。各區域大約面積如下：<sup>3</sup>

(1) 中山南路(景福門-青島東路)： $40 \times 570 = 22,800$  平方公尺。

也就是說，對於數學的閱讀理解，我們是將它定位在既是一種策略性的「教數學」，更是一種積極性的「學數學」。我們試圖讓學生在閱讀時進行思維的互動，其終極目的除了提升閱讀力，更重要的是提升數學力。

## 二、問題討論（學生回饋）

文本中的問題討論設計，將參考柯華葳等人（2008）依據 PIRLS 閱讀理解測驗所整理的四種閱讀理解，並根據每一種閱讀理解都涵蓋不同的認知理解活動概念下設計，並以此檢驗學生的學習成效。

### (一) 「直接提取」

指讀者能明確找出文中有寫出的訊息，以此篇文本為例，學生在閱讀完文中幾何鑲嵌之意義之後，理應了解鑲嵌結構模式並予以作答。

如果一個平面可以由二個或二個以上的正多邊形組成的單位圖形，再不斷自我重覆所形成的一個模式，那麼它就稱為半規則鑲嵌，如下圖六。因為頂點四周依序是由正三角形、正方形、正六邊形及正三角形圍成，所以稱為 **(3,4,6,4)** 鑲嵌圖形。

( 3,3,3,3,3,3 )                      ( 3,4,6,4 )                      (        )                      (        )

圖五                                      圖六                                      圖七                                      圖八

問題 3：請依據上面所述，並模仿圖五及圖六的鑲嵌命名方式，觀察上圖七及圖八中的頂點四周是由哪些正多邊形拼接而成，然後寫出它的數字命名並將數字由小到大依序填入 ( ) 內。

圖七：(                                      ) 鑲嵌圖形      圖八：(                                      ) 鑲嵌圖形

(二) 「直接推論」

在此，讀者需要連結文中兩項以上訊息，以下圖為例，學生除了須理解圓周長的計算，還要理解所增加的空隙長度的代數計算為一定值。

除了上述的討論之外，還有一個有趣的問題，它存在於我們的生活中，但我們始終未曾察覺。

我們都知道，我們生活的地球，它的圓周長大約 40000 公里，假設有一條鋼環，緊緊環繞著地球的赤道（如右圖 a 所示），現在，若將鋼環移走，並從鋼環某處切開來，再接合一段 10 公尺長的鋼條，再把它重新放回赤道上（假設我們做得到），那麼理論上，鋼環與地球表面應該會鬆一點了。請問：這條鋼環和地球之間的空隙有多大？同學們的答案會是薄如紙片嗎？似乎合理，畢竟我們想像中的地球太大了，這渺小的 10 公尺怎會使空隙改變呢？現在是用數學解釋的時候了。

(a)

我們假設地球圓周長  $D=40000$ ，得半徑  $=\frac{D}{2\pi}$ ，此外，

令增加的長度  $L=10$  公尺，那麼增加的空隙  $G=\frac{D+L}{2\pi} - \frac{D}{2\pi} = \frac{L}{2\pi}$

