HPM 通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系退休教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）
助理編輯：黃俊瑋（和平高中）
編輯小組：蘇意雯（台北市立大學）蘇俊鴻（北一女中）
葉吉海（桃園陽明高中）陳彥宏（成功高中）
英家銘（台北教育大學）
創刊日：1998 年 10 月 5 日
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng
聯絡信箱：suhy1022@gmail.com

第二十一卷 第六期合刊目錄(2018 年 6 月)

異軍突起的數學小說 ………………………………… 洪萬生
奉掛御寶前算額－累圓容切問題 ………………………………… 黃俊瑋
利用機率來處理排列組合 ……………………………… 王裕仁

異軍突起的數學小說

洪萬生
台灣師範大學數學系退休教授

在本文中，[1]我將首先介紹國內最近一些與數學小說相關的活動，藉以指出此一新文類在數學普及閱讀中所帶來的全新動力。其次，我還想進一步說明它的敘事元素及其與數學史之連結，如何有助於學習成效之提升與數學素養之培育。**2016** 年，我前往法國南部 **Montpellier** 參加 **HPM** 國際研討會（**2016** 年 **ICME** 衛星會議），曾以 **"Mathematical Narrative from History to Literature: A practice in liberal-arts mathematics"** 為題，舉數學通識教學為例，延續我在 **2012** 年 **PME** 大會演講主題 **"Narrative, Discourse and Mathematics Education: An Historian's Perspective"**，說明數學小說所蘊含的（文學）敘事，也能引發學生的數學學習興趣。換句話說，在數學教學中融入數學史，固然是 **HPM** – 數學史與數學教學之關連 -- 的一種典型進路，不過，如果充分利用數學小說的數學敘事甚至是文學敘事的特色，那麼，其潛在的教學（或主動學習）成效，也可視為 **HPM** 的一種延伸。

無論如何，數學小說閱讀是普及閱讀最能貼近學習經驗 – 不喜歡閱讀故事的學生顯然不多 -- 的一環，因此，它的確是「學習數學的多元面向」之一。在本文中，我將以學術與教育資源、相關普及閱讀文化活動、數學普及讀物等面向，說明數學小說（敘事）在數學學習中可以發揮的價值與意義。

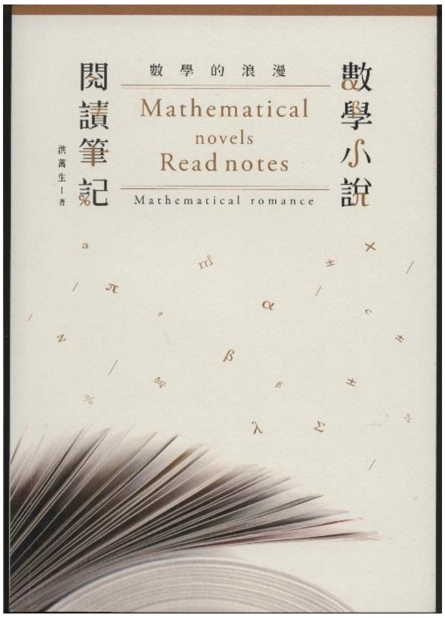
一、學術與教育資源

[1] 本文部分內容取自簡報檔〈數學史・**HPM**・數學小說〉。該簡報檔發表於「**2018** 臺北 -- 上海 **HPM** 數學史與教學雙城論壇」，**2018/5/10**，台灣師範大學數學系。我要特別感謝主辦單位國立勤益科技大學的盛情邀約。

迄 **2018/06/13** 檢索為止，數學家 **Alex Kasman** 的 **Mathematical fiction (http://kasmana.people.cofc.edu/MATHFICT/)** 網站所收錄的數學小說，已經有 **1269** 篇之多（以作品有英譯版為主）。其中，**Kasman** 除了自己提供簡短的推薦文（或評論）之外，也歡迎讀者上網發表評論，以及針對數學知識內容（**mathematical content**）與文學品質（**literary quality**）兩個面向的評價。

最近，**Kasman** 針對不同層次的讀者群，如孩童或青少年讀者群等等，從他的網站中挑選書目，各自推薦了書單。茲引述如下。

在推薦給**孩童讀者**的 **17** 小說中，就有我們熟悉的《數學天方夜譚》**(*The Man Who Counted : A Collection of Mathematical Adventures*)** 一書。推薦給**青少年讀者** **(young adults)** 的 **24** 本之中，我們有中譯本出版的，就有《爺爺的證明題》**(*A Certain Ambiguity: A Mathematical Novel*)**、《數學邏輯奇幻之旅》**(*Logicomix*: *An Epic Search for Truth*)**、《數學天方夜譚》，以及《數學女孩：費馬最後定理》**(*Math Girls*)**。



圖一：洪萬生《數學小說閱讀筆記》封面

在推薦給**數學主修或研究生，甚至是數學家**的 **38** 本小說中，《爺爺的證明題》、《給年輕數學家的信》**(*Letters to Young Mathematicians*)**、《數學邏輯奇幻之旅》、《數學天方夜譚》、《數學女孩：費馬最後定理》、《牛津殺人規則》**(*Oxford Murders*)**、《鸚鵡定理》**(*Parrot's Theorem*)**，以及《遇見哥德巴赫猜想》**(*Uncle Petros and Goldbach Conjecture*)** 等書有中譯版。

在推薦給**科幻「死忠」粉絲**的 **32** 本小說中，有中譯本的只有《接觸未來》**(*Contact*，**小說原著作者是 **Carl Sagan)** 的電影版。

至於推薦給一般知識份子的 47 本小說中，有中譯本出版的作品如下：《深夜小狗神秘習題》(*The Curious Incident of the Dog in the Night-time*)、《嫌疑犯 *X* 的獻身》、《平面國》(*Flatland: A Romance of Many Dimensions*)、《格列佛遊記》、《博士熱愛的算式》、《牛津殺人規則》、《證明我愛你》(*Proof*，電影版)，[2]以及《遇見哥德巴赫猜想》。[3]

