

計畫團隊

一、計畫召集人

李錦瑩 主任（中等教育階段數學領域教學研究中心）

陳界山 教授（國立臺灣師範大學數學系）

二、國中組教師

林靖捷 老師（臺北市立蘭雅國民中學）

李記萱 老師（臺北市立濱江國民中學）

賴政泓 老師（國立政治大學附屬高級中學）

三、高中組教師

蘇惠玉 老師（臺北市立西松高級中學）

蘇麗敏 老師（臺北市立第一女子高級中學）

林信安 老師（臺北市立建國高級中學）

四、計畫諮詢顧問

蕭弘玫 教授（Lane Community College, Oregon, USA）

李睿紘 教育顧問（廣天國際有限公司）

五、計畫助理

李君柔 行政專員（國立臺灣師範大學數學系）

黃孟凡 專案助理（中等教育階段數學領域教學研究中心）

使用計算機的數學評量試題研究成果

林靖捷 老師

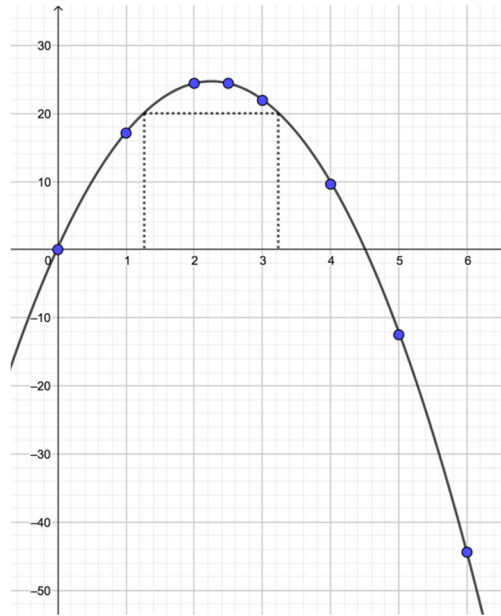
臺北市立蘭雅國民中學

試題編號	A-01														
試題原文	<p>1.</p> <table border="1" data-bbox="539 689 1222 824"> <thead> <tr> <th></th> <th>China</th> <th>Africa</th> <th>Singapore</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Population</td> <td>1.32 billion</td> <td>832 million</td> <td>4.48 million</td> </tr> <tr> <td>Land Area (km²)</td> <td>9.60 million</td> <td>26.6 million</td> <td>700</td> </tr> </tbody> </table> <p>Using information from the table above,</p> <p>(a) find how many more people live in China than in Africa, giving your answer in standard form, [2]</p> <p>(b) calculate the average number of people per square kilometre living in Africa, [1]</p> <p>(c) express, in the form 1 : n, the ratio number of people living in Singapore : number of people living in China. [1]</p> <p style="text-align: right;">N09 I/21</p>				China	Africa	Singapore	Population	1.32 billion	832 million	4.48 million	Land Area (km ²)	9.60 million	26.6 million	700
	China	Africa	Singapore												
Population	1.32 billion	832 million	4.48 million												
Land Area (km ²)	9.60 million	26.6 million	700												
試題翻譯	<table border="1" data-bbox="427 1305 1337 1496"> <thead> <tr> <th></th> <th>中國</th> <th>非洲</th> <th>新加坡</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>人口</td> <td>13.2 億</td> <td>8.32 億</td> <td>448 萬</td> </tr> <tr> <td>國土面積 (平方公里)</td> <td>960 萬</td> <td>2660 萬</td> <td>700</td> </tr> </tbody> </table> <p>使用上方表格中的資訊回答下列問題：</p> <p>(a) 中國的人口比非洲的人口大約多幾人？(以科學記號表示)</p> <p>(b) 非洲平均每平方公里大約有多少人口？(以四捨五入取至小數點後第一位)</p> <p>(c) 新加坡與中國的人口比大約是多少？(以 1 : n 的格式表示，其中 n 以四捨五入取至整數位)</p>				中國	非洲	新加坡	人口	13.2 億	8.32 億	448 萬	國土面積 (平方公里)	960 萬	2660 萬	700
	中國	非洲	新加坡												
人口	13.2 億	8.32 億	448 萬												
國土面積 (平方公里)	960 萬	2660 萬	700												
試題詳解	<p>(a) $1320000000 - 832000000 = 488000000 = 4.88 \times 10^8$ (人)</p> <p>(b) $832000000 \div 26600000 \approx 31.3$ (人/平方公里)</p> <p>(c) $\because 1320000000 \div 4480000 \approx 295$ $\therefore 4480000 : 1320000000 \approx 1 : 295$</p>														

試題解析	<p>像這類取材自真實生活情境的題目，數據未經美化，在進行四則運算時，計算的難度或複雜度通常較高，當題目(主要)檢測的能力不是四則運算時，學生徒手作答可能會因為計算上的疏忽而答錯，以致於影響了該題的鑑別度(除非是採部分給分的計算題，看得到計算過程)；如果搭配計算機作答，則可避免這種狀況發生，較能反映學生是否真的理解概念。</p>
------	---

試題編號	A-02																		
試題原文	<p>3. Answer the whole of this question on a sheet of graph paper.</p> <p>A man stood at the top of a tower. He threw a ball vertically upwards. The height, h metres, of the ball above the top of the tower at a time t seconds after it was thrown is given by the formula $h = 22t - 4.9t^2$. The table below shows some values of t and the corresponding values of h, correct to 1 decimal place.</p> <table border="1" data-bbox="448 607 911 674"> <tr> <td>t</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>2.5</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> </tr> <tr> <td>h</td> <td>0.0</td> <td>17.1</td> <td>24.4</td> <td>24.4</td> <td>21.9</td> <td>9.6</td> <td>-12.5</td> <td>p</td> </tr> </table> <p>(a) Explain the significance of the value $h = -12.5$ when $t = 5$. [1]</p> <p>(b) Find the value of p. [1]</p> <p>(c) Using a scale of 2 cm to 1 second, draw a horizontal t-axis for $0 \leq t \leq 6$. Using a scale of 2 cm to 10 metres, draw a vertical h-axis for $-50 \leq h \leq 30$. On your axes, plot the points given in the table and join them with a smooth curve. [3]</p> <p>(d) Use your graph to find (i) the greatest height of the ball above the top of the tower, [1] (ii) the length of time for which the ball was more than 20 metres above the top of the tower. [2]</p> <p>(e) (i) By drawing a tangent, find the gradient of the graph at (4, 9.6). [2] (ii) Explain what your answer to (e)(i) tells you about the motion of the ball at $t = 4$. [1]</p> <p>(f) The ball hit the ground 5.4 seconds after it was thrown. Use your graph to find the height of the tower. [1]</p> <p style="text-align: right;">N02 II/10</p>	t	0	1	2	2.5	3	4	5	6	h	0.0	17.1	24.4	24.4	21.9	9.6	-12.5	p
t	0	1	2	2.5	3	4	5	6											
h	0.0	17.1	24.4	24.4	21.9	9.6	-12.5	p											
試題翻譯	<p>在方格紙上作答以下所有問題：</p> <p>一個人站在一座塔的頂端，他鉛直向上丟一顆球，假設那顆球被丟出t秒鐘後高於塔頂的高度為h公尺，且$h = 22t - 4.9t^2$，下表是一些t值與其對應的h值(取至小數點後第一位)。</p> <table border="1" data-bbox="448 1059 1318 1160"> <tr> <td>t</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>2.5</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> </tr> <tr> <td>h</td> <td>0.0</td> <td>17.1</td> <td>24.4</td> <td>24.4</td> <td>21.9</td> <td>9.6</td> <td>-12.5</td> <td>p</td> </tr> </table> <p>(a) 解釋當$t = 5$時，$h = -12.5$的意義。</p> <p>(b) 求 p 值。</p> <p>(c) 以 2 公分作為 1 秒的比例，畫一條以 $0 \leq t \leq 6$ 為範圍的水平 t 軸。以 2 公分作為 10 公尺的比例，畫一條以 $-50 \leq h \leq 30$ 為範圍的鉛直 h 軸。將上表中的各點畫在以 t、h 為兩軸的座標平面上，並以一條平滑曲線將它們連接。</p> <p>(d) 利用你所繪製的圖形求出下列數值： (i) 球高於塔頂時的最高高度 (ii) 球高比塔高超過 20 公尺時的總時間</p> <p>(e) (i) 透過畫一條切線，求出圖形在 (4, 9.6) 的斜率 (ii) 由上題的答案解釋球在 $t = 4$ 時的動作</p> <p>(f) 已知球在丟出 5.4 秒後落地，利用你所繪製的圖形求出塔高。</p>	t	0	1	2	2.5	3	4	5	6	h	0.0	17.1	24.4	24.4	21.9	9.6	-12.5	p
t	0	1	2	2.5	3	4	5	6											
h	0.0	17.1	24.4	24.4	21.9	9.6	-12.5	p											
試題詳解	<p>(a) 因為球被丟出t秒鐘後高於塔頂的高度為h公尺，所以當$t = 5$時，$h = -12.5$表示球在塔頂下方 12.5 公尺</p> <p>(b) 以$t = 6$代入$h = 22t - 4.9t^2$，得$h = 22 \cdot 6 - 4.9 \cdot 6^2 = 132 - 176.4 = -44.4$，故$p = -44.4$</p>																		


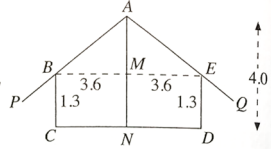
(c)



- (d) (i) 由圖形目測所得球高於塔頂時的最大高度約為 24.7 公尺
(ii) 由圖形目測得到 $h = 22t - 4.9t^2$ 與 $y = 20$ 之兩交點距離約為 1.9，故球高比塔高超過 20 公尺時的總時間約為 1.9 秒
- (e) (i) 過 $(4, 9.6)$ 作一條 $h = 22t - 4.9t^2$ 圖形的切線，其斜率約為 -16.9
(ii) 由上題的答案切線的斜率為負可知，球正往地上掉
- (f) 以 $t = 5.4$ 代入 $h = 22t - 4.9t^2$ ，得 $h = 22 \cdot 5.4 - 4.9 \cdot 5.4^2 = 118.8 - 142.884 = -24.084$ ，故塔高約為 24 公尺

試題解析

本題在求值時涉及小數的乘積，計算過程較為繁複，適合使用計算機取代徒手計算。在畫二次函數的圖形時，由於各點的座標包含小數，在題目給定的尺度上描點很難精確，且徒手畫出的圓滑曲線也可能不對稱或偏離正確的位置，以致於造成判讀上的誤差，因此只要題目(主要)檢測的能力不在於描點畫圖，便適合使用圖形式計算機畫二次函數的圖形輔助作答與判讀。

試題編號	A-03	
試題原文	<p>6. [The value of π is 3.142 correct to three decimal places.] [The area of the curved surface of a cone of radius r and slant height l is πrl. The volume of a cone is $\frac{1}{3} \times \text{base area} \times \text{height}$.]</p>  <p>Diagram I</p>  <p>Diagram II</p> <p>Diagram I shows a traditional hut which consists of a circular cylinder with an overhanging roof. The roof is the curved surface of a cone and is supported by a central vertical pole.</p>	<p>Diagram II shows a vertical cross-section of the hut. BE and CD are horizontal. $AN = 4.0$ m, $BM = ME = 3.6$ m and $BC = DE = 1.3$ m. (a) Show that $AB = 4.5$ m. [1] (b) Calculate (i) the volume of the inside of the hut, [3] (ii) the total surface area of the inside of the hut (including the floor). [4] (c) The sun is directly overhead. The shadow of the overhanging section of the roof on the ground is a circular ring around the hut. $AP = AQ = 5.5$ m. Calculate (i) PQ, [2] (ii) the area of the circular ring of shadow outside the hut. (Ignore the thickness of the walls.) [2] N02 II/9</p>
試題翻譯	<p>[圓周率的近似值 3.142 取到小數點後第三位] [底面圓半徑為r、斜高為l的圓錐之側面積為πrl，圓錐的體積為$\frac{1}{3} \times \text{底面圓面積} \times \text{高}$]</p> <p>圖一是傳統棚屋的示意圖，它是由一個圓柱與一個突出屋頂所組成。其屋頂的圖形是一個圓錐的側面，固定於一根鉛直方向的中央支柱。</p> <p>圖二是此棚屋鉛直方向的剖面圖。</p> <p>線段\overline{BE}和線段\overline{CD}皆為水平方向的線段。 $\overline{AN} = 4.0$公尺，$\overline{BM} = \overline{ME} = 3.6$公尺，且$\overline{BC} = \overline{DE} = 1.3$公尺</p> <p>(a) 說明$\overline{AB} = 4.5$公尺</p> <p>(b) 計算以下問題：</p> <p>(i) 棚屋內部的體積</p> <p>(ii) 棚屋內部的總表面積(包括地面)</p> <p>(c) 假設太陽在正上方，屋頂的地面陰影是一個環繞棚屋的環狀區域，$\overline{AP} = \overline{AQ} = 5.5$公尺，計算以下問題：</p> <p>(i) \overline{PQ}的長度</p> <p>(ii) 上述環狀區域的面積(牆壁的厚度忽略不計)</p>	
試題詳解	<p>(a) $\because \triangle ABM$是直角三角形，且$\overline{AM} : \overline{BM} = 2.7 : 3.6 = 3 : 4$ $\therefore \overline{AB} = 2.7 \div 3 \times 5 = 4.5$(公尺)</p> <p>(b) (i) $\frac{1}{3} \times \pi \times 3.6^2 \times 2.7 + \pi \times 3.6^2 \times 1.3$ $= 3.6^2 \times \pi \times 2.2$ $= 28.512 \times \pi$ $= 28.512 \times 3.142$</p>	

	$= 89.584704$ $\approx 89.6(\text{立方公尺})$ <p>(ii) $\pi \times 3.6 \times 4.5 + 2 \times \pi \times 3.6 \times 1.3 + \pi \times 3.6^2$</p> $= 3.6 \times \pi \times (4.5 + 2.6 + 3.6)$ $= 3.6 \times \pi \times 10.7$ $\approx 3.6 \times 3.142 \times 10.7$ $= 121.02984$ $\approx 121(\text{平方公尺})$ <p>(c) (i) 設\overline{PQ}交\overline{AN}於S點</p> <p>則$\overline{PS} : \overline{AP} = \overline{BM} : \overline{AB}$</p> $\therefore \overline{PS} : 5.5 = 3.6 : 4.5 = 4 : 5$ $\therefore \overline{PS} = 4.4$ $\therefore \overline{PQ} = 2\overline{PS} = 8.8(\text{公尺})$ <p>(ii) $\pi \times (4.4^2 - 3.6^2)$</p> $= \pi \times 8 \times 0.8$ $\approx 6.4 \times 3.142$ $= 20.1088$ $\approx 20.1(\text{平方公尺})$
試題解析	<p>在計算直角三角形的斜邊時，如果學生發現兩股的比為 3 : 4，則可利用比例關係立即求得斜邊，如果是利用畢氏定理求解，則在計算小數的平方與開方時應較為耗時，如果搭配使用計算機則可省去繁複的計算；在計算體積與表面積時，必須依照題目的設定，圓周率以近似值 3.142 計算，徒手計算三位小數的乘法運算時程序較多，容易計算錯誤，建議使用計算機進行這部分的計算。</p>

試題編號

A-04

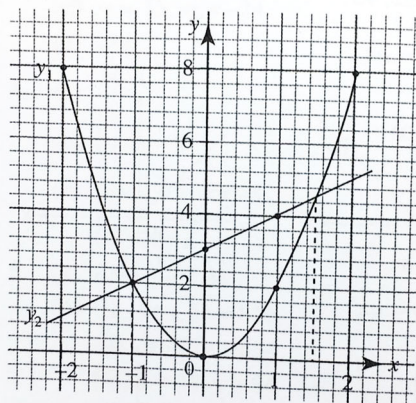
試題原文

x	-2	-1	0	1	2
y	8	2	0	2	8

Let $y_2 = x + 3$

x	-1	0	1
y	2	3	4

From the graph, $x = -1$ or 1.5



Worked Example 2

Solve $2x^2 - x - 3 = 0$ graphically.

By drawing a tangent, find the gradient of the curve where $x = 1$.

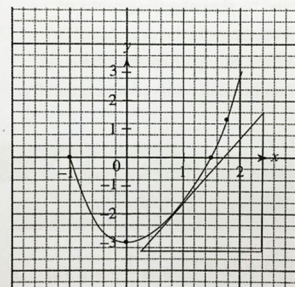
Solution:

Method 1

$y = 2x^2 - x - 3$

x	-1	0	1	2
y	0	-3	-2	3

From the graph, $x = -1$ or 1.5



the gradient at the point where $x = 1$ is $\frac{6}{2} = 3$.

Method 2

$2x^2 - x - 3 = 0$

$2x^2 = x + 3$

Let $y_1 = 2x^2$

試題翻譯

利用圖形求解 $2x^2 - x - 3 = 0$ 。

經由畫出切線求得圖形在 $x = 1$ 的切線斜率。

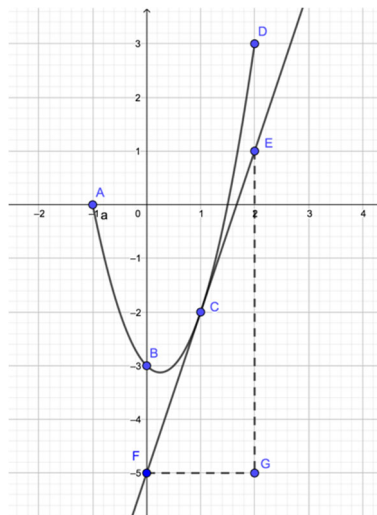
試題詳解

[解法一]

設 $y = 2x^2 - x - 3$

x	-1	0	1	2
y	0	-3	-2	3

由下圖可知 $y = 0$ 時， $x = -1$ 或 $x = 1.5$ 。圖形在 $x = 1$ 的切線斜率為 $6 \div 2 = 3$ 。



[解法二]

由 $2x^2 - x - 3 = 0$ 可得 $2x^2 = x + 3$

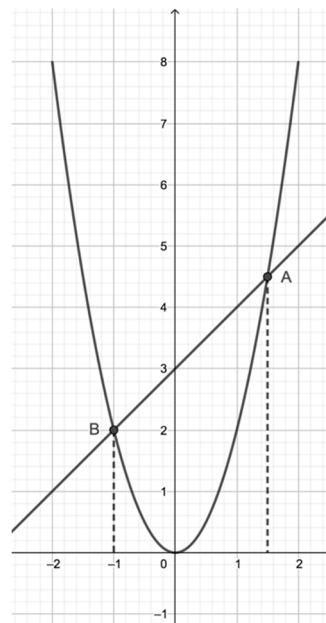
令 $y_1 = 2x^2$

x	-2	-1	0	1	2
y	8	2	0	2	8

$y_2 = x + 3$

x	-1	0	1
y	2	3	4

由下圖(兩圖形的交點)可知， $x = -1$ 或 $x = 5$ 。



試題解析

本題的兩種解法在徒手畫出二次函數的圖形後，以目測的方式得知圖形與 x 軸的交點，由於本題的設定為透過觀察直角坐標上的圖形求解方程式，當學生所畫的圖形誤差太大時，所觀察到的交點坐標也會偏離實際值(在解法一中如果描點時所找的 x 坐標為 -1 時，其 y 坐標為 0 ，剛好是交點之一，便不會發生上述的誤差)，除非本題檢核的只是學生是否理解概念與掌握操作過程，否則若能在計算機上畫出正確的圖形，觀察圖形的交點時將更為準確，甚至可讓計算機求得交點坐標，此外，在求切線斜率時計算機也能發揮相同的作用。