問題 3：請舉例說明或用數學式子證明為何地球周長的大小與增加的空隙完全無關？

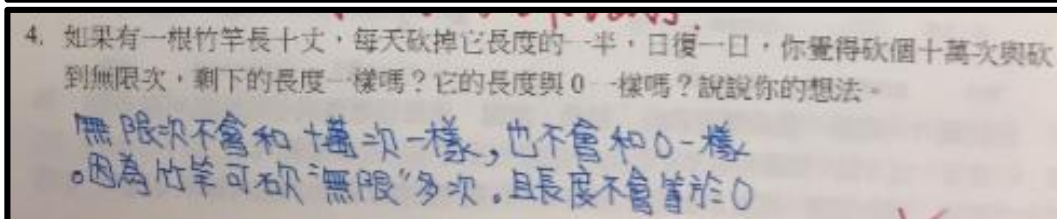
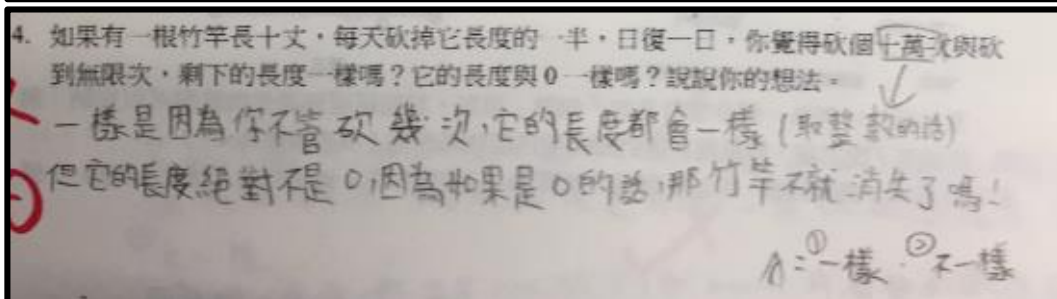
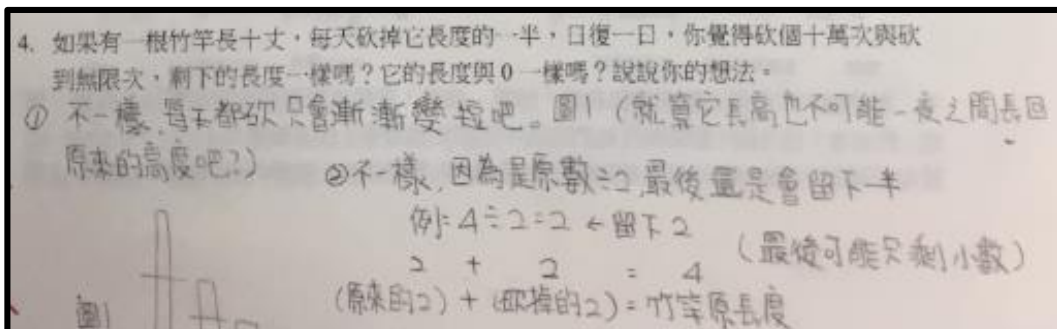
(三) 「詮釋」

讀者須提取自己的知識以便連結 文中未明顯表達的訊息，這樣的問題設計也在於檢驗學習者的後設認知能力。在前文所提的「閏年的故事」中，學生必須連結自己已有的知識或整合相關訊息，然後對西方國家改曆的年代提出合理的解釋。

問題 4：因為改曆的關係，在歐洲的文學界有一個趣聞巧合，根據資料發現，西班牙文學作家賽凡提斯(Miguel de Cervantes Saavedra, 1547-1616)，與英國大文豪莎士比亞(William Shakespeare 1564~ 1616)皆逝於 1616 年 4 月 23 日，但對莎翁迷而言，堅持認為當賽凡提斯過世時，莎翁還活著，你可以為莎翁迷找出一個合理的解釋嗎？

#### (四) 「評價」

在這個問題設計中，可檢測學習者的批判思考能力或是否能以相關資訊做整合觀點的評論。以「無限」一篇閱讀文章為例，我們看到學生多元表達與簡單的論述，值得在此與讀者分享，如下圖。



#### 三、結語

總結來說，本文僅試著將數學閱讀的目的，做為另一種數學教與學的輔助功能，而在閱讀歷程中，預期學生能夠：

- (1) 有效連結先備知識形成預測
- (2) 連結不同單元間的不同數學結構
- (3) 能透過閱讀的策略設計，讓學習能更加完整
- (4) 透過文字閱讀，能更精準理解數學詞彙意義，進而正確表徵數學概念