上述這些有中譯本的被推薦小說，絕大部分我們都寫過深度書評，並且發表於台灣數學博物館「數學小說」專欄（http://mathmuseum.tw/）。[4]在 2017 年，我還將其中的 22 篇改寫，結集成《數學的浪漫：數學小說閱讀筆記》出版。由於我們接觸日本小說有地利及文化之便，因此，我們所推薦的數學小說，就包括了 Alex Kasman 所不及的日本作品，這些作品涵蓋小說、電影、影集乃至漫畫，內容豐富多元，具有娛樂與教育的雙重價值。

2012 年 9 月，我應台大通識教育中心之邀，特別將我教授的數學通識課程「數學與文化：以數學小說閱讀為進路」製作為開放性課程，[5]以便與所有對數學小說有興趣的閱聽人分享，請參考網址 http://ocw.aca.ntu.edu.tw/ntu-ocw/index.php/ocw/cou/101S126。從網站的點閱率來看，數學小說看起來還有極大的發揮空間，我們從下文幾個「面向社會大眾」的相關教育活動之迴響，或許可以得到些許驗證。

二、相關閱讀普及文化活動

「2017 台積電盃青年尬科學」的主題「看見數學」，由台大科學教育發展中心（CASE）主辦，它的宗旨是「從數學小說的閱讀過程中看見數學」。至於決賽前的徵文及初賽指定書目，則是《丈量世界》、《天地明察》、《平面國》、《爺爺的證明題》、《博士熱愛的算式》，以及《蘇菲的日記》等六本數學小說。此外，複賽與決賽指定影片是《數字搜查線》（*NUMB3RS*）第一季十三集。參與這個活動的學生以高中生為主，但由於可自由組隊（不限同一學校），也包括少數國中生。在 2017 年 9 月 9 日舉行決賽，最後從七支隊伍選出前三名，依序為由北一女、高雄新莊高中，以及建國中學等校學生組成。這個尬科學活動到去年為止，已經舉辦了六屆，2017 年這一屆首度以數學為主題。由於事先在北、中、南、東區各辦一場說明會，吸引頗多學校的注意。事實上，決賽當天，還有中部學校包車由校長帶隊前來觀摩比賽，足見數學普及閱讀已經逐漸受到中學師生的重視了。

2017 年另一個相關活動是全國技專院校「文以載數」創作獎，由勤益科技大學通識教育學院主辦 http://www.gen.ncut.edu.tw/files/40-1028-1222-1.php，文類包括詩與散文，參賽成員則是全國技專院校學生。這個活動已經主辦三屆，在技專院校系統的通識教學中，已經引發了不少迴響。其中，有一些的得獎作品還被推薦刊登在《數學傳播》上，

---

[2] *Proof* 原是舞台劇，台灣綠光劇團也有中文版演出。
[3] 以上推薦給各類讀者時多有重複，可見有許多小說的讀者是跨界的。
[4] 舊版的網站已經關閉，目前有關改版工作仍在進行之中。
[5] 黃俊瑋與黃美倫兩位老師協助製作，謹此申謝！

讓讀者充分領會這些作者的數學文學想像，即使他們的數學經驗沒有那麼成熟。

由「數感實驗室」（主持人：台灣師大賴以威教授）首度主辦的「2018 年數感盃青少年寫作競賽」剛在 **2018/4/14** 頒獎落幕，這是「提供國中、高中職學生在培養數學素養後，一個絕佳的發揮舞台。本競賽鼓勵學生跨領域學習，運用數學知識，培養及展現邏輯思考與文字撰寫的能力，盼提升臺灣青少年科普寫作的風氣以及對數學的興趣。」這個活動正如「**2017** 台積電盃青年尬科學」一樣，也引起中學教育界師生的廣泛關注，預料也將成為十二年國教的另類「宣傳」，請參閱網站 **http://numeracy.club/events/writingaward2018**。

三、數學普及讀物分類

正如前述，數學小說（含電影、舞台劇、漫畫及繪本等）是一個新興的文類（**genre**），它既是一種（文學範疇中的）小說，也可歸屬於數學普及書寫。過去，由於創作量有限，因此，數學小說常被歸類為科幻小說（**science fiction**），比如說，**A. J. Deutsch** 的數學小說〈名為莫比烏斯環的地鐵〉**(A Subway Named Mobius, 1950)**，就被艾西莫夫（**Isaac Asimov**）收入十七篇傑出的科幻短篇小說選集 ***Where Do We Go From Here?*** 之中。此外，數學詩（含散文）及數學繪本也被歸類為數學小說，儘管詩或散文有時純粹關乎想像而無涉敘事。

數學普及讀物還有一大類與傳統的趣味數學問題有關，目前這個文類又向（仿綜藝表演的）「數學魔術」、（美術勞作相關的）「摺紙玩數學」，或高等數學為張本的「藝術創作」等三個方面擴張，而讓數學知識活動有了全新的「遊戲」意義。在可預見的未來，魔術師、摺紙達人或藝術家將會介入數學教育現場，[6]也讓我們得以想像教學評量在「獨斷的」紙筆測驗之外，還有極大的「另類」空間可以揮灑！

除了上述兩大類之外，數學普及讀物還有大量涉及數學知識或概念的演化史，乃至於數學與文化的互動關係。這是從數學的歷史與文化面向來書寫的普及作品，作者大都從數學（文化）史取經，譬如毛爾（**Eli Maor**）的「毛起來說」系列，[7]或是我們團隊合撰的《當數學遇見文化》（三民書局）及《數說新語》（開學文化出版社），在論述及敘事中分享數學及歷史的雙重洞察力，而呼應 **HPM**（數學史與數學教學之關連）的終極關懷。以這些作品為切入點，讀者應該可以印證數學的博雅素養。這種素養主要涉及數學史的基本功。事實上，由於數學小說的故事情節也多半涉及數學史，因此，適度地理解數學史實，似乎也成為「活化」閱讀數學小說的必備功夫。