試題編號	A-05
試題原文	<p><i>Worked Example 5</i></p> <p>A polar explorer is planning an expedition. He investigates three possible routes.</p> <p>(a) If he travels on route A, which is 800 km long, he expects to cover x km per day. Route B, which is the same distance as route A, has more difficult ice conditions and he would only expect to cover $(x - 5)$ km per day. Route C, which is 100 km longer than route A, has easier conditions and he would expect to cover $(x + 5)$ km per day. Write down an expression, in terms of x, for the number of days that he expects to take on</p> <p>(i) route A, (ii) route B, (iii) route C.</p> <p>(b) He estimates that route C will take 20 days less than route B. Form an equation in x, and show that it reduces to $x^2 + 5x - 450 = 0$.</p> <p>(c) Solve the equation $x^2 + 5x - 450 = 0$, giving both answers correct to 1 decimal place.</p> <p>(d) Calculate the number of days that he expects to take on route A.</p> <p style="text-align: right;">N03 II/8</p>
試題翻譯	<p>一個極地探險家正計劃一場遠征。他調查到三條可行的路線。</p> <p>(a) 如果他行走總長 800 公里的路線 A，他預計每天行走 x 公里；如果他行走和路線 A 相同長度的路線 B，冰面的情況會更嚴峻，他預計每天行走 $(x - 5)$ 公里；如果他行走比路線 A 多 100 公里的路線 C，冰面的情況較簡易，他預計每天行走 $(x + 5)$ 公里。分別以 x 表示他挑戰的這三條路線所預計花費的天數。</p> <p>(b) 他估計行走路線 C 會比路線 B 少 20 天。列出 x 的方程式，並說明它可化簡為 $x^2 + 5x - 450 = 0$。</p> <p>(c) 解方程式 $x^2 + 5x - 450 = 0$，並將其兩解四捨五入至小數點後第一位。</p> <p>(d) 求路線 A 他預計花費的天數。</p>
試題詳解	<p>(a) 由「時間 = 距離 ÷ 速率」可得：</p> <p>(i) 路線 A 花費 $\frac{800}{x}$ 天</p> <p>(ii) 路線 B 花費 $\frac{800}{x-5}$ 天</p> <p>(iii) 路線 C 花費 $\frac{900}{x+5}$ 天</p> <p>(b) ∵ 行走路線 C 會比路線 B 少 20 天</p> $\therefore \frac{800}{x-5} - \frac{900}{x+5} = 20$ <p>化簡後可得 $20x^2 + 100x - 9000 = 0$ 即 $x^2 + 5x - 450 = 0$</p> <p>(c) $x^2 + 5x - 450 = 0$ 的解為 $x = \frac{-5 \pm 5\sqrt{73}}{2}$</p> <p>即 $x \approx 18.86$ 或 $x \approx -23.86$ 將此兩解四捨五入至小數點後第一位得 $x = 18.9$ 或 $x = -23.9$</p>

	<p>(d) 因為預計以每天行走x公里的速率完成路線 A 故由(c)可知$x \approx 18.86$ (負不合) $800 \div 18.86 \approx 42.4$ 所以行走路線 A 預計花費 42.4 天</p>
<p>試題解析</p>	<p>一直以來我們看到的一元二次方程式應用問題，雖然總有一個生活情境，但命題者為了求解時容易計算或是可以使用十字交乘法因式分解，常會將題目設計成解為整數，使得答案過於美化，和真實生活中未經修飾與調整的數值相差甚遠。在本題的情境中，一元二次方程式的解為$x = \frac{5\sqrt{73}-5}{2}$，行走路線 A 預計花費$\frac{40\sqrt{73}+40}{9}$天，其數值應該比較貼近事實，然而如果讓學生以最簡根式回答，難以對其數量有感，且與情境格格不入，因此若能使用計算機作答，便可讓學生以小數回答其近似值，能從答案直接得知有意義的資訊；以本題為例，經過列式與求解可以得知，極地探險家預計以每天行走 18.9 公里的速率完成路線 A，共花費 42.4 天。</p> <p>在求解一元二次方程式的應用問題時，如果能夠允許學生使用計算機作答，命題時將更不受限，甚至能使用從生活情境中測得的真實數據，讓學生實地體驗生活中的數學應用，並認識其中相關的數與量。</p>

試題編號	A-06
試題原文	<p>2. (a) (i) A car uses 15.75 litres of fuel to travel a distance of 250 km. Giving your answer in litres per 100 km, calculate the fuel consumption of the car.</p> <p>(ii) Anne's car has a fuel consumption of 8.2 litres per 100 km.</p> <p>(a) Calculate the distance she can travel on a full tank of 60 litres.</p> <p>(b) Petrol costs \$1.65 per litre. Calculate how much, correct to the nearest cent, the petrol will cost Anne for a journey of 120 km.</p> <p>(b) Ben inherits some money. He divides the money between education, holiday and savings in the ratio 3 : 4 : 5 respectively.</p> <p>(i) He puts \$1000 into savings. Calculate the total amount of money he inherits.</p> <p>(ii) He puts the \$1000 savings into an account paying compound interest of 3.5% per annum. Calculate the total amount of money, correct to the nearest cent, in his account after 5 years.</p>
試題翻譯	<p>(a)(i)已知一部車行走 250 公里消耗汽油 15.75 公升，計算這部車每 100 公里的汽油消耗量。</p> <p>(ii)已知<u>安妮</u>的車每 100 公里的汽油消耗量為 8.2 公升：</p> <p>(a) 計算當她的車(油箱 60 公升)加滿油時可行走的距離。</p> <p>(b) 假設每公升汽油 1.65 美元，計算<u>安妮</u>一趟 120 公里的旅程所花費的金額(四捨五入到小數點後第二位)</p> <p>(b)<u>班</u>繼承了一筆錢。他將這筆錢的用途分為教育、度假與儲蓄三個部分，其佔比為 3 : 4 : 5。</p> <p>(i)已知他用於儲蓄的金額為 1000 美元，計算他所繼承的錢之總金額。</p> <p>(ii)如果他的 1000 美元存款每年以 3.5%複利計息，計算這筆存款 5 年後的金額(四捨五入到小數點後第二位)。</p>
試題詳解	<p>(a)(i) $15.75 : 250 = x : 100$ $x = 6.3$ (公升/100 公里)</p> <p>(ii) (a) $8.2 : 100 = 60 : a$ $a \approx 732$ (公里)</p> <p>(b) $8.2 : 100 = b : 120$ $b = 9.84$ $9.84 \times 1.65 = 16.24$ (美元)</p> <p>(b)(i) $1000 \times \frac{3+4+5}{5} = 2400$ (美元)</p> <p>(ii) $1000 \times (1 + 0.035)^5 \approx 1187.69$ (美元)</p>
試題解析	<p>本題的(a)小題情境非常生活化，不論是汽車的油耗、加滿油的行車距離或是行駛預設距離所花費的油錢，都是生活中常見的行車資訊，因此數據應該都是未經設計的，其中油耗量與油錢的單位分別是公升與美元，會出現小數點後兩位數的數值，在進行小數的乘法與除法運算時宜搭配使用計算機。</p> <p>本題的(b)小題涉及複利計算，如果沒使用計算機，必須處理</p>

	<p>小數點後三位數的連乘，非常費時費力，因此命題者應是設定學生使用計算機進行次方的運算。</p> <p>以上(a)小題的油耗問題，一般市面上汽車的行車電腦會計算出相關資訊，(b)小題的複利問題，金融機構的資訊設備也會自動計算</p>
--	---

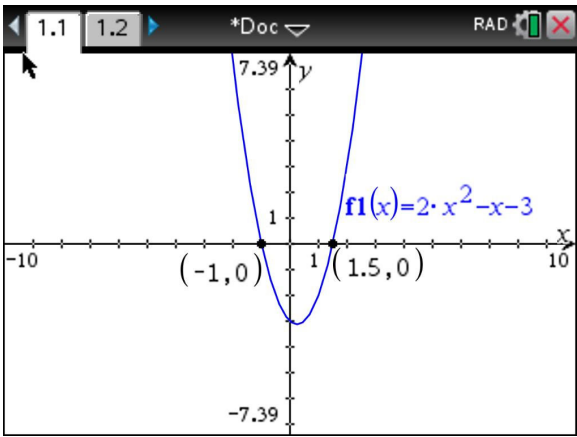
使用計算機的數學評量試題研究成果

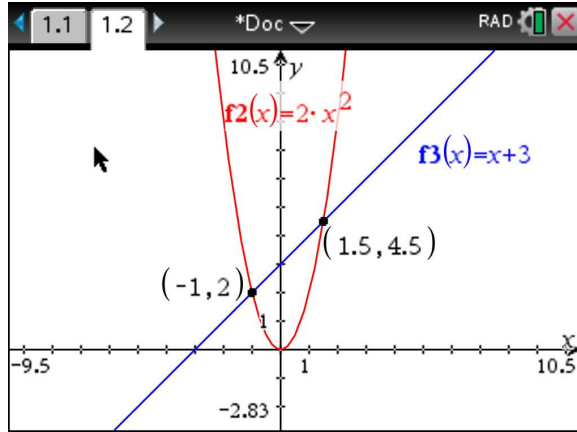
李記萱 老師

臺北市立濱江國民中學

試題編號	B-01
試題原文	<p>The population of Europe is approximately 7.0×10^8</p> <p>The population of Asia is approximately 3.5×10^9</p> <p>The mean mass of the population of Europe is approximately 62 kg.</p> <p>(a) Giving your answers in standard form, estimate</p> <p>(i) the total mass of the population of Europe.</p> <p>(ii) how many more people live in Asia than in Europe.</p> <p>(b) Express the population of Europe as a percentage of the population of Asia.</p>
試題翻譯	<p>歐洲的人口大約有 7.0×10^8 人，亞洲人口大約有 3.5×10^9 人</p> <p>歐洲人口的平均體重大約是62公斤。</p> <p>(a) 請估計，</p> <p>(i) 歐洲人口的總重量</p> <p>(ii) 居住在亞洲的人口總數比歐洲人多多少？</p> <p>(b) 請求出歐洲人口占亞洲人口總數的百分比</p>
試題詳解	<p>(a) (i) 歐洲人口的總重量 = 歐洲的人口 * 歐洲人口的平均體重</p> $= 7.0 \times 10^8 * 62 = 4.34 \times 10^{10} \text{ kg}$

	<p>(ii)多多少？減法</p> $= 3.5 \times 10^9 - 7.0 \times 10^8 = 2.8 \times 10^9 \text{ 人}$ <p>(b) 比：除法的概念</p> <p>= 歐洲人口/亞洲人口</p> $= \frac{7.0 \times 10^8}{3.5 \times 10^9} * 100\% = 20\%$
<p>試題解析</p>	<p>現實生活中的數字往往無法像考試題目為了配合計算方便而把數字設計的很完美，但在教學經驗連結中，有一個很重要的部分是與過往的生活經驗連結，像本題中的人口數其實是有機會在社會課或是新聞中聽到的，所以這樣的出題方式也較貼近現實生活以及對於真實世界的了解也多了一層。</p>

試題編號	B-02
試題原文	Solve $2x^2-x-3$ graphically. By drawing a tangent, find the gradient of the curve where $x = 1$
試題翻譯	請圖解 $y = 2x^2-x-3$ 函數 通過繪製切線，找到曲線當 $x = 1$ 的梯度(斜率)
試題詳解	<p>觀察一：(圖解)</p> <p>利用計算機輸入函數，並產生圖形，認識相關名詞如： 截距、與x軸交點、與y軸交點、開口方向、最大值、最小值及值域的變化</p> <p>利用計算機看到圖形的細節</p> <p>觀察二：(圖解)</p> <p>利用二函數相減的方式觀察圖形</p> <p>第一個函數為：$y=2x^2$</p> <p>第二個函數為：$y=x+3$</p> <p>$y=2x^2-(x+3)$</p> <p>同時畫出二個函數，與$y = 2x^2-x-3$作連結</p> <p>使用計算機找交點，可以比較和 $y = 2x^2-x-3$的關係</p> <p>→ 二函數交點即原函數與x軸的交點</p> 



延伸：

利用 $y = ax^2 + bx + c$ 代入變數，看看 a, b, c 的大小、正負對二次函數的影響。

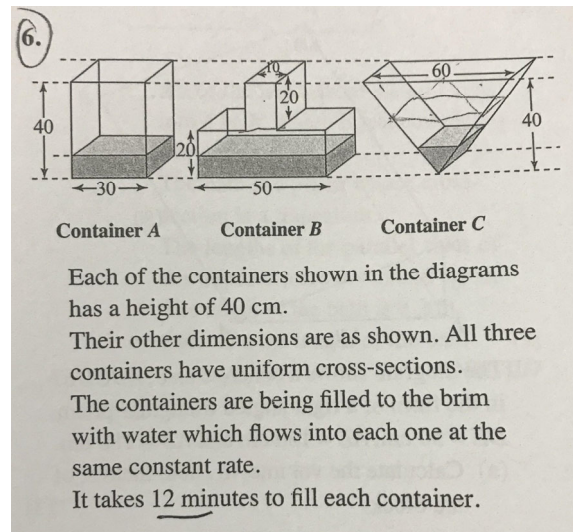
試題解析

使用計算機之後，題目的設計與現實生活較符合，而不會流於配合手寫計算而特別設計數值，計算機可以跳過不好看的數字，僅以觀念的方式求解，但不代表計算能力就要被取代，只是，不會再像以往訓練下的考生那麼快速，敏感，計算機也只不過協助我們處理複雜的計算，並不是幫助我們解題或是列方程式，所以計算能力強並不是絕對，而且，在某些真實情境之下，用計算機計算也較可以計算的比較精準，在函數圖形中也比較容易看到變化的趨勢而不是單單手算算出一個值，而沒有圖形的感覺。

試題編號

B-03

試題原文



Each of the containers shown in the diagrams has a height of 40 cm.

Their other dimensions are as shown.

All three containers have uniform cross-sections.

The containers are being filled to the brim with water which flows into each one at the same constant rate. It takes 12 minutes to fill each container.

(a) Find the time taken for the water to reach a depth of 20 cm in

(i) container B

(ii) container C

(b) A graph is drawn showing the relationship between the depth of the water, d cm, and the time, t minutes, as each container is being filled. The graph shown in the answer space is that for container A. On the same diagram, sketch the graph for

(i) container B

(ii) container C

試題翻譯

圖中所示的每個容器的高度為40厘米。其他尺寸如圖所示。所有三個容器具有相同的橫截面。容器用水填充到邊緣，水以相同的固定速率倒入每個容器。每個容器均需要12分鐘，

(a)找出容器B及容器C的水到達20厘米深度所需的時間？

	<p>(b)繪製一個圖表，顯示水的深度 d 公分與每個容器填充的時間 t 分鐘之間的關係。下圖顯示的圖表是容器A的圖表。在同一圖表中，請畫出容器B 及容器C的曲線</p>
<p>試題詳解</p>	<p>假設三個容器的長為a，則：</p> <p>A容器的體積為：$40 \times 30 \times a$</p> <p>B容器的體積為：$50 \times 20 \times a + 20 \times 10 \times a$</p> <p>C容器的體積為：$\frac{60 \times 40}{2} \times a$</p> <p>三個容器均為12分鐘後注滿水，故：</p> <p>注水速率 = $\frac{\text{A容器的體積}}{\text{時間}} = \frac{40 \times 30 \times a}{12} = 100(\text{cc/min})$</p> <p>(a) 找出容器B及容器C的水到達20厘米深度所需的時間？</p> <p>容器B：$\frac{50 \times 20 \times a}{100 a} = 10(\text{min})$</p> <p>容器C：先利用相似三角形找出深20cm時的水面寬度</p> <p>$60 : 40 = \text{水面寬度} : 20$</p> <p>可以得到水面寬度 = 30cm</p> $\frac{30 \times 20 \times a}{2} \times \frac{1}{100 a} = 3(\text{min})$ <p>(b) 繪製圖表：</p> <p>A容器的形狀沒有改變，截面積都相等，故注水速率和水面上升速度相等，全程為固定斜率等於$\frac{10}{3}$的直線，從原點出發一直到時間等於12分鐘，水深等於40cm。</p> <p>B容器在20cm處上與下為二種形狀，在二個不同的形狀中，截面積並沒有隨著時間改變，所以上升曲線為二個不同斜率的直線連結點在時間等於10分鐘處，第一段直線的斜率為2，第二段的斜率為10。</p> <p>C容器先利用相似形得到底和高的倍數關係：</p> <p>$w : h = 60 : 40$</p>

$$w = \frac{3}{2}h$$

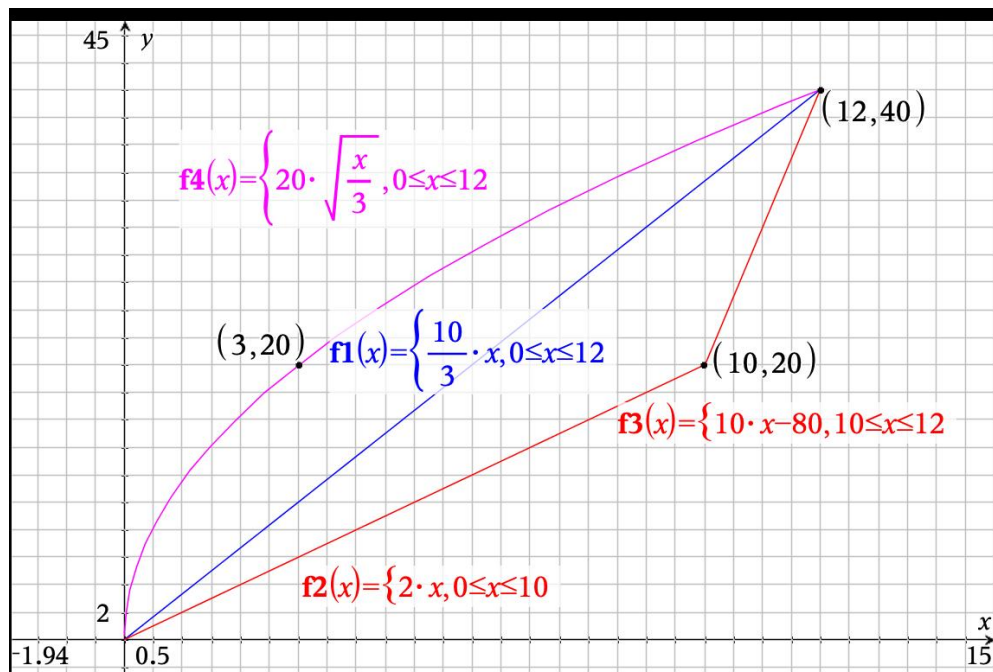
C容器的體積以h表示的函數為： $\frac{3}{2}h \times h \times \frac{1}{2} \times \alpha = \frac{3\alpha}{4}h^2$

把體積 / 注水速率即可得到 高度(h)對時間(t)的關係

$$\frac{3\alpha}{4}h^2 \times \frac{1}{100\alpha} = t$$

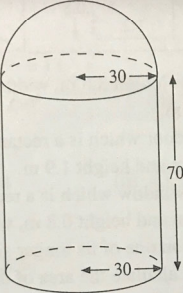
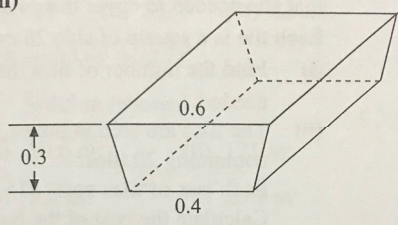
$$h^2 = \frac{400}{3}t$$

$$h = 20 \times \sqrt{\frac{t}{3}} \quad (\text{指數圖形})$$

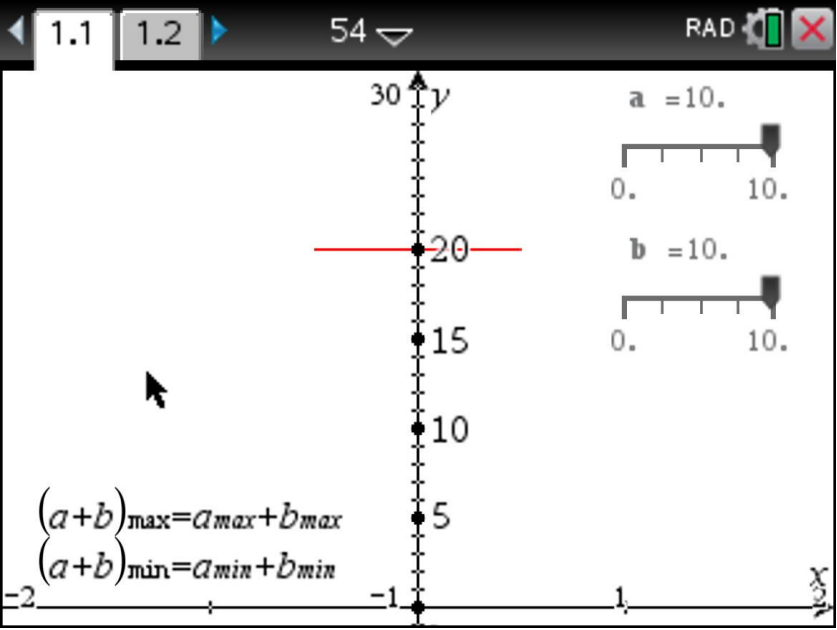


試題解析

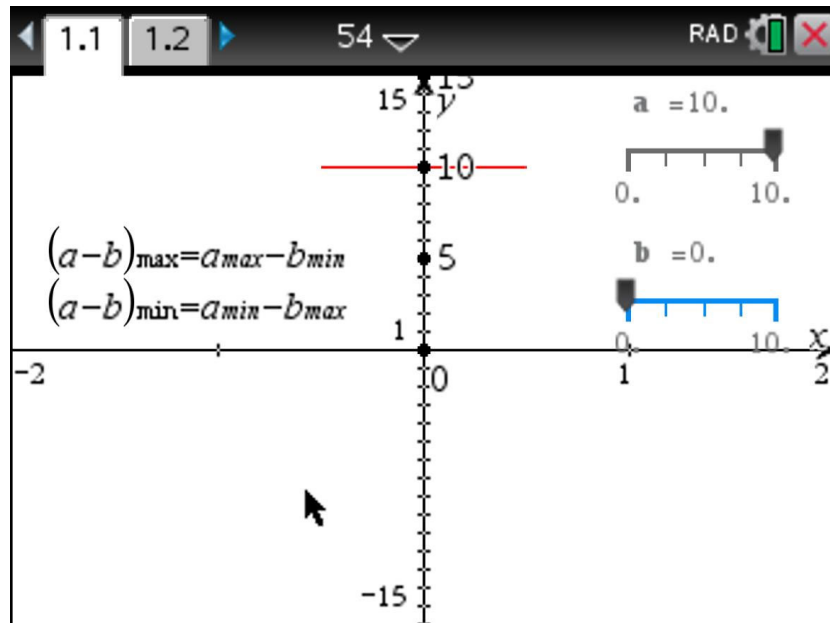
在相同體積、相同注水速率的條件下，水面上升高度會因形狀不同而有所改變，透過繪圖計算機輸入自己推導出來的函數時，可以更清楚的看到水面上升的變化情形，而不是只是覺變快、變慢等抽象感覺，甚至可以利用圖表預估第幾分鐘會上升至多高的高度來執行真實的實驗做比對。