針對這些能力的培養，本文謹提供文本的構念設計，至於確實的成效，有待進一步的實徵

研究。

### 參考文獻

- Guthrie, J. T., & Wigfield, A. (2000), "Engagement and motivation in reading" in M. L. Kamil & P. B. Mosenthal (Eds.), *Handbook of reading research* (Vol. III, pp. 403–422). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- John T. Guthrie, Allan Wigfield, & Wei You. (2012), *Instructional Contexts for Engagement and Achievement in Reading*
- Joan M. Kenney (2005), *Literacy Strategies for Improving Mathematics Instruction*. Association for Supervision and Curriculum Development.
- Wigfield, A., Guthrie, J. T., Perencevich, K. C., Taboada, A., Klauda, S. L., McRae, A., et al. (2008), "The role of reading engagement in mediating effects of reading comprehension instruction on reading outcomes." *Psychology in the Schools*, 45, 432–445.
- 王海俠 (2006), 〈提高數學閱讀理解能力基本策略〉, *Educational Practice and Research*, pp. 52-53 (2006.03)
- 洪萬生等 (2009), 《當數學遇見文化》, 台北: 三民書局。
- 劉柏宏 (2016), 〈從數學與文化的關係探討數學文化素養之內涵—理論與案例分析〉, 《台灣數學教育期刊》3(1): 55-83。
- 張建妤、柯華葳 (2012), 〈數學成就表現與閱讀理解的關係: 以 TIMSS 2003 數學試題與 PIRLS 2006 閱讀成就測驗為工具〉, 《教育心理學報》44 卷 1 期: 95-116。
- 秦麗花、邱上真 (2004), 〈數學文本閱讀理解相關因素探討及其模式建立之研究~以角度單元為例〉, 《國立臺南大學特殊教育學系特殊教育與復健學報》12: 99 - 121。
- 蘇慧珍、楊凱琳、陳佳陽 (2017), 〈閱讀策略教學 — 對高二學生數學學習表現的影響〉, 《教育科學研究期刊》62(1): 33-58。



# 勾股旁要法

王裕仁

台北市木柵高工

## 一、前言

中國古代數學經典代表《九章算術》，是歷代數學家都會想拜讀的作品，當中又有許多人為書加上註解，其中又以劉徽註、李淳風注最為後人所知，除了註解之外，尚有數學家直接以九章為架構，重新著作，例如：楊輝《詳解九章算法》、李潢《九章算術細草圖說》等，無論是註腳或是重新著作，多少都會加入自己的解讀或是增設自己的創意在其中。

本文將以楊輝《詳解九章算法》為主，介紹楊輝在閱讀完九章後，在書中增設的方法——勾股旁要法，來處理需要用到相似三角形的測量問題。如此一來，中學生學習相似三角形的性質而尚未理解、熟練時，或許可以將此方法當作一個過渡時期的工具來使用。

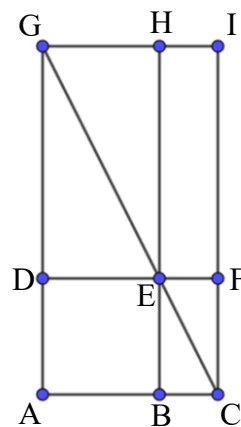
## 二、勾股旁要法

勾股旁要法內容是在探討面積關係，但在《詳解九章算法》中，楊輝卻將這個性質用來處理三角測量的問題，書中原文如下：

勾股旁要法曰：直田斜解，勾股二段，其一容直，其一容方，二積相等，餘勾餘股相乘，亦得容積之術。勾股相乘為實，并勾股為法，除之，得勾中容方，積內有一容直，故用勾除橫積併股除直積得所容方也。以容直或方外餘勾股相乘，得容積之實，勾股中：直積一段、大勾股一段、小勾股一段，如餘勾而一得股長，如餘股而一得勾闊。<sup>2</sup>

為方便讀者理解，在此將原文以圖一表示，再將原文分成三個部分一一說明。第一部分：「直田斜解，勾股二段，其一容直，其一容方，二積相等，餘勾餘股相乘，亦得容積之術。」此處的直田為矩形  $ACIG$ 、勾為  $\overline{AC}$ 、股為  $\overline{AG}$ 、容直為矩形  $EFIH$ 、容方為正方形  $ABED$ ，餘勾為  $\overline{BC}$ 、餘股為  $\overline{DG}$ 、容積為正方形  $ABED$  的面積，第一部分要表達「勾股旁要法」的主要內容為

$$\text{矩形 } EFIH \text{ 面積} = \text{正方形 } ABED \text{ 的面積} = \overline{BC} \times \overline{DG}。$$