四、結語

數學小說成為一個全新的文類，是最近才出現的一個文化現象。從一開始，科普作家（含專業數學家）開始融數學的「真」與「美」為一體，進而分享數學知識之美感經驗，然而，正如前述，數學小說不過是科幻小說的子類，直到過去二、三十年來，數學

---

[6] 在此將摺紙達人（業餘的）與藝術家（職業的）分列，只是權宜之計，沒有不敬的意思。
[7] 例如，《毛起來說 *e*》，《毛起來說三角》，與《毛起來說無限》，以及《畢氏定理四千年》等書。

小說才發展成熟，而成為一個不可忽視的全新文類。

根據我自己的粗陋觀察，日本傑出作家小川洋子 **(Yoko Ogawa)** 在 **2003** 年出版《博士熱愛的算式》（同名電影 **2004** 年發行），應該可以視為數學小說獨立成為一個文類的忠實見證。其次，加拿大作家艾莉絲・孟若 **(Alice Munro)** 在 **2009** 年出版數學小說《太多幸福》**(*Too Much Happiness*)**，更是對於數學小說的「定位」，帶來了更多「加持」，該小說是根據俄羅斯女數學家索菲亞・柯（卡）巴列夫斯基（**Sophia Kovalevsky**）的傳記創作而成的短篇小說。**2013** 年孟若榮獲諾貝爾文學獎桂冠，本短篇小說也成了她最得意的代表作品之一。

最後，讓我們回到數學學習的議題上。以本文第二段提及的「學習數學的多元面向」所指涉的活動為例。這個句子至少有如下兩種讀法：

- **學習「數學的多元面向」**
- **「學習數學」的多元面向**

顯然，這兩種讀法意義不同，不過，前者自然可以引伸後者，這是因為一旦吾人承認數學知識（結構）擁有多元面向，那麼，有效的學習數學就必須尋找新的進路來開展。[8]例如說吧，數學小說閱讀，就是新的進路之一。我相信，在帶領學生進行數學普及閱讀的情境中，數學小說的引入，一定可以打開非常開闊的認知與情意經驗之可能性。事實上，為了理解數學小說的「意在言外」（譬如數學敘事），有些學生被引導深入理解數學知識結構本身的意義，這是我從事數學通識教學多年最珍惜的經驗之一。[9]

參考書目

Horng, Wann-Sheng (2012). "Narrative, Discourse and Mathematics Education: An Historian's Perspective," PME 2012 Plenary speech, Taipei, Taiwan.

Horng, Wann-Sheng (2016). "Mathematical Narrative from History to Literature: A practice in liberal-arts mathematics, " presented to HPM 2016 Montpellier, France.

Lin, Fang-Mei & Wann-Sheng Horng (draft). Mathematics as a Literary Metaphor in Fiction Writing.

洪萬生 **(2017).**《數學的浪漫：數學小說閱讀筆記》，台北：遠足文化出版社。

洪萬生 **(2017).**〈數學敘事與普及閱讀〉，收入洪萬生，《數學的浪漫：數學小說閱讀筆記》（台北：遠足文化出版社），頁 **231-238**。

---

[8] 譬如，美國大學數學系的博士資格考試非常重視大學數學基本知識的綜合性理解（**comprehensive understanding**），因此，研究生準備應試時，就必須以融會貫通為首要目標。

[9] 參考洪萬生，〈數學敘事與普及閱讀〉。

奉掛御寶前算額—累圓容切問題

黃俊瑋
台北市立和平高中

一、 緣起

如同江戶時期和算家們進行遺題繼承或奉納算額徵解的文化，洪萬生教授曾在「數學洪流」社群上，徵求解讀解答圖一所示之算額：「這一片算額是在「四日市市」郊區一所神社所拍，源自家銘推薦，與日本數學史家同行一起前往參觀。又，家銘當然也在場。它也可以在小寺裕的「和算之館」找到。哪位伙伴可否幫忙解讀它的問題及解答？」

從算額最左列的日期我們可知，本算額被奉納於天保十五年，相當於西元 **1844** 年間。當然，理解算額中的圖形與文字－問題、答案與術文－並不困難。然而，一般算額受木板大小與空間安排上的限制，通常僅會列出問題、數值答案與抽象性的術文（公式），並不會留下推演出術文的過程與線索，因此，若要進一步證明本「術文」的正確性，就需要一些巧思與努力了。

圖一　「奉掛御寶前算額」的算額

二、本算額問題之意與答案

接下來，我們參照圖一，理解算額圖形上各圓之間的關係與本題之意。首先，圖一中畫有一個「大圓」（可視為四分之一圓）與兩垂直切線段，另外左側畫有一個「半圓」

與大圓相切，接著如下方式作「累圓」（圖中之一系列白圓）與「狹圓」（圖中之一系列黑圓）：

1. 先畫「累圓」：
   白圓 **1** 與半圓和大圓均外切；白圓 **2** 與白圓 **1** 和大圓均外切；白圓 **3** 與白圓 **2** 和大圓均外切；白圓 **4** 與白圓 **3** 和大圓均外切，以此類推**…**

2. 再接著作「狹圓」：
   黑圓 **1** 與大圓、半圓和白圓 **1** 均外切；黑圓 **2** 與大圓、白圓 **1** 和白圓 **2** 均外切；黑圓 **3** 與大圓、白圓 **2** 和白圓 **3** 均外切；以此類推**…**