試題編號	B-04
試題原文	<p>4. [Surface area of a sphere = $4\pi r^2$] [Volume of a sphere = $\frac{4}{3}\pi r^3$]</p> <p>A hot water tank is made by joining a hemisphere of radius 30 cm to an open cylinder of radius 30 cm and height 70 cm.</p>  <p>(a) Calculate the total surface area, including the base, of the outside of the tank. [4]</p> <p>(b) The tank is full of water.</p> <p>(i) Calculate the number of litres of water in the tank. [3]</p> <p>(ii) The water drains from the tank at a rate of 3 litres per second. Calculate the time, in minutes and seconds, to empty the tank. [2]</p> <p>(iii)</p>  <p>All of the water from the tank runs into a bath, which it just completely fills.</p> <p>The bath is a prism whose cross-section is a trapezium.</p> <p>The lengths of the parallel sides of the trapezium are 0.4 m and 0.6 m.</p> <p>The depth of the bath is 0.3 m.</p> <p>Calculate the length of the bath. [3]</p> <p style="text-align: right;">N06 II/7</p>
試題翻譯	<p>熱水箱是由半徑為30mm的半球型連接到半徑為30mm，高度為70mm的空心圓柱體製成的。</p> <p>(a) 計算水箱外部及底部總表面積。</p> <p>(b) 當水箱裝滿水</p> <p>(i) 計算水箱中的水有多少</p> <p>(ii) 若是以每秒3公升的速率將水從水箱中排出，請問全部排出要花多少時間？</p> <p>(iii) 水箱所有的水流入一個浴缸並將其完全充滿，這個浴缸的截面是梯形，它的</p> <p style="padding-left: 40px;">上底是0.6公尺，下底是0.4公尺，高是0.3公尺，試求長度為多少？</p>
試題詳解	<p>總表面積 = 上方一半球體表面積 + 下方圓柱體表面積 + 底部表面積</p>

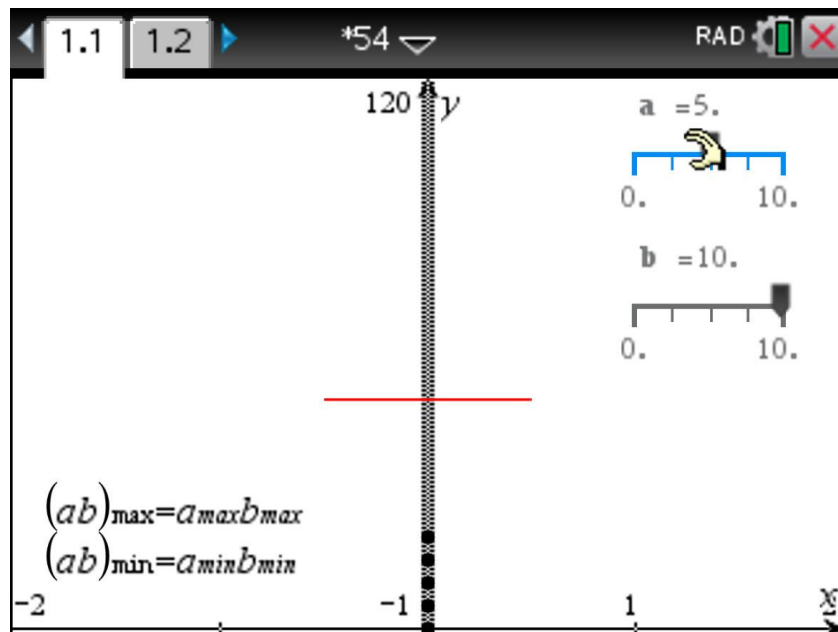
	$A(30)=6900\pi\approx 21700\text{cm}^2$ <p>(i) 總體積</p> $V(r)=\frac{4}{3}\pi r^3\times\frac{1}{2}+\pi r^2\times 70$ <p>$V(30)=81000\pi\approx 254469\text{cm}^3$ 約可裝254000cc的水，等於254公升</p> <p>(ii) $254/3 = 84.6$，所以需花85秒(1分25秒)可全部排光。</p> <p>(iii) 利用梯形的體積 = 254000cm^3 求長度</p> $\frac{(60+40)}{2}\times 30\times \text{長度} = 254000$ <p>長度=169.33cm=170cm</p>
<p>試題解析</p>	<p>題目一開始是以球與圓做為開頭，在計算上免不了一定會使用 π，在紙本計算通常會為了格式清楚或是答案簡潔，呈現的答案會是 $\text{xxx}\pi$，但是在有計算機的輔助下，除了可以顯示 π 之外，還可以乘開求出實際的數字，也可以提升答案的準確度。</p> <p>在教學上，可以讓學生練習從文字列式，列方程式再代入變數求解，更可以利用圖形看半徑對表面積或體積的變化。</p>

試題編號	B-05
試題原文	<p style="text-align: center;">Linear inequalities with one variable</p> <p style="text-align: center;">Greatest and smallest values</p> <p>If $a \leq x \leq b$, and $c \leq y \leq d$ where $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$, then $x_{\min} = a$ and $x_{\max} = b$.</p> <p>(i) $(x + y)_{\max} = x_{\max} + y_{\max}$ $(x + y)_{\min} = x_{\min} + y_{\min}$</p> <p>(ii) $(x - y)_{\max} = x_{\max} - y_{\min}$ $(x - y)_{\min} = x_{\min} - y_{\max}$</p> <p>(iii) $(xy)_{\max} = x_{\max} y_{\max}$ $(xy)_{\min} = x_{\min} y_{\min}$</p> <p>(iv) $\left(\frac{x}{y}\right)_{\max} = \frac{x_{\max}}{y_{\min}}$ $\left(\frac{x}{y}\right)_{\min} = \frac{x_{\min}}{y_{\max}}$</p>
試題翻譯	a,b,c,d均為正實數，x介於a，b之間，y介於c，d之間，請找出下列式子的關係
試題詳解	<p>i. 相加關係</p> 

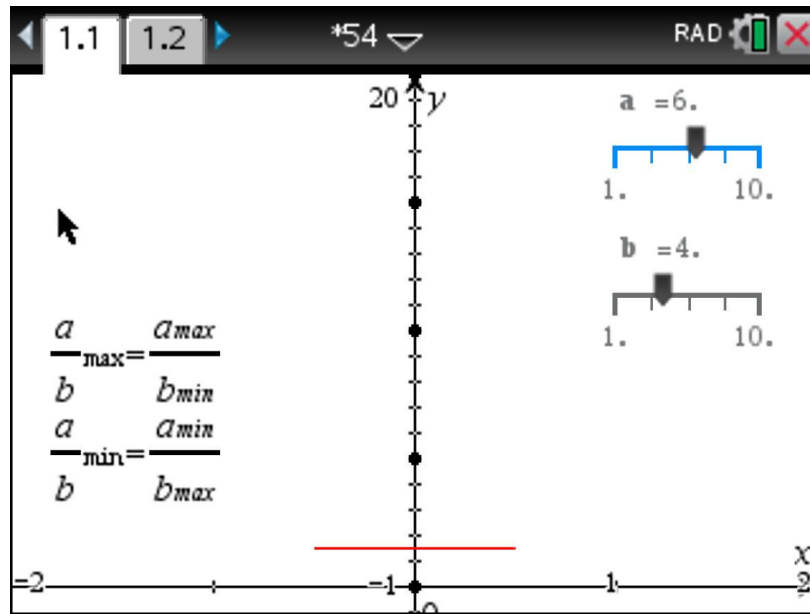
ii. 相減關係



iii. 相乘關係



iv. 相除關係



試題解析

利用滑桿功能快速取得a、b的值，透過紅色線條可以觀察經過計算後的結果，並且歸納出最大與最小值發生的位置，
 如果可以在紅色線條加上動態數值以及紅色線條經過的區間，則可以讓這個教學過程更完善。

試題編號

B-06

試題原文

1. Answer the whole of this question on a sheet of graph paper.

The variables x and y are connected by the equation

$$y = \frac{1}{10} \left(60 - x^2 - \frac{80}{x} \right).$$

Some corresponding values of x and y , correct to 2 decimal places, are given in the table below.

x	1	1.5	2	3	4	5	6
y	-2.10	0.44	1.60	2.43	2.40	1.90	p

✓(a) Calculate the value of p . [1]

(b) Using a scale of 2 cm to represent 1 unit on each axis, draw a horizontal x -axis for $1 \leq x \leq 6$ and a vertical y -axis for $-3 \leq y \leq 3$.

On your axes, plot the points given in the table and join them with a smooth curve. [3]

(c) Use your graph to find the values of

x in $1 \leq x \leq 6$ for which

$$\frac{1}{10} \left(60 - x^2 - \frac{80}{x} \right) = 2. \quad [2]$$

(d) By drawing a tangent, find the gradient of the curve at $(1.5, 0.44)$. [2]

✓(e) Use your graph to find the largest value of y in $1 \leq x \leq 6$ and the value of x for which this occurs. [2]

N09 II/6

試題翻譯

x 和 y 的關係如下列方程式：

$$y = \frac{1}{10} \left(60 - x^2 - \frac{80}{x} \right)$$

表格是 x 與 y 相對應的值

a. 請計算出 p 的值

b. 請以一單位/2公分的方式畫出曲線圖，其中 x 的範圍是 $1 \leq x \leq 6$ ， y 的範圍是 $-3 \leq y \leq 3$ ，再利用上面表格的點逐步畫出平滑曲線

c. 利用曲線及 x 的範圍找到符合下列式子的 x 值：

$$\frac{1}{10}(60-x^2 - \frac{80}{x})=2$$

- d. 試著在點(1.5,0.44)畫出切線，並求出此點的斜率
- e. 請利用你畫出的圖形找出當x的範圍是 $1 \leq x \leq 6$ 時，y的最大值及產生y的最大值的x值

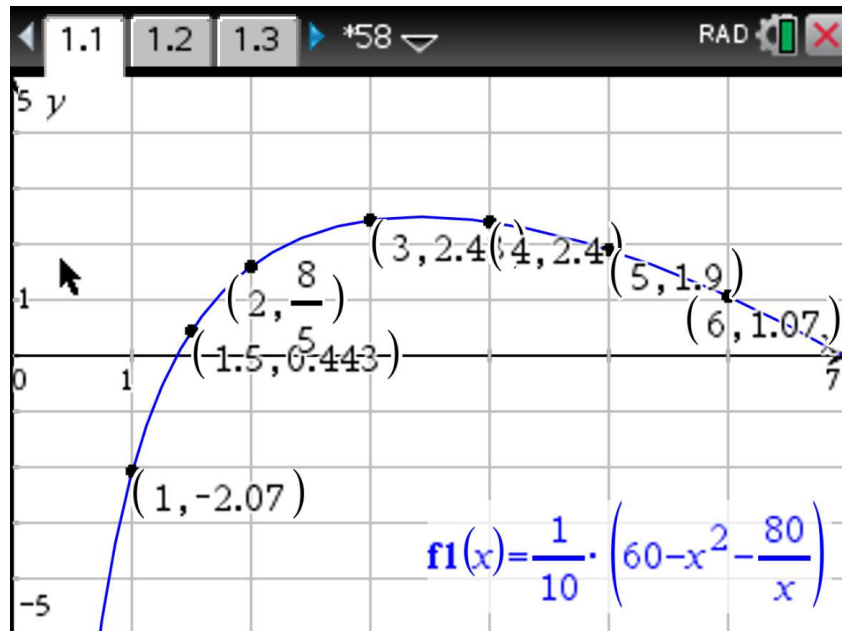
試題詳解

- a. 把x等於6代入方程式：

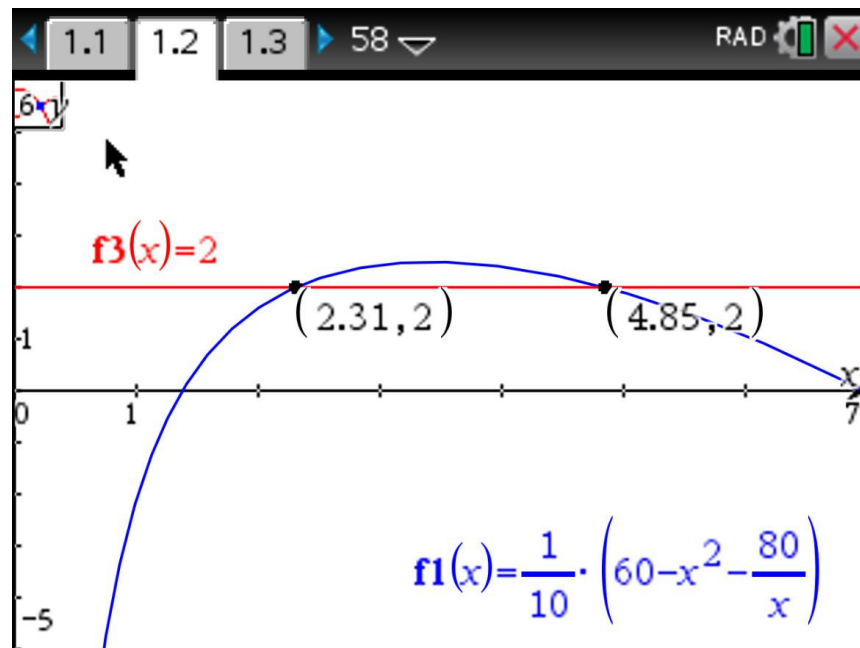
$$y = \frac{1}{10}(60-x^2 - \frac{80}{x})$$

可得y的值為 $1.06666 \approx 1.07$

- b. 把方程式輸出到計算機內並加入點

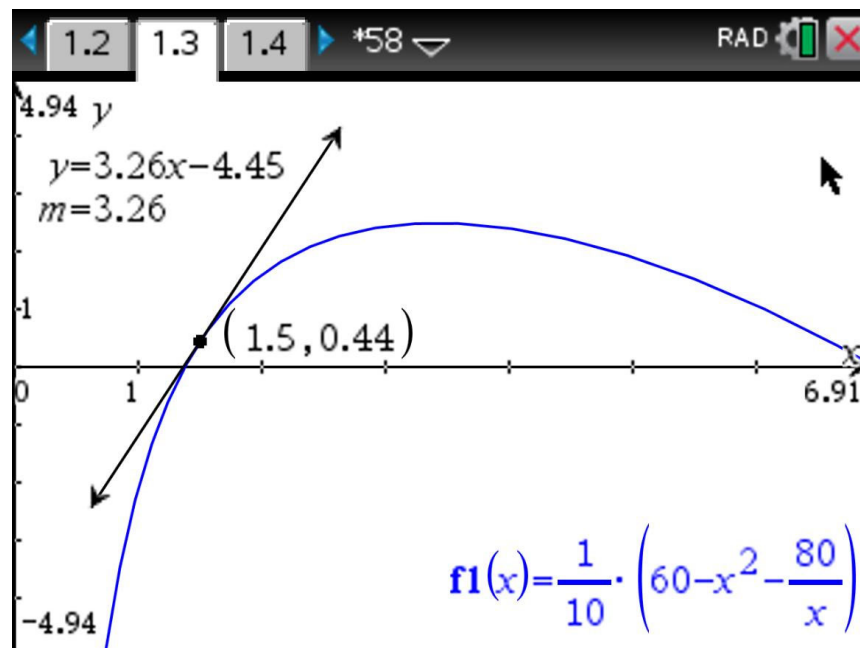


c. 利用直線 $y=2$ 與曲線的交點求出當曲線 y 等於 2 時的 x 值

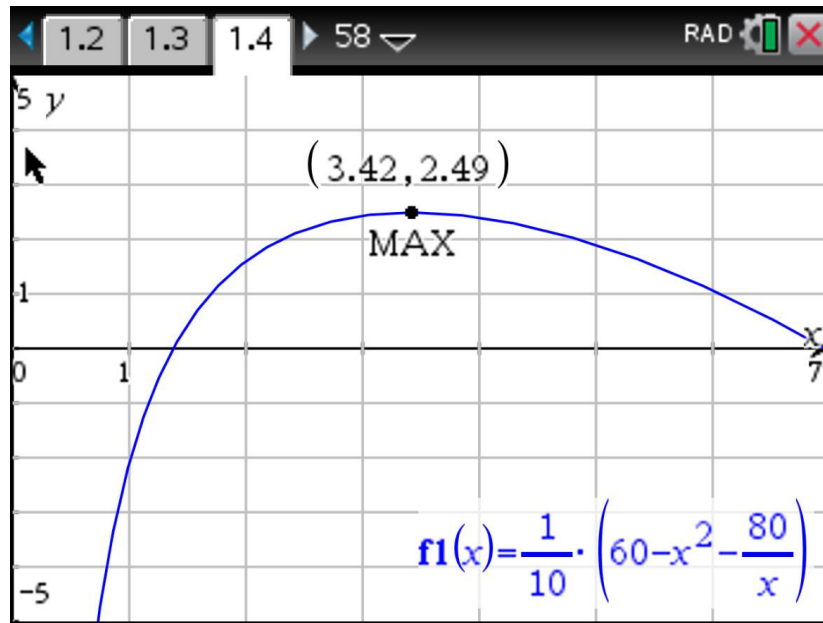


d. 利用功能：Geometry >> 1.Points & Lines >> 7.Tangent

找出在點 $(1.5, 0.44)$ 的切線與斜率，斜率等於 3.26



e. 利用計算機的分析功能並給定範圍找出圖形的最大值



試題解析

在國中函數圖形試題比較多變化的單元是二次函數，從正規的解析二次函數中，可以得到我們想求的值，但當數字不友善或是函數結構太複雜的時候，利用計算機一樣可以運用相同的觀念及工具得到相同的效果，只是在教學的觀念養成上，還是必須建立學生對於函數圖形的概念。當學生處理熟悉的函數圖形時，自然比較知道該去處理哪些訊息；但處理未知的函數圖形的時候，甚至不會計算也沒有關係，因為有了計算機的輔助，我們一樣可以帶學生討論函數圖形的遞增、遞減、極值位置，甚至做一個預測，以建立學生對於函數圖形的感覺。