圖一

<sup>2</sup> 引自《詳解九章算法》，收入郭書春主編 (1993)，頁 980-981。

第二部分：「勾股相乘為實，并勾股為法，除之，得勾中容方，<sup>3</sup>積內有一容直，故用勾除橫積併股除直積得所容方也。」文中粗黑體部分是在說明直角三角形  $ACG$  中的正方形  $ABED$  邊長公式： $\overline{AB} = \frac{\overline{AC} \times \overline{AG}}{\overline{AC} + \overline{AG}}$ 。而細體字則是證明：橫積為矩形  $ACFD$ 、直積為矩形  $ABHG$ ，利用矩形面積公式可以得到

$$\frac{\text{矩形}ACFD}{\overline{AC}} = \frac{\text{矩形}ABHG}{\overline{AG}} = \overline{AB}。$$

第三部分：「以容直或方外餘勾股相乘，得容積之實，勾股中：直積一段、大勾股一段、小勾股一段，如餘勾而一得股長，如餘股而一得勾闊。」粗體字與第一部分的細體字內容一樣，要表達「 $\overline{BC} \times \overline{DG} = \text{正方形} ABED$  的面積」，而細體字的部分是將直角三角形進行切割，可以得到

直角三角形  $ACG$  的面積 = 直積 + 大直角三角形的面積 + 小直角三角形的面積

而直積可以是「矩形  $EFIH$ 」或是「正方形  $ABED$ 」；大直角三角形可以是「三角形  $DEG$ 」或是「三角形  $HEG$ 」；小直角三角形可以是「三角形  $BCE$ 」或是「三角形  $FCE$ 」。最後一句「如餘勾而一得股長，如餘股而一得勾闊」省略掉主詞，語意不明，但利用面積來看，這句話所要表達的意思是

$$\frac{\text{矩形}BCIH}{\overline{BC}} = \overline{AG}、\frac{\text{矩形}DFIG}{\overline{DG}} = \overline{AC}。$$

### 三、「率」的概念

《九章算術》的原始處理方式是採用「率」的概念，<sup>4</sup>與現今「相似三角形對應邊長成比例」一樣，不過可惜的是，中國古代沒有「角（度）」的概念，所以，只知道利用縮放的「率」來處理問題，舉《九章算術》中第一次出現「率」的第 13 問為例，來看一下書中是如何用「率」來處理問題，題目如下：

今有二人同所立。甲行率七，乙行率三。乙東行，甲南行十步而邪東北與乙會。問甲、乙行各幾何？<sup>5</sup>

<sup>3</sup> 「勾中容方」是指直角三角形  $ACG$  中的正方形  $ABED$  邊長。

<sup>4</sup> 如何用「率」來處理問題？舉例來說， $\text{勾} = \text{股} \times \frac{\text{勾率}}{\text{股率}}$ ， $\text{股} = \text{勾} \times \frac{\text{股率}}{\text{勾率}}$ ， $\text{弦} = \text{勾} \times \frac{\text{弦率}}{\text{勾率}}$  等。

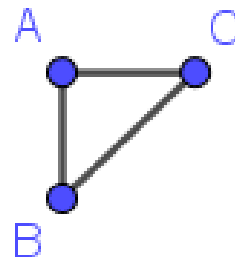
<sup>5</sup> 引自《九章算術·勾股章》，收入郭書春、劉鈍點校 (2001)，頁 189。

題意如圖二所示，可知 $(\overline{AB} + \overline{BC}) : \overline{AC} = 7 : 3$ ， $\overline{AB} = 10$ ，要計算 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BC}$ 。《九章算術》的作法是先找出直角三角形三邊長的比例，再利用「率」做調整，找出原三角形的三邊長。劉徽的註解中隱含 $\overline{AB} : \overline{AC} : \overline{BC} = a : b : c$ ， $(a + c) : b = 7 : 3$ ，又因為是直角三角