如此，便構成了本算額中的幾何圖形。了解了本圖形各圓的關係之後，本問題的條件與所求如下：

已知圖中的大圓直徑為 **121** 寸 **8** 分（即 **1218** 分），而圖中的末圓（最小的黑圓）直徑為 **1** 分，求圖中黑圓的總數。

本算額除了在「答曰」中給出答案「**16** 個」之外，也在「術曰」中提供了解題公式：

先將大圓徑 **1218(**分**)**，除以末圓徑 **1(**分**)**的 **4** 倍，接著，開根號後，省去小數部份，即相當於將前述所得數值於取「高斯符號」。最後，將此數值減 **1**，所得即為圖中黑圓的個數。

若用現代符號來表示，設大圓直徑為 $\boldsymbol{R}$，末圓直徑為 r_n，則所求黑圓的個數 $\boldsymbol{n}$ 滿足下述公式：

$$n=\left[\sqrt{\frac{R}{4r_n}}\right]-1$$

經筆者實際檢驗，可以利用初等數學的方法，適當地畫輔助線，再加上勾股定理，求得圖中諸累圓與諸狹圓半徑的關係式，再進一步推演證明本問題的答案與公式皆為正確。事實上，本問題若先給定大圓的直徑後，易求得半圓的直徑，再畫上輔助線後，就可利用勾股定理解出「累圓」直徑的關係式，至於求解「狹圓」直徑的過程，雖較複雜，但同屬中學數學可解範疇。因此，若本問題設計成已知大圓與半圓的直徑，求解第 $\boldsymbol{k}$ 個累圓（圖中白圓）或第 $\boldsymbol{k}$ 個狹圓（圖中黑圓）直徑，則較容易處理。

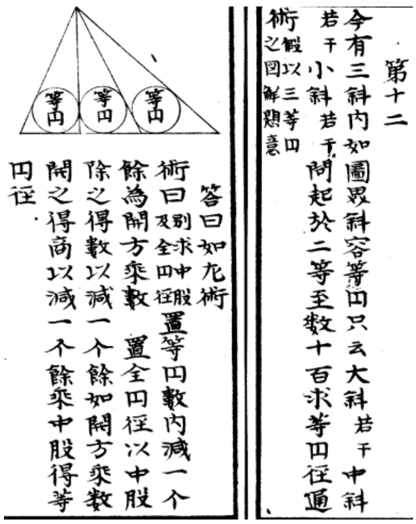
然而，本算額的奉納者，則是反過來在已知大圓與末圓（第 $\boldsymbol{k}$ 個狹圓）直徑的條件下，問狹圓的「個數」。對於一般不熟悉和算脈絡的解題者，便成為一道不折不扣的數學難題了，筆者也花了不少功夫，才順利解出此題，並證明此公式與答案的正確性。不過，在此筆者就賣個關子，提供有興趣的讀者挑戰。當然，從現代數學的角度來看，我

們可以利用「曲率」描述各圓半徑之間的關係，同時，光是本算額問題，便存在了各式各樣的推廣，也隱藏了許多數學關係，更可以進一步將圖形坐標化，以求解各圓心的軌跡等。接下來，筆者簡單談談本算額問題在和算脈絡下的意思。

三、和算之容切問題

本問題中的幾何圖形主要由若干個相切的圓或直線所構成，這類問題是江戶時期和算家們特別感興趣的「累圓容切」問題，當然除了本問題這類「基本款」之外，和算家們也推廣出多個圓與三角形、長方形、多邊形相切的問題，甚至將圓推廣至橢圓，或者將平面問題推廣成為空間中，若干個球彼此相切，或是若干個球與各類錐體的容切問題等。

從現存的和算文本，例如安島直圓（**Ajima Naonobum, 1732 - 1789**）的《不朽算法》，我們不難發現容切問題的多樣性與各類變化。例如，《不朽算法》書中將《精要算法》裡最基本的等腰三角形容等圓問題，推廣至任意三角形之三斜容等圓（參考圖二），而後，又將三斜容等圓問題，推廣至界斜數十，亦即從三角形容三個圓，推廣至容數十、數百個圓的一般化情況。


第十二
今有三斜内如圖界斜容等円只云大斜若干中斜若干小斜若干問起於二等至数十百求等円径通術
假以三等円之図解題意
答曰如左術
術曰 别求中股及全円径 置等円數内減一个餘為開方乗數 置全円径以中股除之得數以減一个餘如開方乗数開之得商以減一个餘乗中股得等円径

圖二　安島直圓《不朽算法》第十二問書影

除此之外，十八世紀後期與十九世紀的和算家也進一步將方中容圓問題，推廣至長方體容橢圓問題；[10]將圓中容圓問題，推廣為球中容球問題；[11]將三角形容圓問題推廣至空間中角錐之容球問題，再推廣至各類弧錐容球問題等等。[12]以《不朽算法》第二十一問為例，本問題即是對舊有問題作了維度上的推廣，安島直圓將長方形容橢圓問題中的長方形與橢圓，分別推廣成空間中的長方體與橢球，形成了長方體切橢球問題。

[10] 直堡壔容長立圓問題可參見《不朽算法》，第 21 問。
[11] 圓容累圓問題可參見《不朽算法》，第 33 問。球中容球問題可參見《不朽算法》，第 24 問、25 問。
[12] 球中容球問題可參見《不朽算法》，第 24 問、25 問。

另外，《不朽算法》第二十四至第二十七問，也是進行維度上的推廣，第二十四與第二十五問則從平面上的圓內切多個圓問題，推廣至空間中球內切多個球問題；而第二十六問與第二十七問，則是將平面上的三角形內切多個圓的問題，推廣至空間中的錐體容球問題，其中的第二十六問為「內弧錐容累球」，而第二十七問則為「外弧錐容累球」問題。[13]