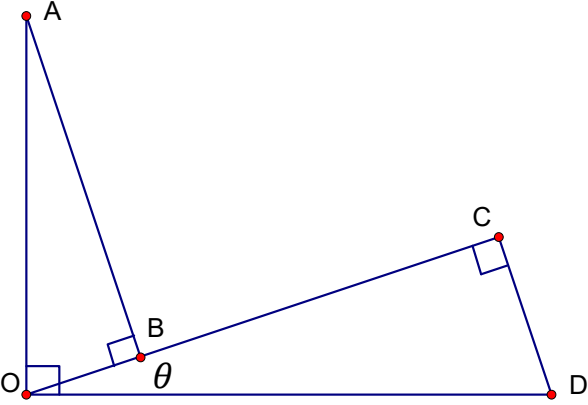
使用計算機的數學評量試題研究成果

賴政泓 老師

國立政治大學附屬高級中學

試題編號	C-01
試題原文	<p>A trader bought some paraffin for \$500.He paid \$$x$ for each litre of paraffin.</p> <p>(a) Find,in terms of x,an expression for the umber of litres he bought.</p> <p>(b) Due to a leak,he lost 3 litres of paraffin.He sold the remainder of the paraffin for \$1 per litre more than he paid for it.Write down an expression ,in terms of x,for the sum of money he received.</p> <p>(c) He made a profit of \$20. (I)Write down an equation in x to represent this information ,and show that it reduces to $3x^2 + 23x - 500 = 0$. (II)Slove the equation $3x^2 + 23x - 500 = 0$, giving both answers correct to one decimal place.</p> <p>(d) Find,correct to the nearest whole number,how many litres of paraffin he sold.</p>
試題翻譯	<p>有一位商人購買煤油，以每公升 x 元的價格，共買了 500 元。</p> <p>(a) 此商人買了多少公升的煤油，試以 x 表示。</p> <p>(b) 因為油桶有裂縫的關係，商人損失了 3 公升的煤油。他以當初購買煤油每公升的價格，再多 1 元為售價，賣出所剩下的煤油。請以 x 表示他所得到的錢。</p> <p>(c) 已知他總共獲利 20 元， (I)依上述條件，寫出 x 的方程式，並將其化簡為 $3x^2 + 23x - 500 = 0$。 (II)解方程式 $3x^2 + 23x - 500 = 0$，且準確至小數點後第一位。</p> <p>(d) 此商人總共賣了多少公升的煤油，答案以最接近的整數表示之。</p>

<p>試題詳解</p>	<p>(a) $\frac{500}{x}$ 。</p> <p>(b) $\left(\frac{500}{x} - 3\right)(x + 1)$ 。</p> <p>(c) (I) $\left(\frac{500}{x} - 3\right)(x + 1) = 520$ 。</p> <p>(II)(1)公式解：$x = \frac{-23 \pm \sqrt{6529}}{6} \rightarrow x \approx 9.6, -17.3$ 。</p> <p>(2)計算機直接解方程式。</p> <p>(d) 共賣 $\frac{500}{9.6} - 3 \approx 49.08$ 公升，答案為 49 。</p>
<p>試題解析</p>	<p>評量目標： 能利用未知數列出符合題意的式子並解出答案，必要時使用計算機得到近似值。</p> <p>試題分析： 本題包括閱讀理解、情境與數學的轉換、解題與計算機的應用。其中計算機的使用能在出題時與生活情境更貼切，以往不利於計算的數據也因此受限更少。</p>

試題編號	C-02
試題原文	<p>The diagram shows three fixed points O,A and D such that $OA=17$ cm,$OD=31$ cm and $\angle AOD=90^\circ$.The lines AB and DC are perpendicular to the line OC which makes an angle θ with the line OD.The angle θ can vary in such a way that the point B lies between the points O and C.</p> <p>(1)Show that $AB+BC+CD=(48\cos\theta + 14\sin\theta)$ cm.</p> <p>(2)Find the values of θ for which $AB+BC+CD=49$ cm.</p> <p>(3)State the maximum value of $AB+BC+CD$ and the corresponding value of θ.</p> 
試題翻譯	<p>如圖，O、A 和 D 為平面上三個定點，且 $\overline{OA} = 17$ 公分，$\overline{OD} = 31$ 公分，$\angle AOD = 90^\circ$。設 \overline{OC} 與 \overline{OD} 的夾角為 θ，且 \overline{AB}、\overline{DC} 皆分別與 \overline{OC} 垂直。θ 角會隨著 B 點在 \overline{OC} 上位置的不同而改變。</p> <p>(1) 試說明 $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = 48\cos\theta + 14\sin\theta$ 公分，</p> <p>(2) 若 $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = 49$ 公分，試求 θ 的值，</p> <p>(3) 試求 $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}$ 的最大值與此時 θ 的值。</p>
試題詳解	<p>(1) $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = 17\cos\theta + (31\cos\theta - 17\sin\theta) + 31\sin\theta$ $= 48\cos\theta + 14\sin\theta$</p> <p>(2) $48\cos\theta + 14\sin\theta = 49$</p>

	$\Rightarrow \alpha + \theta = \sin^{-1}(0.98) \text{ 或 } 180^\circ - \sin^{-1}(0.98)$ $\Rightarrow \alpha + \theta = 78.5217^\circ \text{ 或 } 101.4783^\circ$ $\Rightarrow \theta = 4.7819^\circ \text{ 或 } 27.7385^\circ$ <p>(3) $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = 50 \left(\frac{48}{50} \cos\theta + \frac{14}{50} \sin\theta \right)$</p> $= 50 \sin(\alpha + \theta) \text{ , 其中 } \alpha = \sin^{-1}(0.96) = 73.7398^\circ$ <p>當 $\sin(\alpha + \theta) = 1$ 時, $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = 50$ 為最大值</p> <p>此時 $\alpha + \theta = 90^\circ \Rightarrow \theta = 90^\circ - 73.7398^\circ = 16.2602^\circ$</p>
試題解析	<p>評量目標： 正、餘弦的意義與應用，正、餘弦函數的疊合，計算機上反三角函數鍵的使用</p> <p>試題分析： 此種題型在計算機的應用之下，數據的設計不再需要特別角的情況。而反三角函數鍵的使用，讓學生在三角函數及其相關問題時，更能有感的學習。</p>

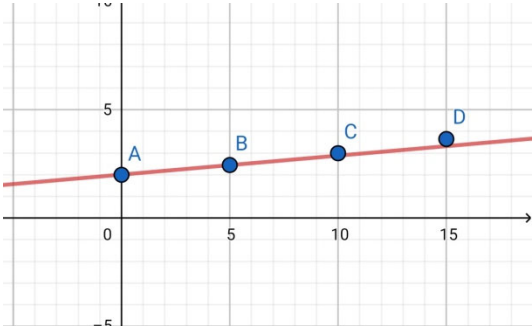
試題編號	C-03
試題原文	<p>Jane and William saved some money over a number of years.</p> <p>(a) On 1 May 1998 Jane opened an account by investing \$900 into the account.</p> <p>(1) Show that the total sum in the account immediately after this is \$1854.</p> <p>(2) On 1 May 2000 she invested a further \$900.</p> <p>Find the sum of money in the account immediately after this.</p> <p>(3) She made a final investment of \$900 into the account on 1 May 2001.</p> <p>She withdrew all of the money in the account on 1 May 2002.</p> <p>Find, correct to the nearest cent, the sum of money she withdrew.</p> <p>(b) On 1 May 1998 William invested \$900 for 4 years at 6% per annum simple interest.</p> <p>(1) Calculate the interest he received on his investment.</p> <p>(2) He invested another \$900 for 3 years at 6% per annum simple interest on 1 May 1999, then \$900 for 2 years at 6% per annum simple interest on 1 May 2000, and a final \$900 for 1 year at 6% per annum simple interest on 1 May 2001.</p> <p>William withdrew all of his money on 1 May 2002.</p> <p>Calculate how much more money Jane withdrew than William.</p>
試題翻譯	<p>Jane 和 William 在幾年中各存了一些錢。</p> <p>(a) 1998 年 5 月 1 日，Jane 開了個戶頭並存入 900 元，且利率為每年 6%，複利計算。</p> <p>1999 年 5 月 1 日，Jane 於該戶頭再存入 900 元。</p> <p>(1) 說明當時 Jane 的戶頭裡總共有 1854 元。</p> <p>(2) 2000 年 5 月 1 日，Jane 於該戶頭再存入 900 元，試計算此時 Jane 的戶頭裡總共有多少錢？</p> <p>(3) 2001 年 5 月 1 日，Jane 於該戶頭存入最後一筆 900 元，並於 2002 年 5 月 1 日全部領回，則她共可領回多少錢？</p> <p>(b) 1998 年 5 月 1 日，William 存入 900 元，且為期 4 年，利率為每年 6%，單利計算。</p> <p>(1) 請計算他這筆投資的獲利。</p> <p>(2) 1999 年 5 月 1 日，William 再存入 900 元，且為期 3 年，</p>

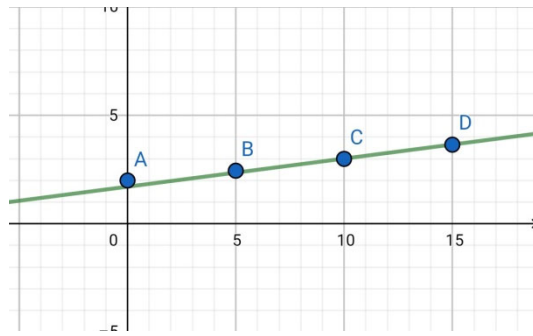
	<p>2000年5月1日，William再存入900元，且為期2年，2001年5月1日，William存入最後一筆900元，且為期1年，William於2002年5月1日全數領出。請計算Jane比William多領出幾元？</p>
<p>試題詳解</p>	<p>(a)(1)$900 \times 1.06 + 900 = 1854$ (2)$1854 \times 1.06 + 900 = 2865.24$ (3)2001年5月1日，Jane的戶頭裡總共有 $2865.24 \times 1.06 + 900 = 3937.1544$元 2002年5月1日，Jane的戶頭裡總共有 $3937.1544 \times 1.06 = 4173.38366 \approx 4173.38$元 (b)(1)$900 \times (1 + 4 \times 0.06) - 900 = 216$ (2)2002年5月1日，William的戶頭裡總共有 $900 \times (1 + 4 \times 0.06) + 900 \times (1 + 3 \times 0.06) + 900 \times (1 + 2 \times 0.06) + 900 \times (1 + 0.06) = 4140$元 Jane比William多領出 $4173.38 - 4140 = 33.38$元</p>
<p>試題解析</p>	<p>評量目標： 利息單利與複利的計算方法</p> <p>試題分析： 1.(a)和(b)題中的第(1)小題，在於檢視學生是否能知道單利與複利的計算方法。 2.讓學生了解在每年存入900元，為期四年後，複利計息和單利計息的差異。 3.可增加一小題:在第一次就存入$900 \times 4 = 3600$，比較與上述兩種計息方法的差異。</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>91 學測 多選題 11</p> <p>某甲自89年7月起，每月1日均存入銀行1000元，言明以月利率0.5%按月複利計息，到90年7月1日提出。某乙則於89年7月起，每單月(一月、三月、五月…)1日均存入銀行2000元，亦以月利率0.5%按月複利計息，到90年7月1日提出。一整年中，兩人都存入本金12000元。提出時，甲得本利和A元，乙得本利和B元。問下列選項何者為真？</p> <p>(1) $B > A$</p> <p>(2) $A = 1000 \left[\sum_{k=1}^{12} \left(\frac{1005}{1000} \right)^k \right]$</p> </div>

$$(3) \quad B = 2000 \left[\sum_{k=1}^6 \left(\frac{1005}{1000} \right)^{2k} \right]$$

$$(4) \quad A < 12000 \left(\frac{1005}{1000} \right)^{12}$$

$$(5) \quad B < 12000 \left(\frac{1005}{1000} \right)^{12}$$

試題編號	C-04															
試題原文	<p>The price, \$P, of a company share on 1st January has been increasing each year from 1995 to 2015. The company claims that this increase is exponential and so can be modelled by an equation of the form</p> $P = P_0 e^{kt},$ <p>where P_0 and k are constants and t is the time in years since 1st January 1995. The table below gives values of P and t for some of the years 1995 to 2010.</p> <table border="1" data-bbox="427 577 1326 725"> <tr> <td>Year</td> <td>1995</td> <td>2000</td> <td>2005</td> <td>2010</td> </tr> <tr> <td>t years</td> <td>0</td> <td>5</td> <td>10</td> <td>15</td> </tr> <tr> <td>\$P</td> <td>2.00</td> <td>2.44</td> <td>3.00</td> <td>3.65</td> </tr> </table> <p>(1) Plot a suitable straight line graph to show that the model is valid for years 1995 to 2010.</p> <p>(2) Estimate the value of P_0 and k.</p> <p>(3) Assuming that the model is still appropriate, estimate the price of a share on 1st January 2015.</p>	Year	1995	2000	2005	2010	t years	0	5	10	15	\$P	2.00	2.44	3.00	3.65
Year	1995	2000	2005	2010												
t years	0	5	10	15												
\$P	2.00	2.44	3.00	3.65												
試題翻譯	<p>一間公司的股價(\$P)從 1995 年的 1 月 1 日到 2015 年逐年成長。該公司宣稱此成長符合自然指數，且可以下列函數建模</p> $P = P_0 e^{kt},$ <p>其中 P_0 和 k 為常數，t(年)為從 1995 年的 1 月 1 日起所經過的時間。</p> <p>下表為 1995 到 2010 年間某些年的 P 和 t 的值。</p> <table border="1" data-bbox="427 1256 1326 1404"> <tr> <td>年分</td> <td>1995</td> <td>2000</td> <td>2005</td> <td>2010</td> </tr> <tr> <td>t 年</td> <td>0</td> <td>5</td> <td>10</td> <td>15</td> </tr> <tr> <td>\$P</td> <td>2.00</td> <td>2.44</td> <td>3.00</td> <td>3.65</td> </tr> </table> <p>(1) 畫一條適合直線來說明在此建模 1995 到 2010 年間是合理的</p> <p>(2) 試估計 P_0 和 k 的值</p> <p>(3) 假設此模型依然合適，試估計 2015 年 1 月 1 日的股價</p>	年分	1995	2000	2005	2010	t 年	0	5	10	15	\$P	2.00	2.44	3.00	3.65
年分	1995	2000	2005	2010												
t 年	0	5	10	15												
\$P	2.00	2.44	3.00	3.65												
試題詳解	<p>(1)</p>  <p style="text-align: center;">過 A, B 兩點的直線</p>															



過 C,D 兩點的直線

由圖可知 A, B, C, D 四點不會在一直線上，推論指數函數的模型可能比較合適

$$(2) P = 2, t = 0 \text{ 代入 } P = P_0 e^{kt} \Rightarrow P_0 = 2$$

$$(a) P = 2.44, t = 5 \text{ 代入 } P = 2e^{kt} \Rightarrow k = 0.0398$$

$$(b) P = 3.65, t = 15 \text{ 代入 } P = 2e^{kt} \Rightarrow k = 0.0401$$

(3) $t=20$ 代入

$$(a) P = 2e^{0.0398t} = 2e^{0.796} = 4.4333$$

$$(b) P = 2e^{0.0401t} = 2e^{0.802} = 4.4599$$

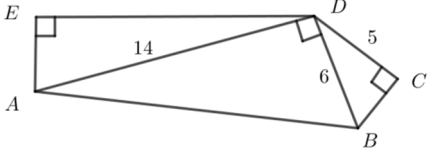
試題解析

評量目標：
指數函數的應用

試題分析：

(a)和(b)題中分別以 2000 和 2010 年的數據估算 k ，兩者相差 0.0003，但在估算 2015 年時，兩者差距來到 0.0266。

本題重點應是檢測學生如何以數據計算 k ，並根據所得推估 2015 年的股價。

試題編號	C-05
試題原文	<p>Mathematics p101 #5</p> <p>In the pentagon ABCDE, angles BCD, BDA and AED are each 90° and angle ADE is 18°. $CD=5$ cm, $BD=6$ cm and $AD=14$ cm.</p> <p>Calculate</p> <p>(a) angle CDB, (b) AE, (c) the radius of the circle through A, B and D.</p> 
試題翻譯	<p>已知五邊形ABCDE中，$\angle BCD = \angle BDA = \angle AED = 90^\circ$，$\angle ADE = 18^\circ$，且$\overline{CD} = 5$，$\overline{BD} = 6$，$\overline{AD} = 14$，試求</p> <p>(a) $\angle CDB$，(b) \overline{AE}，(c) 通過A，B，D三點的圓之半徑。</p>
試題詳解	<p>(a) $\triangle BCD$: $\cos \angle CDB = \frac{5}{6} \Rightarrow \angle CDB = \cos^{-1} \frac{5}{6} \approx 33.56^\circ$</p> <p>(b) $\triangle ADE$: $\overline{AE} = 14 \times \sin 18^\circ \approx 14 \times 0.31 = 4.34$</p> <p>(c) $\triangle ADB$ 為直角三角形 \Rightarrow 外接圓半徑 $= \frac{1}{2} \times \overline{AB} = \frac{1}{2} \times \sqrt{14^2 + 6^2} = \frac{\sqrt{232}}{2} \approx 7.62$</p>
試題解析	<p>評量目標： 直角三角比、外接圓、畢氏定理、根號、反三角</p> <p>試題分析：</p> <p>(a) 108 課綱有介紹利用反三角求角度(高中)，讓學生在$\angle CDB$滿足 $\cos \angle CDB = \frac{5}{6}$ 外，對角度的大小更有感。</p> <p>(b) 在國中的直角三角筆可以處理非特別角的問題，且除了以 $14 \sin 18^\circ$ 表示 \overline{AE} 長度外，引入計算機之後可估算其近似值。</p> <p>(c) 利用計算機計算出 $\frac{\sqrt{232}}{2} \approx 7.62$，讓長度不再只是符號。</p>

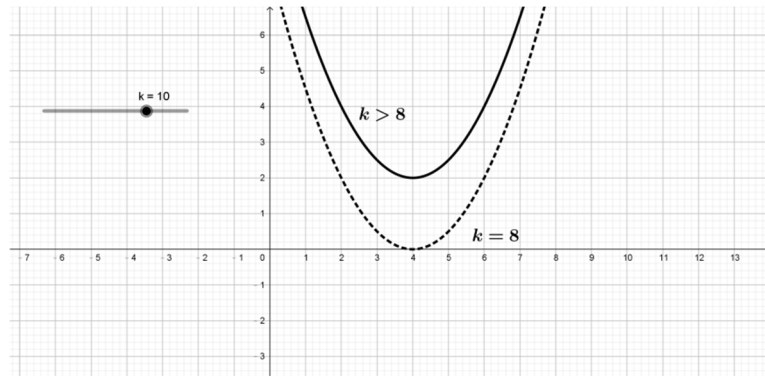
試題編號	C-06
試題原文	<p>(1) Given that $u = 2^x$, express $2^{2x-1} = 2^{x+2} - 6$ as an equation in u.</p> <p>(2) Hence find the values of x for which $2^{2x-1} = 2^{x+2} - 6$, giving your answer, where appropriate, to 1 decimal place.</p> <p>(3) Explain why the equation $2^{2x-1} = 2^{x+2} - k$ has no solution if $k > 8$.</p>
試題翻譯	<p>(1) 令 $u = 2^x$，試將方程式 $2^{2x-1} = 2^{x+2} - 6$ 表示成 u 的方程式。</p> <p>(2) 求解滿足方程式 $2^{2x-1} = 2^{x+2} - 6$，的 x 值到小數點後第一位。</p> <p>(3) 解釋當 $k > 8$ 時，方程式 $2^{2x-1} = 2^{x+2} - k$ 無解。</p>
試題詳解	<p>(1) $2^{2x-1} = 2^{x+2} - 6 \Rightarrow \frac{1}{2} \times (2^x)^2 = 4 \times 2^x - 6 \Rightarrow \frac{1}{2}u^2 = 4u - 6$。</p> <p>(2) $\frac{1}{2}u^2 = 4u - 6 \Rightarrow u^2 - 8u + 12 = 0 \Rightarrow (u - 2)(u - 6) = 0$ $\Rightarrow u = 2$ 或 6 即 $2^x = 2$ 或 $6 \Rightarrow x = 1$ 或 $\log_2 6 \Rightarrow x = 1$ 或 2.6。</p> <p>(3) $2^{2x-1} = 2^{x+2} - k \Rightarrow \frac{1}{2}u^2 - 4u + k = 0$</p> <p>(a) $\frac{1}{2}u^2 - 4u + k = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}(u - 4)^2 = 8 - k \dots\dots(*)$ 當 $8 - k < 0$ 時，即 $k > 8$，此時方程式(*)無解。</p> <p>(b) $\frac{1}{2}u^2 - 4u + k = 0$，其中 $u = 2^x$， 若 u 的二次方程式的解為”兩負根”或”無實數根”，則 x 無解。</p> <p>由根與係數關係：兩根和為 $-\frac{-4}{\frac{1}{2}} = 8 > 0 \Rightarrow$ 方程式不會有兩負根的情形；</p> <p>當為“無實數解”時，判別式 $(-4)^2 - 4 \times \frac{1}{2} \times k < 0 \Rightarrow k > 8$</p> <p>(c) 方程式(*)可表為 $\frac{1}{2}(u - 4)^2 + k - 8 = 0$，可視為拋物線</p>