形，所以會滿足 $\frac{b^2}{c+a} = c - a = \frac{9}{7}$ ，解聯立 $\begin{cases} a+c=7 \\ c-a=\frac{9}{7} \end{cases}$  可得 $a = \frac{20}{7}$ ，

$c = \frac{29}{7}$ ，如此可以知道 $a : b : c = \frac{20}{7} : 3 : \frac{29}{7} = 20 : 21 : 29$ ，利用 $\overline{AB} = 10$ ，加

上所求得的比率，可算出 $\overline{AC} = 10.5$ ， $\overline{BC} = 14.5$ 。



圖二

除了上述方法之外，劉徽在圖形證明中還使用了另一個求「率」的方法，雖然圖形早已失傳，但從文字中可以看出，劉徽利用圖形證明

$$a(c+a) = \frac{(c+a)^2 - b^2}{2} = 20$$

$$c(c+a) = \frac{(c+a)^2 + b^2}{2} = 29$$

$$b(c+a) = 21$$

所以，可以得到

$$a : b : c = a(c+a) : b(c+a) : c(c+a) = 20 : 21 : 29$$

#### 四、《九章算術》中的勾股測量

在《九章算術》勾股章中涉及到大量的測量問題，其中用到「率」來處理的問題共有十二題，除了第 13 問、第 20 問之外，楊輝將剩下的題目統一用「勾股旁要法」來處理，題目如下：

第 14 問 今有勾五步，股一十二步。問勾中容方幾何？<sup>6</sup>

第 16 問 今有邑方二百步，各中開門，出東門一十五步有木，問出南門幾何步而見木？

第 17 問 今有邑，東西七里，南北九里，各中開門。出東門一十五里有木。問出南門幾何步而見木？

第 18 問 今有邑方步之大小，各中開門，出北門三十步有木，出西門七百五

<sup>6</sup> 引自《九章算術·勾股章》，收入郭書春、劉鈍點校(2001)，頁 189。

十步見木，問邑方幾何？

第 19 問 今有邑方不知大小，各中開門。出北門二十步有木。出南門一十四步，折而西行一千七百七十五步見木。問邑方幾何？<sup>7</sup>

第 21 問 今有木去人不知遠近。立四表，相去各一丈，令左兩表與所望參加相直。從後右表望之，入前右表三寸。問木去人幾何？

第 22 問 今有山居木西，不知其高。山去木五十三里，木高九丈五尺。人立木東三里，望木末適與山峰斜平。人目高七尺。問山高幾何？

第 23 問 今有井徑五尺，不知其深。立五尺木於井上，從木末望水岸，入徑四尺。問井深幾何？<sup>8</sup>

這些問題都與測量有關，如果利用這些方法實際進行測量，所需要用到的道具比較容易取得，可作為教學活動，或是題目設計。筆者在此以第 16 題為例做說明，讓讀者比較一下兩者在問題處理上的差異。

依照第 16 問的題意如圖三，為方便讀者理解，筆者在此以現代數學符號，來說明劉徽如何使用「率」的概念：

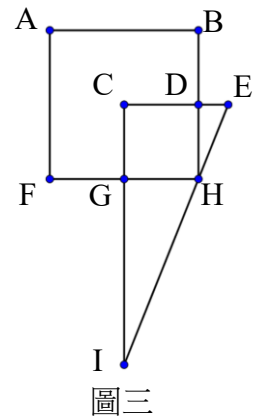
此以出東門十五步為勾率，東門南至隅一百步為股率，南門東至隅一百步為見勾步。欲以見勾求股，以為出南門數。正合半邑方自乘者，股率當乘見勾，此二者數同也。<sup>9</sup>

設出南門步數  $\overline{GI} = x$ ，則  $\overline{DE}$  為勾率， $\overline{DH}$  為股率， $\overline{GH}$  為勾，

$\overline{GI}$  為股。則  $\overline{DE} : \overline{DH} = \overline{GH} : \overline{GI} \Rightarrow 15 : 100 = 100 : x \Rightarrow 15 : 100 = 100 : x$