最後，值得注意的是，即使問題的情境是具體的，這時代的和算家在解題過程中會，會偏好以抽象的方式來處理，導出一個抽象的公式，最後帶入實際數值進行計算求值的工作。就像本算額題一樣，給定了具體數值解，也給定一般化的解題公式。這樣的特色同樣表現在《拾璣算法》、《不朽算法》、《算法圓理鑑》、《圓理算經》等和算書裡。當中有許多問題，即使原問題的題幹包含了具體的數值與單位，但和算家在求術過程以及最後所提供的術文（公式），都是以抽象的方式來呈現。[14]

總之，日本江戶時期遺留下來的算額或和算文本中的問題，包含了許多有趣多樣化的幾何問題，除了可提供對數學有興趣者挑戰之外，當中許多問題，都值得作進一步的推廣與發展，亦適合作為中學生專題研究，甚至是科展的題材。

參考文獻

安島直圓，《不朽算法》，1799 年。收入徐澤林《和算選粹補編》。北京：科學出版社，2009，頁 399 - 423。

黃俊瑋，《關流算學研究及其歷史脈絡：1722-1852》，國立台灣師範大學博士論文（未出版），2015 年。

13 參考黃俊瑋，《關流算學研究及其歷史脈絡：1722-1852》，頁 388-389。至於內弧錐與外弧錐，安島直圓並未說明其為何種曲線，一般難以解讀。

14 參考黃俊瑋，《關流算學研究及其歷史脈絡：1722-1852》，頁 450。

利用機率來處理排列組合

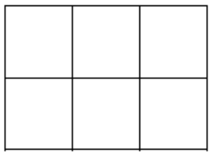
王裕仁
台北市立木柵高工

一、前言

由於現今教科書的安排，以及知識架構的推疊，通常我們都會先學「排列組合」再學「機率」，利用「排列組合」來計算「機率」的分母以及分子方法數，進一步求得「機率」。但有時候換個角度出發，我們可以反過來利用「機率」去算「排列組合」，這樣可以更快、更容易理解其中緣由。茲以 **99** 年學測題為例，為讀者做解釋說明。

題目：

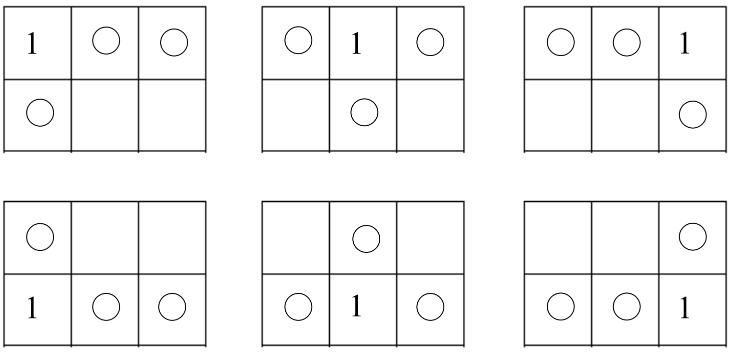
有一個兩列三行的表格如右圖。在六個空格中分別填入數字 **1**、**2**、**3**、**4**、**5**、**6**（不得重複），則 **1**、**2** 這兩個數字在同一行或同一列的方法有________種。



二、用排列組合方法處理 99 年學測題

先考慮 **1** 號放的位置，由於 **6** 格都尚未填入數字，所以能放的位置有 **6** 種可能。再考慮 **2** 號的位置，無論 **1** 號放在哪個位置，因為 **1** 號必須和 **2** 號在同一列或同一行，所以 **2** 號都只有 **3** 個○處可以放(見圖一)，**2** 號能放的位置有 **3** 種可能。最後，**3** 號到 **6** 號可以任意擺放剩下的 **4** 個位置，所以方法數有**4!**種。