$y = \frac{1}{2}(u - 4)^2 + k - 8$ 與 x 軸的相交情形

拋物線 $y = \frac{1}{2}(u - 4)^2 + k - 8$ 的開口向上，頂點 $(4, k - 8)$

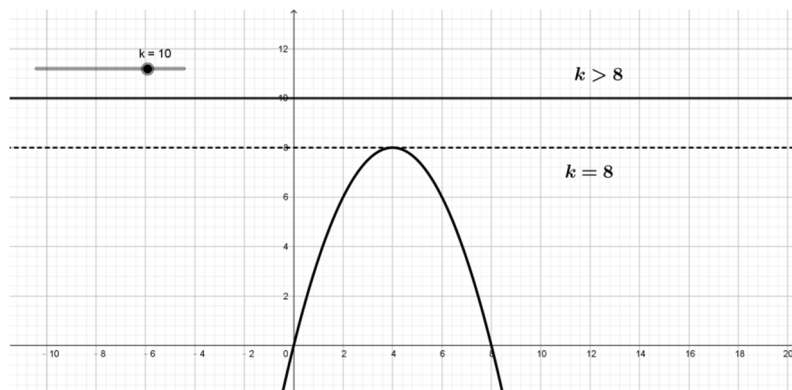
⇒當 $k > 8$ 時，拋物線與 x 軸不相交，

即此時無解。



(d)方程式(*)可表為 $-\frac{1}{2}(u - 4)^2 + 8 = k$ ，可視為拋物線 $y = -\frac{1}{2}(u - 4)^2 + 8$ 與 $y = k$ 的相交情形

拋物線 $y = -\frac{1}{2}(u - 4)^2 + 8$ 的開口向下，頂點 $(4, 8)$ ⇒當 $k > 8$ 時，拋物線與 $y = k$ 不相交，
即此時無解。



試題解析

評量目標：
二次函數的根、二次函數的圖形。

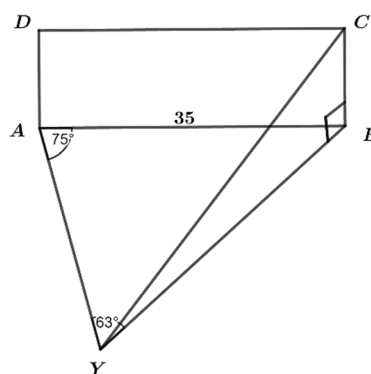
	<p>試題分析：</p> <ul style="list-style-type: none">(a)基本運算能力之外，善用計算機並做近似值計算。(b)一元二次方程式的代數解與函數圖形的解讀可互相呼應。(c)一題多解讓學生的思考不受限制。
--	--

使用計算機的數學評量試題研究成果

蘇惠玉 老師

臺北市立西松高級中學

試題編號	D-01
試題原文	<p>O level (藍本 P.103)</p> <p>In the diagram, the rectangle ABCD represents a vertical cliff face. The bottom of the cliff, AB, runs from West to East, and is at sea level. A yacht is in the sea at Y. Angle BAY=75°, angle AYB=63° and AB=35 m.</p> <p>(a) Find the bearing of Y from B. (b) Show that BY=37.9 m, correct to three significant figures. (c) Calculate the area of triangle ABY. (d) Calculate the shortest distance from the yacht to the cliff. (e) The angle of depression of the yacht when viewed from C is 18°.</p> <p>(i) Find the height of the cliff. (ii) Calculate the greatest possible value of the angle of elevation of the top of the cliff when viewed from the yacht.</p>
試題翻譯	<p>如圖，矩形 ABCD 為一個垂直的懸崖面，懸崖由西到東的底部 AB 為海平面。海上有一艘遊艇在 Y 的位置，已知 $\angle BAY=75^\circ$，$\angle AYB=63^\circ$ 且 $AB=35$ 公尺。</p> <p>(a) 以 B 為原點，求 Y 的方位角。 (b) 證明 $BY=37.9$ 公尺，正確到 3 位有效數字。 (c) 計算 $\triangle ABY$ 的面積 (d) 計算遊艇到懸崖的最短距離。 (e) 由 C 點看遊艇的俯角為 18°，</p> <p>(i) 求懸崖的高度 (ii) 計算從遊艇看懸崖頂部的最大可能仰角</p>

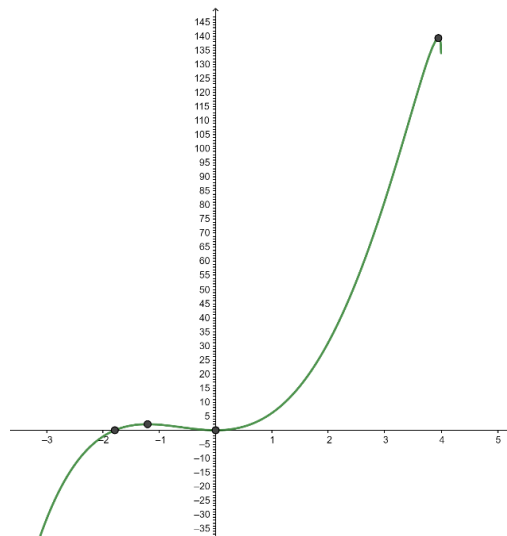
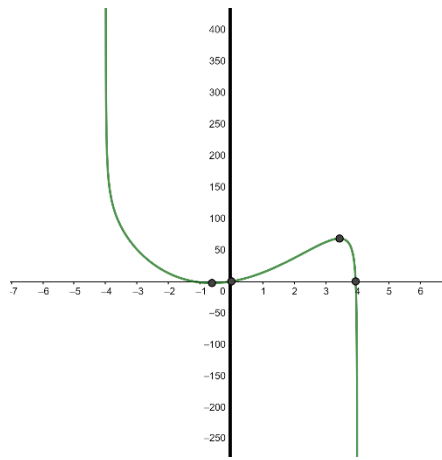


<p>試題詳解</p>	<p>(a) 由$\triangle ABY$ 內角和可知$\angle ABY=180^{\circ}-75^{\circ}-63^{\circ}=42^{\circ}$ 所以 Y 的方位角為 $180^{\circ}+48^{\circ}=228^{\circ}$</p> <p>(b) 由正弦定理可知$\frac{35}{\sin 63^{\circ}}=\frac{BY}{\sin 75^{\circ}}$，所以$BY=\frac{35 \cdot \sin 75^{\circ}}{\sin 63^{\circ}}=37.9$ 公尺。</p> <p>(c) $\triangle ABY$ 面積$=\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BY} \times \sin 42^{\circ}=\frac{1}{2} \times 35 \times 37.9 \times 0.669 \approx 444$ 平方公尺</p> <p>(d) 設遊艇到懸崖的最短距離為 h，$\triangle ABY=\frac{1}{2} \times 35 \times h$，即 $444=\frac{1}{2} \times 35 \times h$， $h \approx 25.4$ 公尺</p> <p>(e) (i) 在$\triangle CYB$ 中，$\angle CYB$ 亦等於 18°，因此 $\tan 18^{\circ}=\frac{\overline{BC}}{\overline{BY}}=\frac{\overline{BC}}{37.9}$ $\overline{BC}=37.9 \times \tan 18^{\circ} \approx 12.3$ 公尺</p> <p>(ii) 當遊艇 Y 到懸崖的距離有最小值時，此時從遊艇 Y 看懸崖頂部會有最大仰角，設此角為 θ，那麼 $\tan \theta=\frac{\text{懸崖高度}}{h}=\frac{12.3}{25.4} \approx 0.484$，所以 $\theta \approx 25.8^{\circ}$</p>
<p>試題解析</p>	<p>評量目標：三角測量 評量中檢測的數學概念：正弦定理、三角形面積(正弦)、三角比，反三角</p> <p>試題分析：</p> <p>(1) 題目的結構相當清楚，利用小題連接的順序引導或提供後續問題的啟發，並在一個題組中完整檢測三角測量的相關概念。</p> <p>(2) 由於可使用科學型計算機，因此不必侷限於特殊角，數據可接近真實情境。</p> <p>(3) 在沒有計算機的幫助下，(e)這類的問題幾乎不可能在測驗中出現，但是有科學型計算機可利用時，就可檢測某些實際測量時會出現的問題，並增進學生嘗試歸納的機會。</p>

試題編號	D-02
試題原文	<p>. [It is given that the volume of a sphere of radius r is $\frac{4}{3}\pi r^3$ and that the volume of a circular cone with base radius r and height h is $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.]</p> <p>A toy manufacturer makes a toy which consists of a hemisphere of radius r cm joined to a circular cone of base radius r cm and height h cm (see diagram). The manufacturer determines that the length of the slant edge of the cone must be 4 cm and that the total volume of the toy, V cm³, should be as large as possible.</p> <p>(i) Find a formula for V in terms of r. Given that $r = r_1$ is the value of r which gives the maximum value of V, show that r_1 satisfies the equation $45r^4 - 768r^2 + 1024 = 0$.</p> <p>(ii) Find the two solutions to the equation in part (i) for which $r > 0$, giving your answers correct to 3 decimal places.</p> <p>(iii) Show that one of solutions found in part (ii) does not give a stationary value of V. Hence write down the value of r_1 and find the corresponding value of h.</p> <p>(iv) Sketch the graph showing the volume of the toy as radius of the hemisphere varies.</p> <div data-bbox="772 1263 1098 1626" data-label="Image"> <p>The diagram shows a 3D representation of the toy. It consists of a hemisphere at the bottom and a circular cone on top. The base of the cone is the flat top of the hemisphere, both having a radius r. The height of the cone is h, and its slant edge is labeled as 4. Dashed lines indicate the hidden parts of the base and the vertical height.</p> </div>
試題翻譯	<p>[半徑 r 的球體體積為 $\frac{4}{3}\pi r^3$; 底圓半徑 r , 高度 h 的圓錐體積為 $\frac{1}{3}\pi r^2 h$]</p> <p>有一個玩具製造商想要製作一個玩具，這個玩具包含一個半徑為 r 公分的半球體，其上連接一個底圓半徑為 r 公分，高度為 h 公</p>

	<p>分的圓錐(如圖)。這個製造商決定圓錐的斜邊長必須是 4 公分且讓體積盡可能的大。</p> <p>(i) 將體積 V 表示成 r 的關係式。若 $r = r_1$ 時有最大體積，證明 r_1 滿足方程式 $45r^4 - 768r^2 + 1024 = 0$</p> <p>(ii) 當 $r > 0$ 時，找出在(i)之等式的兩個解，給出的答案要準確到小數點後 3 位。</p> <p>(iii) 證明在(ii)中所找出的解其中一個不為 $V(r)$ 函數的駐點值，因此寫出 r_1 的值並找出此時相對應的 h 值。</p> <p>(iv) 作出以半球體之半徑為變數的體積函數圖形。</p>
<p>試題詳解</p>	<p>(i) 體積 $V(r) = \frac{2}{3}\pi r^3 + \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$，其中 $h = \sqrt{16 - r^2}$ 代入，因此</p> $V(r) = \frac{2}{3}\pi r^3 + \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot \sqrt{16 - r^2}$ <p>$V(r)$ 的最大值發生在 $V'(r) = 0$ 時</p> $V'(r) = 2\pi r^2 + \frac{2}{3}\pi r\sqrt{16 - r^2} + \frac{1}{3}\pi r^2 \left[\frac{1}{2} \cdot (16 - r^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2r) \right]$ $= 2\pi r^2 + \frac{2}{3}\pi r\sqrt{16 - r^2} - \frac{\pi r^3}{3\sqrt{16 - r^2}} = 0 \text{ 時，}$ $\Rightarrow 6r + 2\sqrt{16 - r^2} = \frac{r^2}{\sqrt{16 - r^2}}$ $\Rightarrow 6r\sqrt{16 - r^2} + 2(16 - r^2) = r^2, \quad 6r\sqrt{16 - r^2} = 3r^2 - 32, \text{ 兩邊平方}$ $\Rightarrow 36r^2(16 - r^2) = 9r^4 - 192r^2 + 1024, \text{ 整理可得}$ $45r^4 - 768r^2 + 1024 = 0,$ <p>亦即若 $r = r_1$ 時 $V(r)$ 有最大值，r_1 須滿足</p> $45r^4 - 768r^2 + 1024 = 0$ <p>(ii) 解方程式 $45r^4 - 768r^2 + 1024 = 0$，</p> $r^2 = \frac{768 \pm \sqrt{768^2 - 4 \times 45 \times 1024}}{90} \approx \frac{768 \pm 636.791959}{90} \text{ 且 } r > 0,$ <p>故可得 $r = 3.950$ 或 $r = 1.207$</p> <p>(iii) 將 $r = 1.207$ 分別帶回 $V'(r)$ 計算，可得 $V'(1.207) \approx 18.311 \neq 0$，因此當 $r = 1.207$ 時，不會是 $V(r)$ 函數的駐點，而 $V'(3.950) = 0$，且當 $3.950 < r < 4$ 時，$V'(r) < 0$，而 $0 < r < 3.950$ 時，$V'(r) > 0$，故當 $r = 3.950$ 時，體積 $V(r)$ 有最大值，因此取 $r_1 = 3.950$ 公分，此時 $h = 0.397$ 公分。</p> <p>$y = V'(r)$ 的圖形如下左圖(x 軸：y 軸=1:50)。</p>

另法：由 $V(r)$ 的函數圖形可知，在 $r \approx 3.950$ 時 $V(r)$ 有最大值，因此取 $r_1 = 3.950$ 公分，此時此時 $h = 0.397$ 公分。



(iv) 上右圖為以 x 軸與 y 軸單位長比例 1:20 所繪製的 $y=V(r)$ 函數圖，可以清楚看出當 $r \approx 3.950$ 時 $V(r)$ 函數有極大值。

試題解析

評量目標：微積分導數的應用(函數的極大值)

評量中檢測的數學概念：微分求導函數，函數極值點的性質，函數繪圖

試題分析：

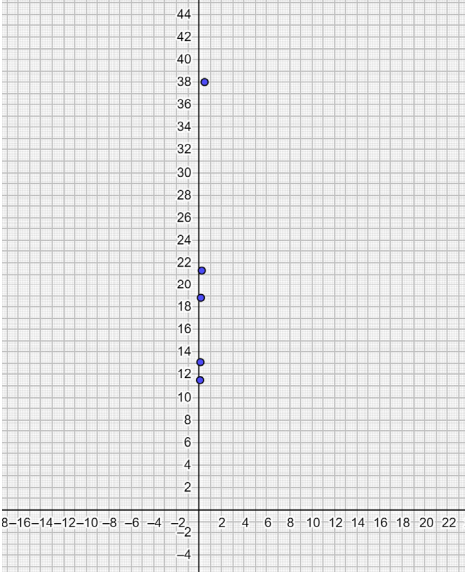
(1) 這個問題所要檢測的概念相當單純，就是函數的極大值，不過如果沒有繪圖型計算機的幫助，當求出

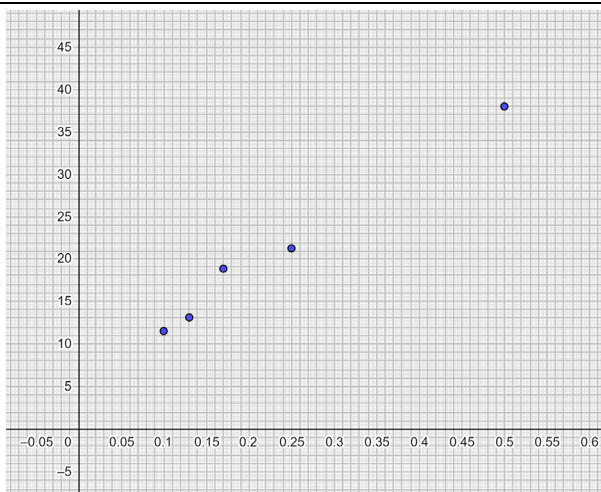
$45r^4 - 768r^2 + 1024 = 0$ 的兩個正根時，在沒有計算機的幫助下

	<p>要純粹手動計算，需要花費相當多的時間，即使是科學型計算機也難在短時間得出正確的結果；不過利用繪圖型計算機時，可以輕易得知一階導函數等於 0 的值，或是某一點的函數值。</p> <p>(2) 此題的體積函數與其一階導函數的圖形皆不容易在沒有軟體的幫助下繪出，利用繪圖計算機繪出圖形之後，學生可以藉由圖形的幫助來判斷答案的正確性，以及進一步認識到這兩個函數圖型的特性。</p>
--	---

試題編號	D-03
試題原文	Find the set of values of the constant k for which the line $y = k(x-1)$ intersects the curve $y = x^2 + 6x + k$ at two distinct points.
試題翻譯	若直線 $y = k(x-1)$ 與曲線 $y = x^2 + 6x + k$ 相交於相異兩點，求 k 的範圍。
試題詳解	<p>將 $y = k(x-1)$ 代入 $y = x^2 + 6x + k$，可得 x 的二次方程式：</p> $kx - k = x^2 + 6x + k$ $x^2 + (6-k)x + 2k = 0$ <p>，交於相異兩點表示此二次方程式有 2 個相異實根，</p> <p>因此判別式 $D = (6-k)^2 - 8k > 0$，整理得</p> $k^2 - 20k + 36 > 0$ $(k-18)(k-2) > 0$ <p>，可得 k 的範圍為 $k > 18$ 或 $k < 2$。</p>
試題解析	<p>評量目標：二次不等式，一次與二次函數圖形的關係</p> <p>評量中檢測的數學概念：二次不等式、二次方程式的根</p> <p>試題分析：</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 如果使用圖形式計算機或計算軟體，考生可先畫圖(數值滑桿)，嘗試改變 k 值以檢驗圖形的關係，進而猜測 k 值可能的範圍。 2. 在教學上，這類型式的問題通常僅教授代數解法，可嘗試配合幾何圖形說明。在軟體上，利用數值滑桿，可讓學生先感受直線 $y = k(x-1)$ 中的 k 值代表何意，以及二次曲線 $y = x^2 + 6x + k$ 中的 k 值的幾何意義，讓學生在圖形中感受兩者相配合時，曲線的頂點(或 y 截距)與直線斜率應該取何值才會相教於相異兩點，讓學生進一步由幾何圖形理解與整合直線與二次曲線的幾何性質。

試題編號	D-04
試題原文	(i) Find the integer which satisfies the equation $x^3 - x^2 - 11x + 3 = 0$. (ii) Find, in the form $a \pm b\sqrt{3}$, where a and b are integers, the other values which satisfy the equation.
試題翻譯	(1) 找到一個整數滿足方程式 $x^3 - x^2 - 11x + 3 = 0$ 。 (2) 求滿足此方程式的其他數值，並以 $a \pm b\sqrt{3}$ 的形式表示，其中 a, b 為整數。
試題詳解	(1) 設 $f(x) = x^3 - x^2 - 11x + 3$ ， $f(x) = 0$ 的可能有理根為 ± 1 、 ± 3 ，但 $f(-1) \neq 0$ ， $f(1) \neq 0$ ， $f(3) \neq 0$ ， $f(-3) = 0$ ，可知 $x = -3$ 為 $x^3 - x^2 - 11x + 3 = 0$ 的整數根。 因為 $x^3 - x^2 - 11x + 3 = (x + 3)(x^2 - 4x + 1)$ ，當 $x^2 - 4x + 1 = 0$ 時， $x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$ ，因此方程式的另二根為 $2 \pm \sqrt{3}$ 。
試題解析	評量目標：一次因式檢驗法，解三次方程式 評量中檢測的數學概念：方程式的有理根檢驗，除法做因式分解，二次方程式的公式解 試題分析： 1. 如果可利用計算機，係數就可稍微大一點，讓考生利用計算機計算函數值 2. 可用繪圖型計算機畫出三次函數的圖形，並看出此函數與 x 軸有 3 個交點，其中整數解很容易看出，但是如果要求另二根的精確值，學生必須曉得利用一次因式將方程式降次，以求得其他解。 3. 如果直接利用繪圖型計算機求解三次方程式，考生必須知道將計算機顯示的方程式解改成精確解 ($a \pm b\sqrt{3}$) 的形式。