$\Rightarrow x = \frac{100^2}{15}$ 。如果放到今日來看，相當於是中學課程中，找出

$\triangle DEH$  與  $\triangle GHI$  的相似關係，再利用相似三角形對應邊長乘比例來處理。



緊接著來看楊輝如何運用「勾股旁要法」來處理問題，

以容積為實，如餘勾而一，得餘股。<sup>10</sup>

勾股旁要法主要在說明「容積為餘勾乘餘股」，也就是說

$$\text{正方形 } CDGH \text{ 的面積} = \overline{DE} \times \overline{GI} \Rightarrow \overline{GI} = \frac{100^2}{15}$$

<sup>7</sup> 第 17 問到第 19 問，引自《九章算術·勾股章》，收入郭書春、劉鈍點校 (2001)，頁 190-191。

<sup>8</sup> 第 21 問到第 23 問，引自《九章算術·勾股章》，收入郭書春、劉鈍點校 (2001)，頁 192-193。

<sup>9</sup> 引自《九章算術·勾股章》，收入郭書春、劉鈍點校 (2001)，頁 190。

<sup>10</sup> 引自《詳解九章算法》，收入郭書春主編 (1993)，頁 982。

在此可以看到楊輝利用面積相等的方式來處理，避開比率一類的問題。

## 五、結語

數學知識是層層堆疊的，我們藉由前人所發現結果，學習融會貫通之後向下一個目標邁進。然而，有時難免會遇到卡關問題，這必須藉由時間去消化，還有時候必須等年紀到了思想成熟了，自然會了解其中緣由。但在國民教育階段，因為上課時數有限，每一個時程都有課綱規定要學習的目標，無法讓教學者等待每一位學習者了解後，才進入下一個課程。

以楊輝的「勾股旁要法」為例，在中學的測量問題中，如果遇到無法善用相似三角形來處理問題，或許可以面積相等的原理來處理，畢竟在這之中都只用到矩形面積公式去證明，在理解上會容易一些。本文謹借用中國古代數學，分享給每一位教學者。

## 六、附錄

《九章算術》第 13 問全文：

今有二人同所立。甲行率七，乙行率三。乙東行，甲南行十步而邪東北與乙會。問甲、乙行各幾何？

答曰：乙東行一十步半，甲邪行一十四步半及之。

術曰：令七自乘，三亦自乘，并而半之，以為甲邪行率。邪行率減於七自乘，餘為南行率。以三乘七為乙東行率。此以南行為勾，東行為股，邪行為弦。勾股并七。欲之弦者，當以股自乘為冪，加并而一，所得為勾股差，加差於并，而半之為弦，以弦減差，餘為勾。如是或有分，當通而約之乃定。數以勾弦并為分母，故令勾弦并自乘為朱、黃相連之方。股自乘為青冪之矩，令其矩引之直加損同之，以勾弦并為表，差為廣。其圖大體，以兩弦為表，勾弦并為廣。引橫斷其半為弦律，七自乘者，勾股并之率，故弦減之，餘為勾率。同立處是中停也，列用率皆勾股并為表弦與勾各為之廣，故亦以股率同其表也。置南行十步，以甲邪行率乘之，副置十步，以乙東行率乘之，各自為實。實如南行率而一，各得行數。南行十步者，所有見勾求見弦、股，故以弦、股率乘，如勾率而一。<sup>11</sup>

## 參考文獻

吳文俊 (1996)，《吳文俊論數學機械化》，濟南：山東教育出版社。

蘇俊鴻 (2002)，〈中國測量術〉，《HPM 通訊》第五卷第四期。

郭書春主編 (1993)，《中國科學技術典籍通彙·數學卷一》，鄭州市：河南教育出版社。

郭書春、劉鈍點校 (2001)，《算經十書》，台北市：九章出版社。

<sup>11</sup>引自《九章算術·勾股章》，收入郭書春、劉鈍點校 (2001)，頁 189。

## 數學閱讀專欄

### 《數學偵探物語》讀書心得

劉立祥

台北市立和平高中二年級

書名：數學偵探物語  
作者：李斯·哈斯奧 (Leith Hathout)  
譯者：黃俊瑋、邱珮瑜  
出版社：五南圖書出版股份有限公司  
出版日期：2009/11/01