如此一來我們可以得到，所有滿足條件的方法數為$6\times3\times4!=432$種。

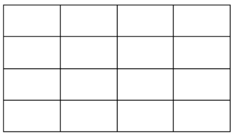


圖一

三、95 年學測的類似題

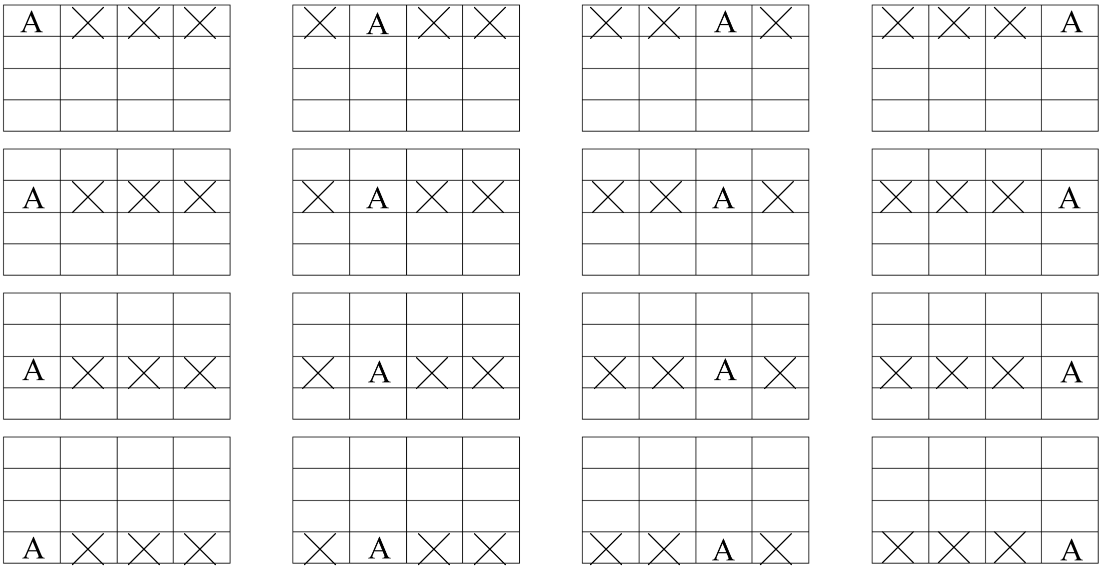
會想到用機率來處理，是因為 **95** 年的學測題有一題類似題，其題目如下：

在圖二的棋盤方格中，隨機任意取兩個格子。選出的兩個格子不在同行（有無同列無所謂）的機率為何？



圖二

為方便探討，我們將第一枚放下的棋子命名為 **A**，第二枚放下的棋子命名為 **B**。目前 **16** 個空格都可以放 **A**，所以 **A** 可以放入的機率為 $\frac{16}{16}=1$。當 **A** 任意放入其中一格後，由於 **B** 不能跟 **A** 在同行，所以 **B** 在剩下的 **15** 個空格中，只能有 **12** 個選擇(如圖三所示，╳為不能放的位置)，故 **B** 可以放入的機率為 $\frac{12}{15}=\frac{4}{5}$。利用乘法原理，滿足條件的機率為 $1\times\frac{4}{5}=\frac{4}{5}$。



圖三

四、用機率方法處理方式 99 年學測題

回到原本問題，如何用機率來處理，讓我們探究竟！

首先，要先算出滿足條件的機率，由於 **6** 個格子都沒有號碼，所以 **1** 號可以放入的機率為 $\frac{6}{6}=1$。考慮 **2** 號的位置，無論 **1** 號放在哪裡，因為 **1** 號必須和 **2** 號在同一列或同一行，所以 **2** 號都只有 **3** 個○處可以放(見圖一)，其放入的機率為 $\frac{3}{5}$。所以滿足條件的機率為 $1\times\frac{3}{5}=\frac{3}{5}$。

6 個號碼放入 **6** 個格子的所有方法數為 $6!$，再令所求為 x，利用機率的性質：

$\frac{\text{可行方法}}{\text{所有方法}}=\frac{x}{6!}=\frac{3}{5}$，可得 $x=\frac{3}{5}\times 6!=432$。

五、應用

或許讀者會覺得沒什麼，畢竟「排列組合」可以解決「機率」問題理當「機率」也能解決「排列組合」的問題，再說，上述所舉的例子，就速度而言並沒有快多少，而且兩種方法都能處理，以下是筆者提供的一套題組，給各位讀者欣賞一下，用「機率」角度出發解決「排列組合」問題更為簡潔有力。

1. 已知有 **3** 顆相同的紅球，與 **5** 顆相同的黑球，放在一個箱子中，今從箱中一次一顆球，取後不放回，並記錄下每次取球的顏色，試問紅球最先全部取完的方法數有幾種？

方法一：直接排

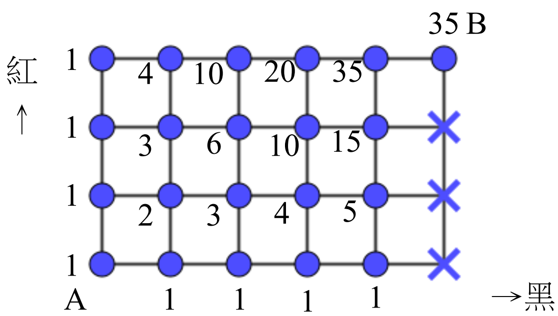
因為紅球要先取完，表示最後一顆球要是黑球，前面幾顆隨意(如圖四)，前面 **3** 顆紅球、**4** 顆黑球做排列，方法數為 $\frac{7!}{3!\times 4!}=35$ 種。

○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ 黑

圖四

方法二：與走捷徑問題連結

看成從 **A** 到 **B** 走捷徑問題，向右表示拿到黑球，向上表示拿到紅球，因為題目要求紅球先拿完，所以走到最上方之前，不能走到最右方(如圖五，打╳為不可走的點)，又因為是走捷徑，所以每一點的方法數為「左方點的方法數」加「下方點的方法數」(例如：**6** 等於「左邊的 **3**」加上「下方的 **3**」)，所以可得所有方法數為 **35** 種。



圖五

方法三：用機率來處理

因為紅球要最先拿完，所以最後一顆要拿黑球，「最後一顆拿黑球的機率」等於「第

一顆拿黑球的機率」為 $\frac{5}{8}$，所以有球的拿法為 $\frac{8!}{3!\times 5!}=56$，假設所求的方法數為 x 種，則有 $\frac{x}{56}=\frac{5}{8}$，推得 $x=35$。