試題編號	D-05																		
試題原文	<p>It is known that x and y are related by the formula $xy = a + bx$, where a and b are constant.</p> <table border="1" data-bbox="577 338 1074 439"> <tr> <td>x</td> <td>2</td> <td>4</td> <td>6</td> <td>8</td> <td>10</td> </tr> <tr> <td>y</td> <td>38</td> <td>21.3</td> <td>18.8</td> <td>13.1</td> <td>11.5</td> </tr> </table> <p>Express this equation in a form suitable for drawing a straight line graph. Draw this graph for given data and use it to estimate the value of a and of b.</p>	x	2	4	6	8	10	y	38	21.3	18.8	13.1	11.5						
x	2	4	6	8	10														
y	38	21.3	18.8	13.1	11.5														
試題翻譯	<p>已知 x 與 y 的關係式為 $xy = a + bx$，其中 a, b 為常數</p> <table border="1" data-bbox="424 725 920 826"> <tr> <td>x</td> <td>2</td> <td>4</td> <td>6</td> <td>8</td> <td>10</td> </tr> <tr> <td>y</td> <td>38</td> <td>21.3</td> <td>18.8</td> <td>13.1</td> <td>11.5</td> </tr> </table> <p>藉由畫出一條最適直線來表達這個關係式。利用給出的數據點畫出此直線，並以此直線估計 a 與 b 的值。</p>	x	2	4	6	8	10	y	38	21.3	18.8	13.1	11.5						
x	2	4	6	8	10														
y	38	21.3	18.8	13.1	11.5														
試題詳解	<p>(1) 將 $xy = a + bx$ 表示成 $y = \frac{a}{x} + b$，以 $\frac{1}{x}$ 為橫坐標，y 為縱坐標作圖</p> <table border="1" data-bbox="424 1115 1128 1312"> <tr> <td>x</td> <td>2</td> <td>4</td> <td>6</td> <td>8</td> <td>10</td> </tr> <tr> <td>y</td> <td>38</td> <td>21.3</td> <td>18.8</td> <td>13.1</td> <td>11.5</td> </tr> <tr> <td>$\frac{1}{x}$</td> <td>0.50</td> <td>0.25</td> <td>$\frac{1}{6} \approx 0.17$</td> <td>$\frac{1}{8} \approx 0.13$</td> <td>0.10</td> </tr> </table> <p>(2) 作圖，可變換刻度比，讓直線更容易觀察</p> 	x	2	4	6	8	10	y	38	21.3	18.8	13.1	11.5	$\frac{1}{x}$	0.50	0.25	$\frac{1}{6} \approx 0.17$	$\frac{1}{8} \approx 0.13$	0.10
x	2	4	6	8	10														
y	38	21.3	18.8	13.1	11.5														
$\frac{1}{x}$	0.50	0.25	$\frac{1}{6} \approx 0.17$	$\frac{1}{8} \approx 0.13$	0.10														



x 軸 : y 軸=1:100

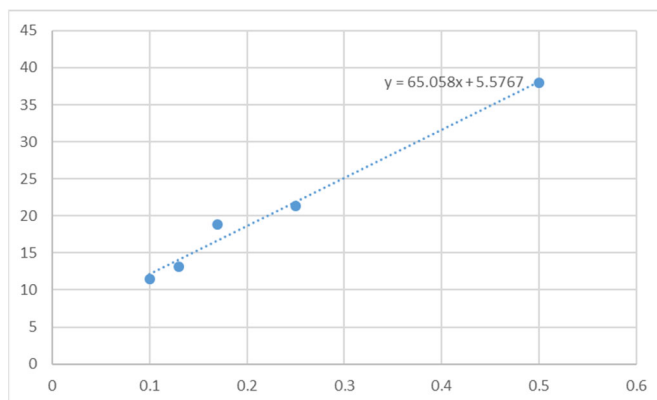
(3) 選擇適合的二點作直線，其中 a 為此直線的斜率， b 為此直線的 y 截距

①選擇過(0.5, 38)、(0.1, 11.5)

此時直線方程式為 $y = 66.25x + 4.88$ ，因此 $a=66.25$, $b=4.88$

②選擇過 y 軸的(0, 5)與(0.1, 11.5)，此時 $b=5$ ，斜率 $a=65$

③計算 $(\frac{1}{x}, y)$ 的迴歸直線，得 $a=65.058$, $b=5.5767$



試題解析

評量目標：直線方程式，建模

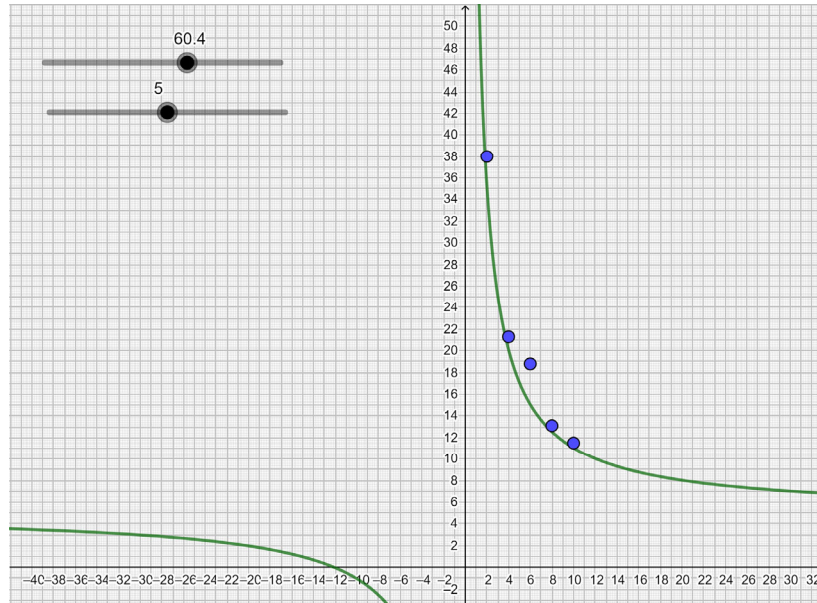
評量中檢測的數學概念：直線方程式

試題分析

1. 在新加坡的直線圖形單元中，似乎有教授如何利用直線去近似一個曲線以求得係數，例如 $y = ax^n + b$ 時，以 x^n 為橫坐標， y 為縱坐標，此時 a 為斜率， b 為 y 截距；或 $y = ab^x$ ，轉換成 $\log y = (\log b)x + \log a$ ，以 x 為橫坐標， $\log y$ 為縱坐標，此時斜率為 $\log b$ ， y 截距為 $\log a$ 。在此脈絡下，這樣的問題

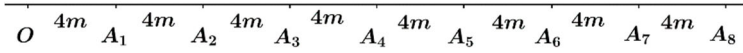
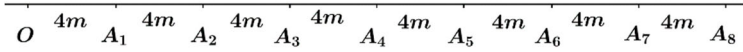
之標準解法為將 $xy = a + bx$ 表示成 $y = \frac{a}{x} + b$ ，以 $(\frac{1}{x}, y)$ 為點作圖來求最適直線，此時的最適直線會根據所選擇的點而找出不同的 a 與 b 。

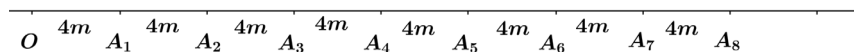
2. (1) 在教學時，已知 5 個數據點的條件下，可以利用 GGB 類的軟體，讓學生試著由原本的雙曲線圖形 $xy = a + bx$ 中，以盡可能得符合數據點的形式，利用數值滑桿探索 a, b 可能的值，並由圖形理解 a, b 在這個曲線圖形中的意義。



(2) 在探索的過程中，讓學生經驗到「因為不容易決定 a, b ，因此才改以直線做近似逼近」，並將關係式 $xy = a + bx$ 改成直線的 $y = \frac{a}{x} + b$ 。

(3) 在描完所有數據點 $(\frac{1}{x}, y)$ 後，發現由於 y 坐標的值較大，而 x 坐標的值太小不容易觀察最適直線，此時可讓學生思考解決方式，讓學生了解有時適當地改變刻度比例，可以讓圖形的關係更清楚。

試題編號	D-06
試題原文	<p>In a training exercise, athletes run from a starting point O to and from a series of points A_1, A_2, A_3, \dots, increasingly far away in a straight line. In the exercise, athletes start at O and run stage 1 from O to A_1, and back to O, then stage 2 from O to A_2 and back to O, and so on.</p> <p>(i)</p>  <p style="text-align: center;">圖一</p> <p>In Version 1 of the exercise, the distances between adjacent points are all 4 m (see Fig. 1).</p> <p>(a) Find the distance run by an athlete who completes the first 10 stages of Version 1 of the exercise.</p> <p>(b) Write down an expression for the distance run by an athlete who completes n stages of Version 1. Hence find the least number of stages that the athlete needs to complete to run at least 5 km.</p> <p>(ii)</p>  <p style="text-align: center;">圖一</p> <p>In Version 2 of the exercise, the distances between the points are such that $OA_1=4$ m, $A_1A_2=4$ m, $A_2A_3=8$ m, $A_nA_{n+1} = 2A_{n-1}A_n$ (see Fig. 2). Write down an expression for the distance run by an athlete who completes n stages of Version 2. Hence find the distance from O, and the direction of travel, of the athlete after he has run exactly 10 km using Version 2.</p>
試題翻譯	<p>在某種體能訓練中，運動員從 O 點出發跑向在直線上的一系列的點 A_1, A_2, A_3, \dots，這些點離 O 點距離越來越遠。在這個訓練過程中，第一階段從 O 點跑向 A_1，再從 A_1 跑回 O 點；第二階段從 O 點跑向 A_2，再從 A_2 跑回 O 點；如此繼續下去。</p> <p>(i)</p>

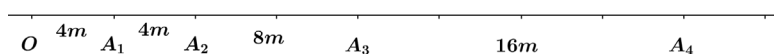


圖一

在訓練方式 1 中，相鄰 2 點之間的距離都是 4 m(如圖一)

- (a) 在訓練方式 1 中，求運動員完成前 10 個階段所跑動的距離
 (b) 寫出運動員完成訓練方式 1 的 n 階段時所跑動的距離關係式；由此求出運動員最少跑動 5km 時，至少需要完成到第幾階段？

(ii)



圖二

在訓練方式 2 中，相鄰 2 點之間的距離為 $OA_1=4m$ ， $A_1A_2=4m$ ， $A_2A_3=8m$ ，且 $A_nA_{n+1}=2A_{n-1}A_n$ (如圖二)。寫出在方式 2 中運動員完成 n 階段時跑動的距離關係式，並求出在方式 2 中運動員剛好跑完 10km 時，他與 O 點的距離，以及此時運動的方向。

試題詳解

(i) (a) 前 10 階段的距離為 $2(4+8+12+\dots+40)=8(1+2+3+\dots+10)=8\times\frac{10\times 11}{2}=440m$

(b) 完成 n 階段時跑動的距離為 $8\times(1+2+3+\dots+n)=8\times\frac{n\times(n+1)}{2}=4n(n+1)$

因此當 $4n(n+1)\geq 5000$ 時， $n(n+1)\geq 1250$ ，因為 $34\times 35=1260$ ， $35\times 36=1190$ ，因此至少須完成到 35 階段。

(ii) 完成 n 階段時跑動的距離為

$$2(2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{n+1}) = 2 \times \frac{4 \times (2^n - 1)}{2 - 1} = 8(2^n - 1)$$

當 $8(2^n - 1)=10000$ 時，即 $2^n - 1=1250$ ， $2^n=1251$ ，因此可知此時運動員已完成第 10 階段，在進行第 11 階段中。

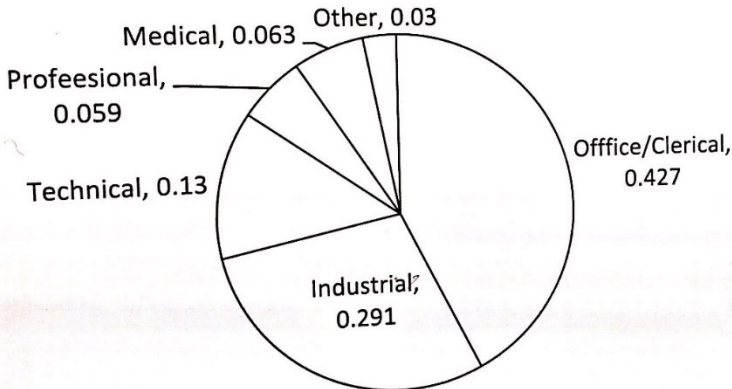
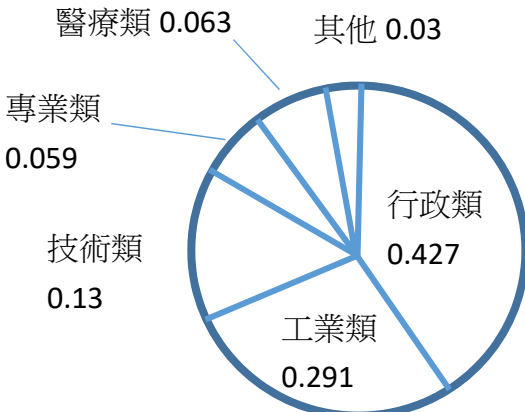
當 $n=10$ 時，跑動距離為 $8(2^{10} - 1)=8\times 1023=8184m$ ，最後在第

	<p>11 階段從 O 點往 A₁₁ 跑動的過程中，因為</p> $4+4+8+16+32+\dots+2^9=2+(2+2^2+2^3+\dots+2^9)=2+\frac{2(2^9-1)}{2-1}=1024$ <p>(到 A₉ 時)，而 $\overline{A_9A_{10}}=2^{10}=1024$，已超過 10km，因此當距離恰好為 10km 時，運動員以遠離 O 的方向，行進到 A₉ 與 A₁₀ 之間，距離 O 點 1816m 處。</p>
<p>試題解析</p>	<p>評量目標：等差級數、等比級數</p> <p>評量中檢測的數學概念：數列規律、等差級數求和，等比級數求和</p> <p>試題分析：</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 在等差與等比級數的加總計算時，可適時利用計算機幫助計算。如果考試時有計算機輔助計算，等比的底就可不必侷限在 2，可以有較大或小數的情形(不過仍須符合真實情境)。 2. 當學生有計算機時，在不曉得級數和公式或距離關係式的情況下，可能直接利用計算機加總計算，可讓一些學生利用計算機解決問題。 3. 此問題可算是等差與等比級數和應用的素養題，相較一般台灣的試題，較能跟生活情境結合，應用數學解決日常生活會發生的問題，也能充分檢測等差與等比級數求和的數學技巧。

使用計算機的數學評量試題研究成果

蘇麗敏 老師

臺北市立第一女子高級中學

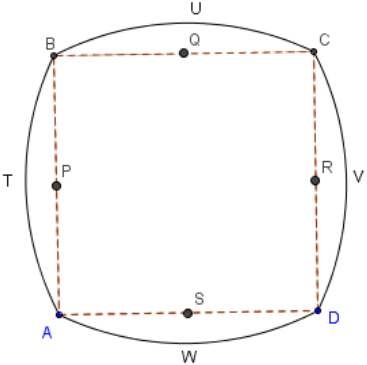
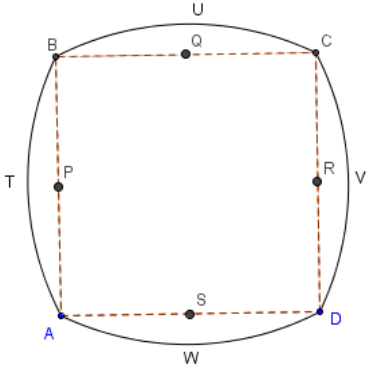
試題編號	E-01
試題原文	<p style="text-align: center;">Temporary Workers In Country S By Job Area, 1993</p>  <p style="text-align: center;">(total: 4.0 million worker)</p> <p>Of the temporary workers who worked in the industrial area, 10 percent worked for 6 automobile companies. What was the approximate average(arithmetic mean)number of temporary industrial workers who worked in each of these companies?</p> <p>(A) 12000 (B) 19000 (C) 22000 (D) 170000 (E) 190000</p>
試題翻譯	

	<p>工作總人數：400 萬人</p> <p>上面的圖表為 S 國的臨時工在 1993 年的工作區域分類表。</p> <p>已知在工業區工作的臨時工中，有 10% 在 6 家汽車公司工作。在這些公司工作的臨時工人中，試求每一家公司中工業類工作者的平均數（算術平均數）大約是多少？(全部工人共有 4 百萬)</p> <p>(A) 12000 (B) 19000 (C) 22000 (D) 170000 (E) 190000</p>
試題詳解	$4 \times 10^6 \times 0.1 \times 0.291 \div 6 = 19400$ ，所以選(B)
試題解析	<p>評量目標：統計圖表</p> <p>評量中檢測的數學概念：算術平均數、百分比、圓形圖</p> <p>試題分析：GRE 中的數學試題，幾乎一大半是比例的概念題，這題是統計圖表搭配比例概念，加上算術平均數，是很基本的統計題，因為是比例，數字雖有點小複雜，但搭配計算機的操作，可說是完全能呈現學生識圖，以及閱讀理解的能力。</p>

試題編號	E-02
試題原文	<p>At the beginning of an experiment, there were 10,000 bacteria in a certain culture. The number of bacteria increased by 20 percent every hour. At the end of</p> <p>N hours, there were between 20,000 and 25,000 bacteria in the culture. Which of</p> <p>the following could be the value of N?</p> <p>Indicate all such values</p> <p>(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7</p>
試題翻譯	<p>在實驗開始時，某種培養物中有 10,000 個細菌。已知細菌數量每小時增加 20%。在 N 小時後，培養物中有 20,000 到 25,000 個細菌。請問下列哪些是可能的 N 值？</p> <p>(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7</p>
試題詳解	$20000 < 10000 \times (1.2)^N < 25000$ $2 < (1.2)^N < 2.5 \Rightarrow N = 3 \text{ 或 } 4$
試題解析	<p>評量目標：指數概念</p> <p>評量中檢測的數學概念：倍數、指數</p> <p>試題分析：</p> <p>簡單的指數概念問題，其實若有計算器的搭配使用，數值不一定要如此的小，增加 20%，也可改成 16% 這種數值，或許他們認為這樣的數值，計算能力快的人，不需要計算器的使用，也可快速算出。</p>

試題編號	E-03
試題原文	<p>An art gallery displays 10 paintings in row. Of these paintings, 5 are by Picasso, 4 by Monet and 1 by Turner.</p> <p>(1) Find the number of different ways the paintings can be displayed if there are no restrictions.</p> <p>(2) Find the number of different ways the paintings can be displayed if the paintings by each of the artists are kept together.</p>
試題翻譯	<p>一個藝術畫廊展出 10 幅畫作。在這些畫作中，有 5 幅是畢加索，4 幅是莫奈和 1 幅特納的畫作。</p> <p>(1) 如果沒有任何限制，試求共有多少種不同的繪畫展出方式。</p> <p>(2) 如果同一個藝術家的作品須放在一起，試求共有多少種不同的繪畫展出方式。</p>
試題詳解	<p>(1) $10! = 3628800$</p> <p>(2) $5! \times 4! \times 1 \times 3! = 17280$</p>
試題解析	<p>評量目標：理解乘法原理及排列組合中相鄰物的排列，以及不同種類物品的次序排列。</p> <p>評量中檢測的數學概念：乘法原理、排列組合。</p> <p>試題分析：</p> <p>此題是很基本的乘法原理、排列概念的運用，第(2)題學生容易忽略 3 類物品彼此間得再排列一次，有了計算機的協助，這類問題就不須被侷限住於很小的數字，物品的種類也可變多，像這樣的問題，能評量學生是否能理解排列組合，無須操作太複雜的分類討論，實在是比較適合當作排列組合的評量考題。</p>