#### 一、內容摘要

本書由十四個獨立的故事組成，內容講述天才主角李維透過各式各樣的數學工具，協助警方在不同案件中的破解，並附上詳細的數學算式解法、邏輯推理及延伸思考，讓讀者可以在故事位結束時，先整理所有細節並試著練習一次。

#### 二、閱讀心得

我從很小便開始接觸推理小說，起初總覺得偵探們簡直是神，所有的證據像是受到這無敵電磁波的吸引，都會把案件的經過透過偵探的整理後公諸於世，但有一天，我卻偶然發現所有的細節，其實都在暗示我們這是一個重點，可以用來當成證據之類的。那時，我就非常喜歡推理，它幫我注意到那些我忽略的細節，或是忽略我注意到但不以為然的關鍵，比方說，在本書第三則故事〈大峽谷冒險之旅〉中，作者為了將推理依據「時間」給表現出來，曾多次強調當下或特別的時間。同時，推理也能訓練邏輯思考，像是在第六則故事〈督柏夫企業的竊盜案〉中老師給同學的題目。事實上，邏輯思考可以幫助日常生活中思考與對話之間的真實性，讓敘述比較有條理，不會倒因為果顯得話中的內容產生矛盾。

推理小說通常是以故事為背景，其中的謎團會隨著故事的發展迎刃而解，本書也不例外，每一個篇幅都是一則新的故事，但不同於以往我所閱讀的推理小說，便是它所有證據都來自數學及物理，透過計算或邏輯推斷嫌疑犯所提供情報的真假乃至犯罪的成立，並糾正了部分民眾常犯的理解或計算上的錯誤。比方說，第二則故事〈西瓜詐欺〉中，我也犯了與故事中的爸爸相同的錯誤，雖然水分的百分比只減少了一個百分比，但在此的水是一個變數，除了影響分子的數值之外，也會影響到分母總重量之數值，所以，看似差不多實際上卻少了一半多。

另外，每篇故事的最後為該篇故事的解答或延伸學習，其中包含代數、幾何作法還有一些數學常使用的證明方法，像是在第一則的延伸提到的數學歸納法，其中有許多證明及

計算，是我們在高中曾經學過的，像是機率、線性組合、遞迴關係式及排列組合等。也有部分是物理的重力加速度與能量守恆。雖然作者認為數學帶給他的並非實用，而是各種驚喜，但數學在我們生活中確實是不可或缺的，不管是在統計、會計、土木等都會使用到大量的計算，在測量地形也會用到幾何的工具，所以，我雖然肯定作者對數學的評價，卻也肯定實用性對整個現今社會的貢獻。

整本書中我最喜歡的，是第七篇〈賭城風雲〉，因為大部分的人都喜歡錢，但不喜歡失去金錢，我從上高中開始自己理財記帳後發現，錢的流失往往比想像中的快且毫無預警，而且現在的金融保險、投資就如同一場這樣的遊戲，如何從一個看似賺錢的方案中找出破綻是非常重要的，讓自己免於受騙。這篇故事的解法使用了高一學過的對數，當時我們也討論過了複利的計算，看起來明明只是不起眼的數字，但結果卻非常可觀，愛因斯坦也曾說過「複利的力量遠大於原子彈」，之前有位數學老師想買車時去找車貸，聽到推銷員的敘述後便覺得半信半疑，便親自用計算機算過，而結果是推銷員使用了複利的概念，讓大眾誤判利率的計算，導致利息算錯。另外，老師也曾經放過一集〈數字搜查線〉給大家看，內容也是描述用數學來破解一些犯罪的故事，由此可知，數學絕不只是紙上談兵，更不只是考試答案卷上的那些數字，而是可以被靈活運用在日常生活中的工具。