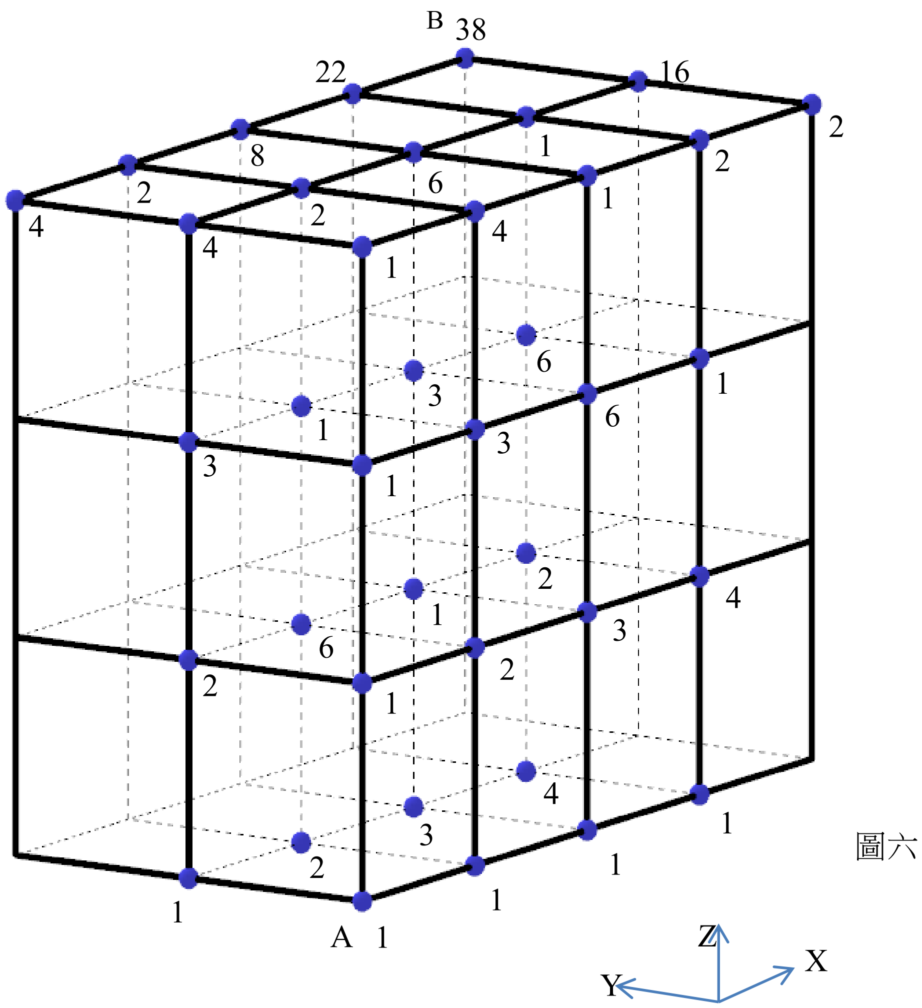
2. 已知有 **2** 顆相同的白球，**3** 個顆同的紅球，**4** 顆相同的黑球，放在一個箱子中，今從箱中一次一顆球，取後不放回，並記錄下每次取球的顏色，試問紅球最先全部取完的方法數有幾種？

方法一：直接排

此時直接排會發現需要討論的種類已經太多了！

方法二：與走捷徑問題連結

看成三度空間從 **A** 到 **B** 走捷徑問題，**X** 方向表示拿到黑球，**Y** 方向表示拿到白球，**Z** 方向表示拿到紅球，因為題目要求紅球先拿完，所以走到 **Z** 方向底之前，不能走到 **X**、**Y** 方向的底(如圖五六，有點的才是要走的部分)，又因為是走捷徑，所以每一點的方法數為「**X** 方向點的方法數」加「**Y** 方向點的方法數」加「**Z** 方向點的方法數」(例如：**140** 等於「前一個 **X** 方向的 **60**」加「前一個 **Y** 方向的 **20**」加「前一個 **Z** 方向的 **60**」)，所以可得所有方法數為 **384** 種。



圖六

方法三：機率

因為紅球要最先拿完，探討紅球拿完的所有情況(如圖七)，利用排容原理，先算紅球不是最先拿完的機率：

$$P(\text{紅球不是最先拿完})$$

$$=P(\text{白球比紅球先拿完})+P(\text{黑球比紅球先拿完})-P(\text{紅球最後拿完})$$

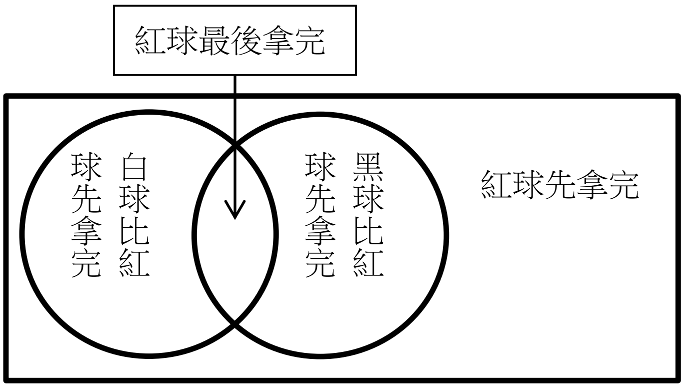
$$=\frac{3}{2+3}+\frac{3}{3+4}-\frac{3}{2+3+4}=\frac{73}{105}$$

所以紅球先拿完的機率：

$$P(\text{紅球最先拿完})=1-P(\text{紅球不是最先拿完})=1-\frac{73}{105}=\frac{32}{105}$$

假設滿足條件的方法數有x種，所有方法有 $\frac{9!}{2!\times 3!\times 4!}=1260$ ，利用機率可知：

$\frac{x}{1260}=\frac{32}{105}$ ，推得 $x=384$ 。



圖七

3. 已知有 **1** 顆綠球，**2** 顆相同的紅球，**3** 顆相同的白球，**4** 顆相同的黑球，放在一個箱子中，今從箱中一次一顆球，取後不放回，並記錄下每次取球的顏色，試問紅球最先全部取完的方法數有幾種？

方法一：直接排

光是三種顏色要討論的種類就已很多，四種顏色的情況更多、更複雜！

方法二：與走捷徑問題連結

因為涉及四種顏色，所以會與四度空間做連結，對於訓練空間概念來說是一個很好的嘗試，但有鑑於不是所有中學生的空間概念都很強，又要與更抽象的四度空間做結合，難度會稍高，在此略過，有興趣的讀者可以嘗試看看！

方法三：機率

因為紅球要最先拿完，探討紅球拿完的所有情況(如圖八)，利用排容原理，先算紅球

不是最先拿完的機率：

$$P(\text{紅球不是最先拿完})$$

$$=P(\text{白球比紅球先拿完})+P(\text{黑球比紅球先拿完})+P(\text{綠球比紅球先拿完})$$

$$-P(\text{白、黑球比紅球先拿完})-P(\text{白、綠球比紅球先拿完})$$

$$-P(\text{黑、綠球比紅球先拿完})+P(\text{紅球最後拿完})$$

$$=\frac{2}{2+3}+\frac{2}{2+4}+\frac{2}{1+2}-\frac{2}{2+3+4}-\frac{2}{1+2+3}-\frac{2}{1+2+4}+\frac{2}{1+2+3+4}$$