試題編號	E-04
試題原文	<p>A particle travels in a straight line so that, ts after passing through a fixed point O, its velocity v ms^{-1}, is given by $v=3+6\sin 2t$</p> <p>(1) Find the velocity of the particle when $t = \frac{\pi}{4}$</p> <p>(2) Find the acceleration of the particle when $t = 2$</p>
試題翻譯	<p>一微粒以直線行進，在經過固定點 O t 秒後，它的速度為 v 公尺/秒，且滿足 $v = 3 + 6\sin 2t$</p> <p>(1) 試求出此微粒在 $t = \frac{\pi}{4}$ 秒時的速度</p> <p>(2) 試求出此微粒在 $t = 2$ 時的加速度</p>
試題詳解	<p>(1) $v = 3 + 6 \sin(2 \times \frac{\pi}{4}) = 9 \text{ m/s}$</p> <p>(2) $\frac{dv}{dt} = 6(\cos 2t) \times 2 = 12 \cos 2t$，$t = 2$ 時的速度為</p> <p>$12 \cos 4 \approx -7.84 \text{ m/s}^2$</p>
試題解析	<p>評量目標：理解速度隨時間改變的函數，以及速度的微分概念即是加速度。</p> <p>評量中檢測的數學概念：三角函數、三角的導函數。</p> <p>試題分析：</p> <p>理解速度與時間的函數關係，運用三角函數作為連結，檢測學生基本的三角函數能力，以及三角函數的微分、速度的微分為加速度等概念，僅有最後才搭配計算機約估此微粒在 $t = 2$ 時的加速度，讓學生更能體會出此微粒加速度為負的，具備數感的學習。</p>

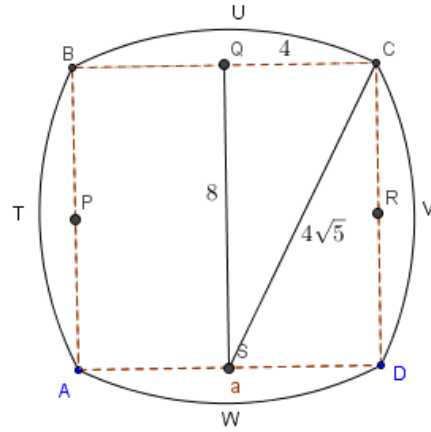
試題編號	E-05
試題原文	<p>The diagram shows a car badge $ATBUCVDWA$, in which $ABCD$ is a square of side 8cm. Points P, Q, R and S are the mid-points of AB, BC, CD and DA respectively. The arc BUC is part of a circle with centre S. Arcs CVD, DWA and ATB have centres P, Q and R respectively.</p> <p>(1) Show that angle BSC is 0.927 radians, correct to 3 significant figures.</p> <p>(2) Find the perimeter of the car badge.</p> <p>(3) Find the area of the car badge.</p> 
試題翻譯	<p>下圖 $ATBUCVDWA$ 為一車子的徽章，$ABCD$ 是一個邊長為 8 公分的正方形，P, Q, R, S 分別為 $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$ 邊上的中點，弧 \widehat{BUC} 是位在 S 為圓心的圓的一部分，同理弧 $\widehat{CVD}, \widehat{DWA}, \widehat{ATB}$ 所在圓的圓心分別為 P, Q, R。</p>  <p>(1) 說明 $\angle BSC \approx 0.927$，精確到小數點後第 3 位。</p> <p>(2) 求此車子徽章的周長</p> <p>(3) 求此車子徽章的面積</p>

試題詳解

(1)

$$\text{由 } \sin \angle CSQ = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin \angle CSB = 2 \times \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5}$$

利用計算器的 $\sin^{-1} 0.8 = 0.927295218... \approx 0.927$



(2) 周長為 $4 \times \widehat{BC} = 4 \times 4\sqrt{5} \times 0.927 \approx 33.165$ 公分

(3) 先求弓形區域(BUC)面積為

$$\frac{1}{2} \times (4\sqrt{5})^2 \times 0.927 - 32 = 5.08$$

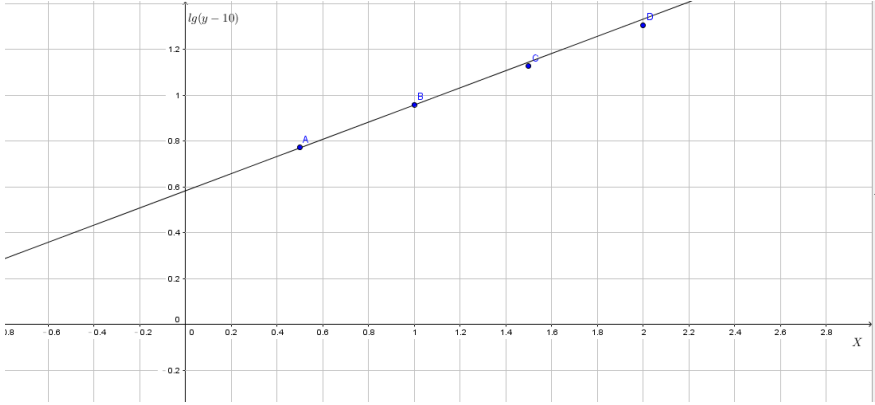
全部的面積 $5.08 \times 4 + 8 \times 8 = 84.32$ 平方公分

試題解析

評量目標：檢測學生能利用角度與弧長及扇形面積的關係，利用量測出弧長，進而求出所對的角度。

評量中檢測的數學概念：扇形的弧長與面積，利用計算器求反三角角度。

試題分析：這題並沒有運到到很深的數學概念，利用簡單的三角比搭配計算器的使用，即可求出角度的近似值。整題中除了角度的近似值外，無理數 $\sqrt{5}$ 的計算，若沒有搭配計算器的使用，角度無法求出，整個的運算也會變得相當複雜，因此如果只是想檢測學生的理解概念，不是考驗計算能力，計算器的搭配是相當有必要的。

試題編號	E-06										
試題原文	<p>The table shows experimental values of two variables, x and y</p> <table border="1" data-bbox="509 344 1252 445"> <tr> <td>x</td> <td>0.5</td> <td>1.0</td> <td>1.5</td> <td>2.0</td> </tr> <tr> <td>y</td> <td>15.9</td> <td>19.1</td> <td>23.4</td> <td>30.2</td> </tr> </table> <p>It is known that x and y are related by the equation $y = 10 + Ab^x$, where A and b are constants.</p> <p>(1) Using graph paper, draw the graph of $\lg(y-10)$ against x and use your graph to estimate the value of A and of b.</p> <p>(2) By drawing a suitable line on your graph, solve the equation $Ab^x = 10^{2x}$.</p>	x	0.5	1.0	1.5	2.0	y	15.9	19.1	23.4	30.2
x	0.5	1.0	1.5	2.0							
y	15.9	19.1	23.4	30.2							
試題翻譯	<p>下列表格表示變數 x, y 的實驗數值</p> <table border="1" data-bbox="509 866 1252 967"> <tr> <td>x</td> <td>0.5</td> <td>1.0</td> <td>1.5</td> <td>2.0</td> </tr> <tr> <td>y</td> <td>15.9</td> <td>19.1</td> <td>23.4</td> <td>30.2</td> </tr> </table> <p>已知 x, y 具有下列方程式 $y = 10 + Ab^x$ 的相關性，其中 A, b 是常數。</p> <p>(1) 使用繪圖紙，畫出 $\log(y-10)$ 對 x 的圖形，並利用圖形估計 A 和 b 的值。</p> <p>(2) 藉由畫出一條適合的直線，求解方程式 $Ab^x = 10^{2x}$</p>	x	0.5	1.0	1.5	2.0	y	15.9	19.1	23.4	30.2
x	0.5	1.0	1.5	2.0							
y	15.9	19.1	23.4	30.2							
試題詳解	<p>將表格轉換如下：</p> <table border="1" data-bbox="509 1317 1252 1417"> <tr> <td>x</td> <td>0.5</td> <td>1.0</td> <td>1.5</td> <td>2.0</td> </tr> <tr> <td>$\lg(y-10)$</td> <td>0.7718</td> <td>0.9590</td> <td>1.1271</td> <td>1.3053</td> </tr> </table> 	x	0.5	1.0	1.5	2.0	$\lg(y-10)$	0.7718	0.9590	1.1271	1.3053
x	0.5	1.0	1.5	2.0							
$\lg(y-10)$	0.7718	0.9590	1.1271	1.3053							


	$y = 10 + Ab^x \Rightarrow y - 10 = Ab^x \Rightarrow \lg(y - 10) = \lg A + (\lg b)x$ <p>由上圖中 AB 直線估計 $\lg b = 0.3744 \Rightarrow b = 10^{0.3744} \approx 2.3680$, $\lg A = 0.5846 \Rightarrow A = 10^{0.5846} \approx 3.8423$</p> <p>(2) $Ab^x = 10^{2x} \Rightarrow \lg(Ab^x) = \lg(10^{2x}) \Rightarrow \lg A + (\lg b)x = 2x$</p> <p>即解 $0.5846 + 0.3744x = 2x \Rightarrow x \approx 0.3596$</p>
<p>試題解析</p>	<p>評量目標：檢測學生能利用對數做方程式的變數變換，並能用方格紙實際繪圖的能力，進而由估計的近似直線求解方程式。</p> <p>評量中檢測的數學概念：直線方程式，指數、對數方程式的轉換。</p> <p>試題分析：</p> <p>(1)新加坡這類的試題與台灣相當不同，當然是因為有計算器的引入，學生能操作這類複雜的計算問題，而且能理解一個較難的指數函數關係，透過對數，能將其變換成直線方程式。下圖是透過滑桿變換 A, b，畫出的指數函數 $y = 10 + Ab^x$，利用拉動滑桿，讓學生感受到我們所求出的值，所形成的指數函數，能讓 4 個點幾乎都在此圖形上。</p> <div data-bbox="438 1153 1316 1568" data-label="Figure"> </div> <p>(2)原本以為 4 個點求直線 x 與 $\lg(10-y)$</p> $y - 10 = Ab^x \Rightarrow \lg(y - 10) = \lg A + (\lg b)x$ <p>須利用回歸方程式，還納悶計算器直接操作否？經了解後才知只需透過任兩點的求直線，約估其斜率及 Y 截距即可，這樣的學習讓學生能輕易地體會透過對數能將曲線轉換成簡易的直線，就能解決指數函數或方程式的相關問題。</p>

使用計算機的數學評量試題研究成果

林信安 老師

臺北市立建國高級中學

試題編號	F-01
試題原文	<p>It is given that $f(x)=x^6-3x^4-7$. The diagram shows the curve with equation $y=f(x)$ and the line with equation $y=-7$, for $x \geq 0$. The curve crosses the positive x-axis at $x=\alpha$, and the curve and the line meet where $x=0$ and $x=\beta$.</p> <p>(i) Find the value of α, giving your answer correct to 3 decimal places, and find the exact value of β.</p> <p>(ii) Evaluate $\int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx$, giving your answer correct to 3 decimal places.</p> <p>(iii) Find, in terms of $\sqrt{3}$, the area of the finite region bounded by the curve and the line, for $x \geq 0$.</p> <p>(iv) Show that $f(x)=f(-x)$. What can be said about the six roots of the equation $f(x)=0$?</p>
試題翻譯	<p>給定 $f(x)=x^6-3x^4-7$ 的圖形，下圖呈現了 $y=f(x)$ 與 $y=-7$ 在 $x \geq 0$ 的部分圖形，圖中的曲線與 x 軸正向交於 $(\alpha, 0)$，與直線 $y=-7$ 交於 $(0, -7)$、$(\beta, -7)$，試回答下列問題：</p> <p>(1) 試求 α 的近似值正確至小數點後第三位，且求 β 的精確值。</p> <p>(2) 計算 $\int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx$ 的近似值正確至小數點後第三位。</p> <p>(3) 求出直線 $y=-7$ 與曲線 $y=f(x)$ 所圍成的有限區域的面積。 (答案請用含有 $\sqrt{3}$ 的項來表示)</p>

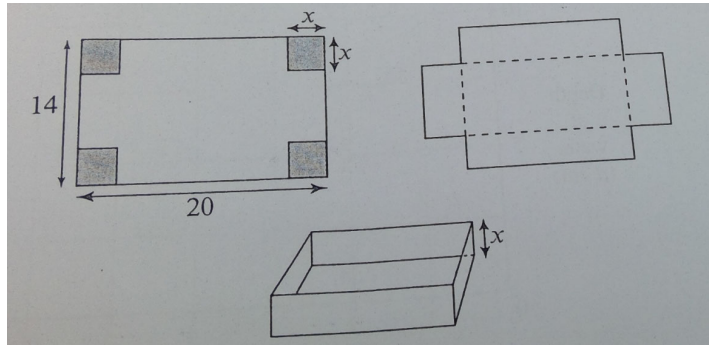
	<p>(4)證明 $f(x)=f(-x)$，據此關於 $f(x)=0$ 的六個根會有甚麼特性呢？</p> 
<p>試題詳解</p>	<p>(1)利用圖形計算機可以算出α的近似值為 1.885。 解 $x^6-3x^4-7=-7 \Rightarrow x^4(x^2-3)=0 \Rightarrow x=0$ 或 $\pm\sqrt{3}$，故 $\beta=\sqrt{3}$。</p> <p>(2)利用圖形計算機可以得到 $\int_{\sqrt{3}}^{1.885} (x^6-3x^4-7) dx$ 的近似值為 -0.597。</p> <p>(3) 直線 $y=-7$ 與曲線 $y=f(x)$ 所圍成的有限區域的面積</p> $= \int_0^{\sqrt{3}} [-7 - (x^6 - 3x^4 - 7)] dx = \int_0^{\sqrt{3}} (-x^6 + 3x^4) dx = \left(-\frac{1}{7}x^7 + \frac{3}{5}x^5 \right) \Big _0^{\sqrt{3}} = \frac{54}{35}\sqrt{3}。$ <p>(4)$f(-x)=(-x)^6-3(-x)^4-7=x^6-3x^4-7=f(x)$。故得證。 設$\alpha$為 $f(x)=0$ 的根，$\therefore f(-\alpha)=f(\alpha)=0$，$\therefore -\alpha$ 也是 $f(x)=0$ 的根 故 $f(x)=0$ 的六個根會對稱 0，而互為相反數。</p>
<p>試題解析</p>	<p>(a)(1)小題評量了計算機與代數方法找根，計算機可以求根的近似值，而代數方法可以將根精確的表達，這個小題，充分顯示使用工具不同，對於方程式的根就會有不同的表達方式。</p> <p>(b)對於定積分的計算，(2)(3)小題則是評量學生是否可以利用計算機與代數方法找到適當形式的答案。(2)中要學生利用計算機直接找定積分值的近似值，而(3)則是結合了不定積分與定積分求面積的概念，用含$\sqrt{3}$的項表達定積分的值。這兩個問題正好兼顧了計算機求近似值與不定積分求精確表達方式這兩個重要的學習目標。</p> <p>(c)(4)小題評量了論證，並且希望學生可以利用論證結果去討論 $f(x)=0$ 根的性質。</p> <p>(d)整體來說，這個大題的設計呈現了兩個面向： 計算機求近似值與數學方法(代數、不定積分)求精確表達方式。兼顧了理論與實際的需求，值得參考與借鏡。</p>

試題編號

F-02

試題原文

A rectangular piece of card measures 20 cm by 14 cm.
Squares of side x cm are cut from the four corners and the card is folded to make an open box

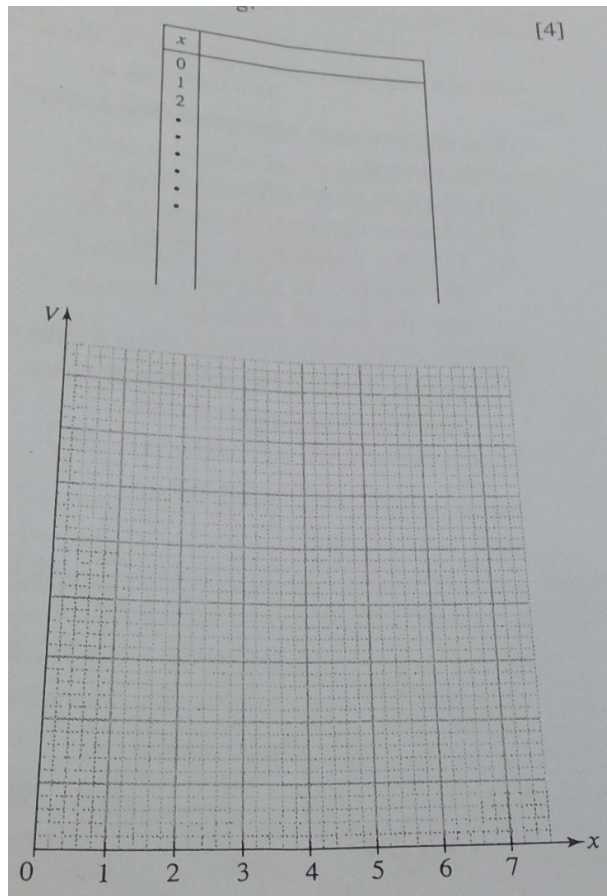


(a) Show that the volume, V cm³, of the box is given by $V=4x(10-x)(7-x)$

(b) You are asked to find the value of x which will produce the greatest volume of the box.

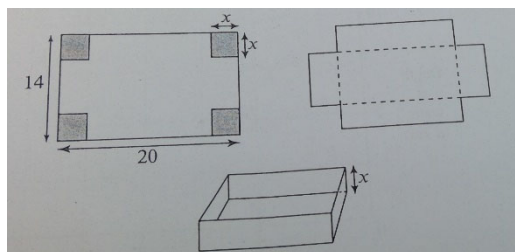
You should use the table and the grid to help you in your investigation .

Marks will be awarded for clear working.



試題翻譯

有一塊白鐵板，長 20 公分、寬 14 公分，今在四角各截去一個相同的“小正方形”，然後摺成一個無蓋的長方體容器，那麼，四個角被截去的小正方形邊長是多少？



設四個角被截去的小正方形邊長是 x 公分，

(1) 設長方體容器的容積為 V 立方公分，

試以 x 表示 V 。

(2) x 可能會等於 8 嗎？

(3) 請利用計算機完成下表：

$x(\text{cm})$	1	2.5	4.5	6
V				

(4) 若想設計出容積為 200 立方公分的容器，那麼 x 大約等於多少？

(計算至小數點後第一位)

(5) 請問根據這樣的設計方式，容積 V 的最大值大約等於多少？

(計算至小數點後第一位)

試題詳解

(1) $V = (20 - 2x)(14 - 2x)x = 4x(10 - x)(7 - x)$

(2) $x > 0$ 且 $10 - x > 0$ 且 $7 - x > 0$ 故 $0 < x < 7$ ，因此 $x \neq 8$ 。

(3)

$x(\text{cm})$	1	2.5	4.5	6
V	216	337.5	247.5	96

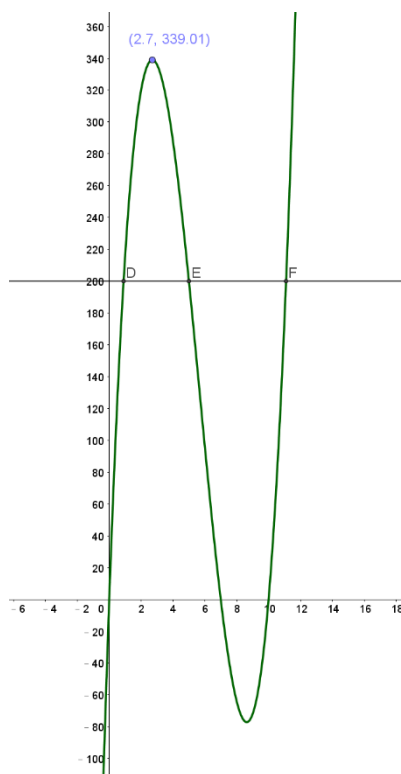
(4) 解 $4x(10 - x)(7 - x) = 200$

可以利用 $y = V(x)$ 與 $y = 200$ 的交點之 x 座標來找解。

交點為 $D(0.9, 200)$ 、 $B(5, 200)$ 、 $C(11.1, 200)$

故 $x = 0.9$ 或 5.0

(5)觀察圖形在 $0 < x < 7$ 的最高點的 y 座標約 $339.01 \approx 339 \text{cm}^3$ 。



試題解析

(a)(1)(2)小題主要是評量學生建立模型的能力。

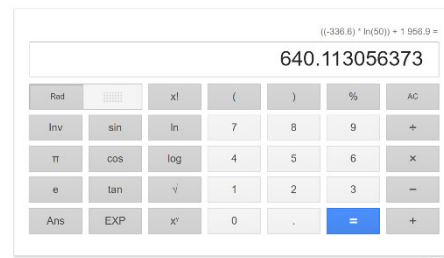
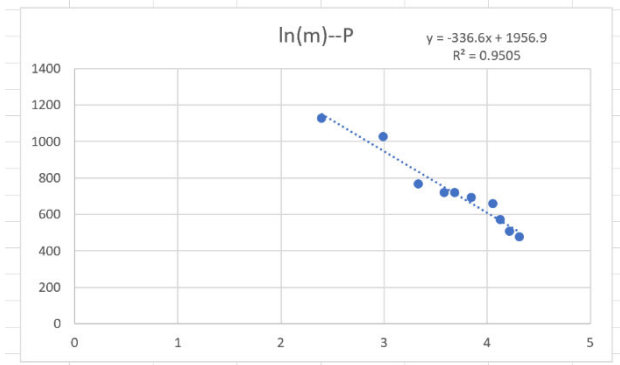
(b)本題是課本常見的問題，若不使用計算機的話，那麼(4)(5)就必須精心設計數據，若是利用圖形計算機的話，可以藉由畫函數圖來找方程式的解與函數的最大值，這其中還隱含了學生要了解函數圖形與方程式的解之間的連結，這個觀念是關鍵概念。因此(4)(5)小題評量計算機畫函數圖形的應用，而不是代數解方程式的能力。