### 三、延伸思考

對一個學生而言，考試算是一個目標，也算是一個學生盡本分的印證，但有時卻也過度的強調，反而阻擾了部分的學習。顯然，大家會專注於解題及答案而忽略了許多細節，但實際上那些細節往往是最精華的，就如同我們數學老師強調的，在下筆或計算前，要先理解題目的表達，問什麼、為什麼以及我應該如何有系統地將其解出，必須做到別人提問時，能用完整無邏輯漏洞的敘述答覆，而使用公式、定理時，也該把握它的使用前提，畢竟每一個公式使用的時機都不同，並非單純拿數字來做計算，有時我們總是會忽略這些細節。

1. 為節省影印成本，本通訊將減少紙版的發行，請讀者盡量改訂 PDF 電子檔。要訂閱請將您的大名、地址、e-mail 至 [suhv1022@gmail.com](mailto:suhv1022@gmail.com)
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請 e-mail 至 [suhv1022@gmail.com](mailto:suhv1022@gmail.com)
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horn/letter/hpmlatter.htm>
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡

#### 〈HPM 通訊〉聯絡員

日本：陳昭蓉（東京 Boston Consulting Group）

基隆市：許文璋（銘傳國中）

台北市：楊淑芬（松山高中）杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中）

蘇俊鴻（北一女中）陳啟文（中山女高）蘇惠玉（西松高中）蕭文俊（中崙高中）

郭慶章（建國中學）李秀卿（景美女中）王錫熙（三民國中）謝佩珍、葉和文（百齡高中）

彭良禎、鄭宜瑾（師大附中）郭守德（大安高工）張瑄芳（永春高中）張美玲（景興國中）

文宏元（金歐女中）林裕意（開平中學）林壽福、吳如皓（興雅國中）傅聖國（健康國小）

李素幸（雙園國中）程麗娟（民生國中）林美杏（中正國中）朱廣忠（建成國中）吳宛柔（東湖國中）王裕仁（木柵高工）蘇之凡（內湖高工）

新北市：顏志成（新莊高中）陳鳳珠（中正國中）黃清揚（福和國中）董芳成（海山高中）孫梅茵

（海山高工）周宗奎（清水中學）莊嘉玲（林口高中）王鼎勳、吳建任（樹林中學）陳玉芬

（明德高中）羅春暉（二重國小）賴素貞（瑞芳高工）楊淑玲（義學國中）林建宏（丹鳳國中）

莊耀仁（溪崑國中）、廖傑成（錦和高中）

宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中）吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）林宜靜（羅東高中）

桃園市：許雪珍、葉吉海（陽明高中）王文珮（青溪國中）陳威南（平鎮中學）

洪宜亭、郭志輝（內壢高中）鐘啟哲（武漢國中）徐梅芳（新坡國中）程和欽（大園國際高中）

鍾秀瓏（東安國中）陳春廷（楊光國民中小學）王瑜君（桃園國中）

新竹市：李俊坤（新竹高中）、洪正川（新竹高商）

新竹縣：陳夢綺、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）

苗栗縣：廖淑芳（照南國中）

台中市：阮錫琦（西苑高中）、林芳羽（大里高中）、洪秀敏（豐原高中）、李傑霖、賴信志、陳姿研（台中女中）、莊佳維（成功國中）、李建勳（萬和國中）

彰化市：林典蔚（彰化高中）

南投縣：洪誌陽（普台高中）

嘉義市：謝三寶（嘉義高工）郭夢瑤（嘉義高中）

台南市：林倉億（台南一中）黃哲男、洪士薰、廖婉雅（台南女中）劉天祥、邱靜如（台南二中）張靖宜（後甲國中）李奕瑩（建興國中）、李建宗（北門高工）林旻志（歸仁國中）、劉雅茵（台南科學園區實驗中學）

高雄市：廖惠儀（大仁國中）歐士福（前金國中）林義強（高雄女中）

屏東縣：陳冠良（枋寮高中）楊瓊茹（屏東高中）黃俊才（中正國中）

澎湖縣：何嘉祥 林玉芬（馬公高中）

金門：楊玉星（金城中學）張復凱（金門高中）馬祖：王連發（馬祖高中）

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。懇請各位老師惠賜高見！