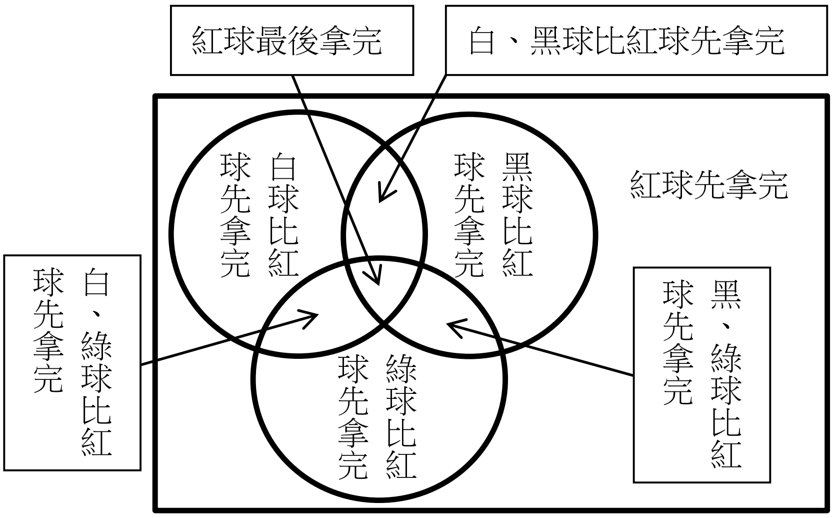
$$=\frac{239}{315}$$

所以紅球先拿完的機率：

$$P(\text{紅球最先拿完})=1-P(\text{紅球不是最先拿完})=1-\frac{239}{315}=\frac{76}{315}$$

假設滿足條件的方法數有x種，所有方法有 $\frac{10!}{1!\times 2!\times 3!\times 4!}=12600$ ，利用機率可知：

$\frac{x}{12600}=\frac{76}{315}$ ，推得 $x=3040$ 。



圖八

六、結論

很多時候當學生在學習時，常常會忘記融會貫通，忘記數學的連貫性，而將每一個單元看成獨立的單元來處理，往往無法欣賞數學結構的美，以及問題的本質。在本文中，筆者以 **99** 學測題為例，提醒讀者欣賞用機率來處理排列組合問題，另外，再舉例一套題組，用機率來處理比較容易的「排列組合問題」。如果還是沒有感受到便利性，讀者可以嘗試將球色的數量增加，再來求紅色球先取完的方法數，就能感受到了！

1. 為節省影印成本，本通訊將減少紙版的的發行，請讀者盡量改訂 PDF 電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail 至 suhy1022@gmail.com
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請 e-mail 至 suhy1022@gmail.com
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng/letter/hpmletter.htm
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡

《HPM 通訊》聯絡員

日本：陳昭蓉 (東京 Boston Consulting Group)
基隆市：許文璋（銘傳國中）
台北市：楊淑芬（松山高中）杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中）
蘇俊鴻（北一女中）陳啟文（中山女高）蘇惠玉（西松高中）蕭文俊（中崙高中）
郭慶章（建國中學）李秀卿（景美女中）王錫熙（三民國中）謝佩珍、葉和文（百齡高中）
彭良禎、鄭宜瑾（師大附中）郭守德（大安高工）張瑄芳（永春高中）張美玲（景興國中）
文宏元（金歐女中）林裕意（開平中學）林壽福、吳如皓 (興雅國中) 傅聖國（健康國小）
李素幸（雙園國中）程麗娟（民生國中）林美杏（中正國中）朱賡忠（建成國中）吳宛柔（東湖國中） 王裕仁（木柵高工）蘇之凡（內湖高工）
新北市：顏志成（新莊高中） 陳鳳珠（中正國中）黃清揚（福和國中）董芳成（海山高中）孫梅茵（海山高工）周宗奎（清水中學）莊嘉玲（林口高中）王鼎勳、吳建任（樹林中學）陳玉芬（明德高中）羅春暉 (二重國小) 賴素貞（瑞芳高工）楊淑玲（義學國中）林建宏 （丹鳳國中）莊耀仁（溪崑國中）、廖傑成（錦和高中）
宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中）吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）林宜靜（羅東高中）
桃園市：許雪珍、葉吉海（陽明高中）王文珮（青溪國中） 陳威南（平鎮中學）
洪宜亭、郭志輝（內壢高中） 鐘啟哲（武漢國中）徐梅芳（新坡國中） 程和欽 (大園國際高中)、鍾秀瓏（東安國中）陳春廷（楊光國民中小學）王瑜君（桃園國中）
新竹市：李俊坤（新竹高中）、洪正川（新竹高商）
新竹縣：陳夢綺、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）
苗栗縣：廖淑芳 (照南國中)
台中市：阮錫琦（西苑高中）、林芳羽（大里高中）、洪秀敏（豐原高中）、李傑霖、賴信志、陳姿研（台中女中）、莊佳維（成功國中）、李建勳（萬和國中）
彰化市：林典蔚（彰化高中）
南投縣：洪誌陽（普台高中）
嘉義市：謝三寶（嘉義高工）郭夢瑤（嘉義高中）
台南市：林倉億（台南一中）黃哲男、洪士薰、廖婉雅（台南女中）劉天祥、邱靜如（台南二中）張靖宜（後甲國中）李奕瑩（建興國中）、李建宗（北門高工）林旻志（歸仁國中）、劉雅茵（台南科學園區實驗中學）
高雄市：廖惠儀（大仁國中）歐士福（前金國中）林義強（高雄女中）
屏東縣：陳冠良（枋寮高中）楊瓊茹（屏東高中）黃俊才（中正國中）
澎湖縣：何嘉祥 林玉芬（馬公高中）
金門：楊玉星（金城中學）張復凱（金門高中） 馬祖：王連發（馬祖高中）

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。懇請各位老師惠賜高見！