(c)整體問題的設計需要學生能理解問題，利用代數方法與幾何知識形成函數模型，然後圖形計算機派上用場去回答應用問題，因此評量了代數與幾何能力與適當利用工具的素養。

試題編號	F-03																																																
試題原文	<p>The ages in months (m) and prices in dollars (P) of a random sample of ten used cars of a certain model are given in the table</p> <table border="1" data-bbox="395 353 1257 412"> <tr> <td>m</td> <td>11</td> <td>20</td> <td>28</td> <td>36</td> <td>40</td> <td>47</td> <td>58</td> <td>62</td> <td>68</td> <td>75</td> </tr> <tr> <td>P</td> <td>1128</td> <td>1026</td> <td>765</td> <td>720</td> <td>720</td> <td>690</td> <td>658</td> <td>570</td> <td>506</td> <td>476</td> </tr> </table> <p>It is thought that the price after m months can be modeled by one of the formulate</p> <p>$P=am+b$ $P=c \ln m+d$, where a,b,c and d are constants</p> <p>(i) Find, correct to 4 decimal places, the value of product moment correlation coefficient between (A) m and P, (B) $\ln m$ and P</p> <p>(ii) Explain which of $P=am+b$ and $P=c \ln m+d$ is the better model and the equation of suitable regression line of this model.</p> <p>(iii) Use the equation of your regression line to estimate the price of a car that is 50 months old.</p>	m	11	20	28	36	40	47	58	62	68	75	P	1128	1026	765	720	720	690	658	570	506	476																										
m	11	20	28	36	40	47	58	62	68	75																																							
P	1128	1026	765	720	720	690	658	570	506	476																																							
試題翻譯	<p>包含了 10 輛中古車的年紀 m(月)與賣出的價格 P(美元)的一組隨機樣本資料，如下表所示：</p> <table border="1" data-bbox="395 1025 1257 1084"> <tr> <td>m</td> <td>11</td> <td>20</td> <td>28</td> <td>36</td> <td>40</td> <td>47</td> <td>58</td> <td>62</td> <td>68</td> <td>75</td> </tr> <tr> <td>P</td> <td>1128</td> <td>1026</td> <td>765</td> <td>720</td> <td>720</td> <td>690</td> <td>658</td> <td>570</td> <td>506</td> <td>476</td> </tr> </table> <p>上述資料可以用下列兩個模型來擬合</p> <p>(模型 1)$P=am+b$ (模型 2)$P=c \ln m+d$，其中 a,b,c,d 均為定值。</p> <p>(1) 試分別計算下列兩組的相關係數</p> <p>(A) m 與 P (B) $\ln m$ 與 P</p> <p>(2) 請解釋模型 1 與 2 哪個是較好的模型呢？並找出較好那個模型的迴歸直線。</p> <p>(3) 用你找到的迴歸直線去估計年紀為 50 個月的一輛中古車之價格(近似至整數位)。</p>	m	11	20	28	36	40	47	58	62	68	75	P	1128	1026	765	720	720	690	658	570	506	476																										
m	11	20	28	36	40	47	58	62	68	75																																							
P	1128	1026	765	720	720	690	658	570	506	476																																							
試題詳解	<p>(1) 利用 Excel(圖形計算機)，可以分別求出(A)(B)兩組的相關數</p> <table border="1" data-bbox="376 1554 1299 1657"> <tr> <td>m</td> <td>11</td> <td>20</td> <td>28</td> <td>36</td> <td>40</td> <td>47</td> <td>58</td> <td>62</td> <td>68</td> <td>75</td> <td></td> </tr> <tr> <td>P</td> <td>1128</td> <td>1026</td> <td>765</td> <td>720</td> <td>720</td> <td>690</td> <td>658</td> <td>570</td> <td>506</td> <td>476</td> <td>-0.94705</td> </tr> <tr> <td>$\ln(m)$</td> <td>2.397895</td> <td>2.995732</td> <td>3.332205</td> <td>3.583519</td> <td>3.688879</td> <td>3.850148</td> <td>4.060443</td> <td>4.127134</td> <td>4.219508</td> <td>4.317488</td> <td></td> </tr> <tr> <td>P</td> <td>1128</td> <td>1026</td> <td>765</td> <td>720</td> <td>720</td> <td>690</td> <td>658</td> <td>570</td> <td>506</td> <td>476</td> <td>-0.97492</td> </tr> </table> <p>(A) m 與 P 的相關係數為-0.9470；</p> <p>(B) $\ln m$ 與 P 的相關係數為-0.9749</p> <p>(2) 理由如下：</p> <p>(1°) 若根據相關係數來評斷模型的優劣，則模型二是較好的模型。</p> <p>而若選用模型二，那麼因為 $\ln m$ 與 P 的迴歸直線為 $y=-336.6x+1956.9$ 因此 $P=-336.6 \ln m+1956.9$</p>	m	11	20	28	36	40	47	58	62	68	75		P	1128	1026	765	720	720	690	658	570	506	476	-0.94705	$\ln(m)$	2.397895	2.995732	3.332205	3.583519	3.688879	3.850148	4.060443	4.127134	4.219508	4.317488		P	1128	1026	765	720	720	690	658	570	506	476	-0.97492
m	11	20	28	36	40	47	58	62	68	75																																							
P	1128	1026	765	720	720	690	658	570	506	476	-0.94705																																						
$\ln(m)$	2.397895	2.995732	3.332205	3.583519	3.688879	3.850148	4.060443	4.127134	4.219508	4.317488																																							
P	1128	1026	765	720	720	690	658	570	506	476	-0.97492																																						

(2°)。
 若選擇模型一，
 其迴歸直線為 $y = -9.3285x + 1141$ ，
 當 m 超過 123 時， $P < 0$ 這是不合理的情形，故選擇模型二。
 (3°)根據(2)所找出的模型：

$P = -336.6 \ln m + 1956.9$
 令 $m = 50$ 代入上述模型，
 可以計算得 $P = 640$ 。
 因此一輛中古車的價格
 是 $\frac{640}{10} = 64$ (美元)。



試題解析

(a)(1)小題是利用計算機求相關係數的問題。
 (b)相關係數所呈現的相關強度是判定模型好壞的標準之一，因為這個問題並沒有提出其他資料，因此(2)小題評量學生是否能夠使用相關係數來判斷模型的優劣。
 除了用相關係數判斷模型的優劣外，(2)也測驗學生是否可以用計算機找出迴歸直線，並且寫出最佳模型。
 (c)(3)小題則是延續(2)中找出的模型，使用這個模型來估計一輛 50 個月車齡的中古車之價格。
 (d)這個大題主要是評量學生使用數據找最佳模型，並且利用找到的模型來做估計。為了考試時間與評量便利性起見，因此限定了兩個模型優劣的比較，而沒有讓學生開放性的選擇模型。大致上來說，這個問題中的各小題，已經都呈現了建立模型的基本步驟，是一個測驗數學建模基本能力的好問題。

試題編號	F-04
試題原文	<p>The mass, x grams, of a certain substance present in a chemical reaction at time t minutes satisfies the differential equation</p> $\frac{dx}{dt} = k(1+x-x^2)$ <p>Where $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ and k is a constant.</p> <p>It is given that $x = \frac{1}{2}$ and $\frac{dx}{dt} = \frac{-1}{4}$ when $t = 0$</p> <p>(i) Show that $k = \frac{-1}{5}$.</p> <p>(ii) By first expressing $1+x-x^2$ in complete square form, find t in term of x.</p> <p>(iii) Hence find</p> <p>(a) the exact time taken for the mass of the substance present in the chemical reaction to become half of its initial value.</p> <p>(b) the time taken for there to be none of the substance present in the chemical reaction, giving your answer correct to 3 decimal places.</p> <p>(iv) Express the solution of the differential equation in the form $x = f(t)$ and sketch the part of the curve with this equation which is relevant in this context.</p>
試題翻譯	<p>質量 x 克的某種物質在 t 分鐘後的一個化學反應過程中滿足以下微分方程式：</p> $\frac{dx}{dt} = k(1+x-x^2)$ <p>其中 $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$，$k$ 是一個常數，今已知 $t = 0$ 時，$x = \frac{1}{2}$ 且 $\frac{dx}{dt} = \frac{-1}{4}$，試回下列各問題：</p> <p>(1) 證明：$k = \frac{-1}{5}$。</p> <p>(2) 藉由將 $1+x-x^2$ 化成完全平方式，用 x 來表示 t。</p> <p>(3) 由(1)(2)回答下列小題：</p> <p>(a) 求出化學反應的過程中，物質的質量變成一開始反應時的一半之時間。</p> <p>(b) 試求化學反應的過程中，此物質消失的時間。(將你的答案約至 3 位小數)</p> <p>(4) 將微分方程式的解用 $x = f(t)$ 來表示，並且畫出題目所對應的解之圖形。</p>

試題詳解

[解法]：

$$(1) \because t=0 \text{ 時, } x=\frac{1}{2} \text{ 且 } \frac{dx}{dt}=\frac{-1}{4}, \therefore \frac{dx}{dt}(0)=k\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=\frac{-1}{4}$$
$$\Rightarrow k=\frac{-1}{5}。$$

$$(2) 1+x-x^2=\frac{5}{4}-(x-\frac{1}{2})^2=-(x-\alpha)(x-\beta), \text{ 其中 } \alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{dx}{dt}=k(1+x-x^2) \Rightarrow \frac{dx}{-k(x-\alpha)(x-\beta)}=dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{-k(x-\alpha)(x-\beta)} = \int 1 \cdot dt \Rightarrow \frac{-1}{k} \int \frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)} dx = t$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{k} \left(\frac{1}{\alpha-\beta} \right) \int \left[\frac{1}{x-\alpha} - \frac{1}{x-\beta} \right] dx = t, \text{ 令 } \frac{-1}{k} \left(\frac{1}{\alpha-\beta} \right) = k_1$$

$$\Rightarrow k_1 (\ln \left| \frac{x-\alpha}{x-\beta} \right| + c_1) = t, \text{ 將 } k=\frac{-1}{5}, \alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ 可以得知 } k_1=\sqrt{5}$$

$$\because 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, t=0 \text{ 時, } x=\frac{1}{2}, \therefore \text{ 代入 } k_1 (\ln \left| \frac{x-\alpha}{x-\beta} \right| + c_1) = t \Rightarrow c_1=0$$

$$\text{因此 } t=\sqrt{5} \ln \left(\frac{\alpha-x}{x-\beta} \right)。$$

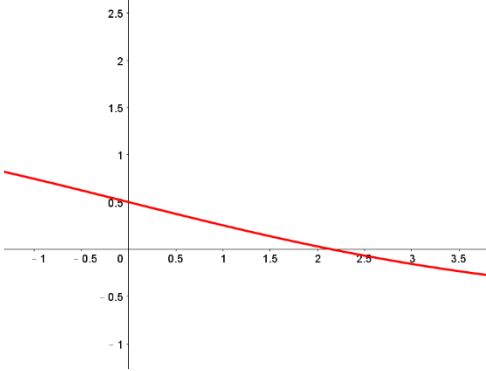
$$(3)(a) \text{ 設所求時間為 } T, \text{ 故 } T=\sqrt{5} \ln \left(\frac{\alpha-\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}-\beta} \right) \Rightarrow T=\sqrt{5} \ln \left(\frac{21+4\sqrt{5}}{19} \right)。$$

$$(b) \text{ 設所求時間為 } t_0, \text{ 故 } t_0=\sqrt{5} \ln \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right) \approx 2.152。$$

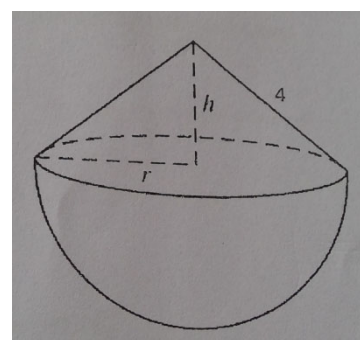
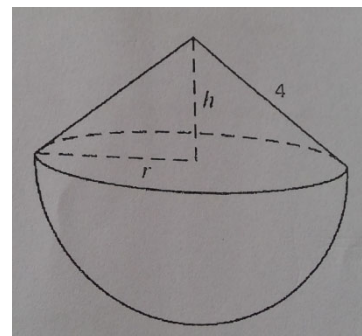
$$(4) \text{ 由(2) } t=\sqrt{5} \ln \left(\frac{\alpha-x}{x-\beta} \right) \Rightarrow e^{\frac{t}{\sqrt{5}}} = \frac{\alpha-x}{x-\beta}$$

$$\Rightarrow x = \left(\frac{\alpha + \beta e^{\frac{t}{\sqrt{5}}}}{1 + e^{\frac{t}{\sqrt{5}}}} \right) = \frac{(1+\sqrt{5}) + (1-\sqrt{5})e^{\frac{t}{\sqrt{5}}}}{2(1+e^{\frac{t}{\sqrt{5}}})}$$

$$x=f(t) = \frac{(1+\sqrt{5}) + (1-\sqrt{5})e^{\frac{t}{\sqrt{5}}}}{2(1+e^{\frac{t}{\sqrt{5}}})}。$$

	<p>部分圖形如右所示：</p> 
<p>試題解析</p>	<p>[試題解析]：</p> <p>整體來說，這個大題的設計呈現了兩個面向：</p> <p>微分方程式 $\frac{dx}{dt} = k(1+x-x^2)$ 解的意義與解法，計算機求近似值與畫圖。兼顧了理論與實際的需求，值得參考與借鏡。</p>

試題編號	F-05
試題原文	<p>[It is given that the volume of a sphere of a sphere of radius r is $\frac{4}{3}\pi r^3$ and that the volume of a circular cone with base radius r and height h is $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.]</p> <p>A toy manufacturer makes a toy which consists of a hemisphere of radius r cm jointed to a circular cone of base radius r cm and height h cm (see diagram). The manufacturer determines that the length of the slant edge of the cone must be 4 cm and that the total volume of the toy, $V\text{cm}^3$, should be as large as possible.</p> <p>(i) Find a formula for V in terms of r. Given that $r=r_1$ is the value of which gives the maximum value of V, show that r_1 satisfies the equation $45r^4 - 768r^2 + 1024 = 0$.</p> <p>(ii) Find the two solutions of the equation in part(i) for which $r > 0$, giving your answers correct to 3 decimal places.</p> <p>(iii) Show that one of solutions of found in part(ii) does not give a stationary value of V. Hence write down the value of r_1 and find the corresponding value of h.</p> <p>(iv) Sketch the graph showing the volume of the toy as the radius of the hemisphere varies.</p>
試題翻譯	<p>一個玩具製造商做了一個玩具，此玩具包含一個半徑 r 公分的半球面上方連一個高 h cm 半徑 r cm 的直圓錐面。此製造商決定讓直圓錐面的斜高盡可能保持 4 cm，設此玩具的體積為 $V\text{cm}^3$，試回答下列問題：</p> <p>(1) 用 r 來表示 V，設 $r=r_1$ 時，V 有最大值，證明 r_1 滿足 $45r^4 - 768r^2 + 1024 = 0$。</p> <p>(2) 找出(1)中方程式的正根，答案正確至三位小數。</p> <p>(3) 證明(2)解出的某一個根不是 V 的最大點，藉此寫出 V 發生最大值時半徑與高。</p> <p>(4) 畫出 $V(r)$ 的部分圖形。</p>



試題詳解

[解法]：

$$(1)V(r)=\frac{\pi}{3}(r^2\sqrt{16-r^2}+2r^3), 0<r<4$$

$\therefore r=r_1$ 時， V 有最大值，此時 $0<r_1<4$

$V'(r_1)$ 存在，根據 Fermat's 定理

$$V'(r_1)=0$$

$$V'(r)=\frac{\pi r}{3}\left[\frac{32-3r^2}{\sqrt{16-r^2}}+6r\right]$$

$$\Rightarrow r_1 \text{ 滿足 } \frac{32-3r^2}{\sqrt{16-r^2}}+6r=0 \Rightarrow 6r\sqrt{16-r^2}=3r^2-32$$

$$\Rightarrow (6r\sqrt{16-r^2})^2=(3r^2-32)^2 \Rightarrow 45r^4-768r^2+1024=0$$

(2)

$$\text{令 } r^2=t \Rightarrow 45t^2-768t+1024=0$$

解得 $t=15.60879955$ 或

$$1.457867114 \Rightarrow r=1.207 \text{ 或 } 3.950$$

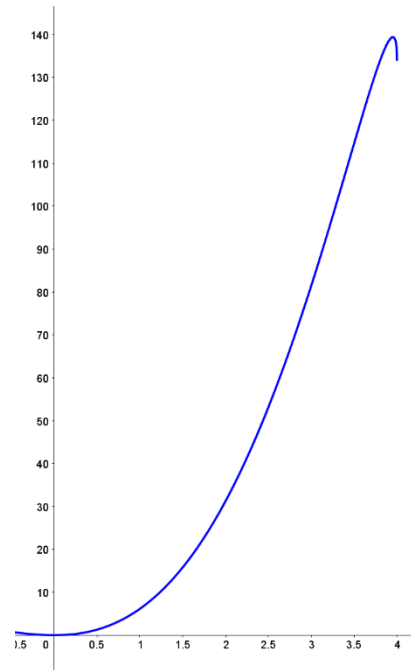
$$(3)\therefore r_1 \text{ 滿足 } \frac{32-3r^2}{\sqrt{16-r^2}}+6r=0$$

$$\Rightarrow 6r\sqrt{16-r^2}=3r^2-32>0, \text{ 故}$$

$$r\approx 3.950 (r\approx 1.207 \text{ 不合})$$

(4)

$V(r)$ 的部分圖形如右圖所示：



試題解析

[試題解析]：

(1)典型形成函數模型找最大值的問題，

(2)利用計算機找到方程式的近似值。

(3)能夠由解方程式的過程中，判別解的合理性。

(4)利用計算機畫函數圖形。

(5)整體來說，這個問題評量了形成函數，利用微分的理論找出最大值得過程。計算機所扮演的角色是找解的近似值與畫函數圖形。

試題編號	F-06
試題原文	<p>The International Meteorological Organization uses the Beaufort scale to measure wind levels. The classification formula is as follows:</p> $V=0.836 \times B^{\frac{3}{2}} \quad \text{where } V(\text{m/sec}) \text{ speed of wind, } B \text{ is wind level}$ <p>(1) Find wind level B in terms of wind speed V . (2) A typhoon wind speed of 17 m/sec, and asked the wind to be announced as several winds. (correct to integer)</p>
試題翻譯	<p>國際氣象組織採用蒲福風級法(Beaufort scale)量測風級，分級的公式如下：</p> $V=0.836 \times B^{\frac{3}{2}}$ <p>，其中 V 是風速(公尺/秒)，B 是風級。</p> <p>(1)請用風速 V 來表示風級 B。 (2)一個颱風風速為 17 公尺/秒，試問其風力應該公告為幾級風。(正確至整數位)</p>
試題詳解	<p>[解法]：</p> <p>(1) $V=0.836 \times B^{\frac{3}{2}} \Rightarrow B^{\frac{3}{2}} = \frac{V}{0.836} \Rightarrow B = \left(\frac{V}{0.836}\right)^{\frac{2}{3}}$</p> <p>(2) $17=0.836 \times B^{\frac{3}{2}} \Rightarrow B^{\frac{3}{2}} = \frac{17}{0.836} \Rightarrow B = \left(\frac{17}{0.836}\right)^{\frac{2}{3}} \approx 7$ 級</p>
試題解析	<p>[解析]：</p> <p>(a)本問題設計的要點是評量指數的性質，最後使用計算機求出近似值。同時測驗了代數與適當使用工具的素養。</p> <p>(b)沒使用計算機時，可能只能問幾級風時，風速多少公尺/秒，並且要列出方根的計算結果。可以使用計算機的話，就不受這些限制了。</p>