6.2. Fourier Integral

在這一節中我們將介紹 Fourier integral 的基本概念及其簡單的應用。

6.2.1. 基本概念. 上一節中，我們了解到 Fourier series 針對週期函數或是在某固定有限區間的函數，特別有用。Fourier integral 就是想把這樣的概念推廣到定義在整個實數的函數。基本的想法是先考慮週期為 $2L$ 的週期函數，然後觀察當 $L\to\infty$ 時會有怎樣的狀況發生。

首先考慮一般的函數 $f(x)$ 且給定 L，令 $f_L(x)$ 為 $f(x)$ 在 $-L<x<L$ 的部分再擴展成為週期 $2L$ 的週期函數。為了方便起見，我們令 $w_n=\frac{n\pi}{L}$, $\forall n\in\mathbb{N}$。此時 $f_L(x)$ 的 Fourier series 可表為 $a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos w_nx+b_n\sin w_nx)$。不過這個式子看不出 $f_L(x)$ 的影響，所以我們將 Euler formula 寫回去得到

$$f_L(x)=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f_L(t)\,dt+\frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos w_nx(\int_{-L}^{L}f_L(t)\cos w_nt\,dt)+\sin w_nx(\int_{-L}^{L}f_L(t)\sin w_nt\,dt)\right). \tag{6.7}$$

現在考慮 $L\to\infty$，我們有 $f(x)=\lim_{L\to\infty}f_L(x)$。若瑕積分

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}|f(t)|\,dt+\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b}|f(t)|\,dt$$

收斂（此條件一般稱 $f(x)$ 在實數軸為“絕對可積” *absolutely integrable*），此時式子 (6.7) 等式右邊的第一項會有 $\lim_{L\to\infty}\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f_L(t)=0$, 因為 $\int_{-L}^{L}f_L(t)\,dt$ 會趨近於定值且 $\frac{1}{2L}$ 會趨近於 0。接下來我們專注於式子 (6.7) 等式右邊第一項之後的各項。由於對每個 n，皆有 $w_{n+1}-w_n=\frac{\pi}{L}$，若令 $\triangle w=\frac{\pi}{L}$，我們有

$$\frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\cos w_nx(\int_{-L}^{L}f_L(t)\cos w_nt\,dt)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(\cos w_nx)\triangle w(\int_{-L}^{L}f_L(t)\cos w_nt\,dt) \tag{6.8}$$

由於當 $L\to\infty$，我們有 $w_1\to 0$, 所以可以將 $w_1,w_2,\ldots,w_n,\ldots$ 視為將區間 $(0,\infty)$ 做均勻的分割，每段長為 $w_{n+1}-w_n=\triangle w$。由黎曼和的概念，當 $L\to\infty$，式子 (6.8) 會趨近於

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}(\cos wx)(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos wt\,dt)\,dw.$$

注意，由於 $f(x)$ 在整個實數上是 absolutely integrable，對任意正實數 w，瑕積分 $\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos wt\,dt$ 會收斂，我們令 $\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos wt\,dt$ 收斂值為 $A(w)$。由於 $A(w)$ 的值取決於 w 的值，所以 $A(w)$ 是一個以 w 為變數定義在正實數的實函數。也因此，我們得式子 (6.8) 在 $L\to\infty$ 時會趨近於 $\int_{0}^{\infty}A(w)\cos wx\,dw$. 同理，當 $L\to\infty$ 時 $\frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\sin w_nx(\int_{-L}^{L}f_L(t)\sin w_nt\,dt)$ 會趨近於

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}(\sin wx)(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin wt\,dt)\,dw.$$

由於瑕積分 $\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin wt\,dt$ 也收斂，我們令 $\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin wt\,dt$ 收斂值為 $B(w)$。

綜合上面的討論，考慮 $L \to \infty$，由式子 (6.7) 我們可推得，當 $f(x)$ 滿足一定的條件時，$f(x)$ 會有所謂的 *Fourier integral* 表示法，即

$$f(x) = \int_0^\infty (A(w)\cos wx + B(w)\sin wx)\,dw.$$

到底 $f(x)$ 要滿足怎樣的條件才會有 Fourier integral 呢？我們有以下和 Theorem 6.1.1 相似的定理：

Theorem 6.2.1. 假設 $f(x)$ 在任意有限區間都僅有有限多個不連續點（即 *piecewise continuous*），且在每一點其左微分與右微分皆存在。若 $f(x)$ 在整個實數是 *absolutely integrable*，則 $f(x)$ 的 *Fourier integral* 必處處收斂，且 $f(x)$ 在點 x 為連續時其 *Fourier integral* 的收斂值就是 $f(x)$；而在 $f(x)$ 不連續的點 x_0，其 *Fourier integral* 的收斂值為在 x_0 的左極限與右極限的平均值，即 $\frac{1}{2}(f(x_0^-)+f(x_0^+))$。

Example 6.2.2 (課本 Example 11.7.2)**.** 考慮 $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } |x|<1; \\ 0, & \text{if } |x|>1. \end{cases}$ 由於 $f(x)$ 僅在 $-1,1$ 不連續且 $f(x)$ 在每一點的左微分與右微分皆存在（都是 0），又瑕積分 $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx = 2$ 收斂，所以 $f(x)$ 有 Fourier integral 的表示法。

首先我們計算

$$A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos wt\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\cos wt\,dt = \frac{2\sin w}{\pi w}; \quad B(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sin wt\,dt = 0.$$

故得 $f(x)$ 的 Fourier integral 表示法為

$$f(x) = \int_0^\infty (A(w)\cos wx + B(w)\sin wx)\,dw = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin w}{w}\cos wx\,dw.$$

由於 $f(x)$ 僅在 $x=-1, x=1$ 不連續，利用 Theorem 6.2.1，當 $|x|<1$ 時，我們有

$$\int_0^\infty \frac{\sin w}{w}\cos wx\,dw = \frac{\pi}{2}f(x) = \frac{\pi}{2};$$

而當 $|x|>1$ 時，我們有

$$\int_0^\infty \frac{\sin w}{w}\cos wx\,dw = \frac{\pi}{2}f(x) = 0.$$

又由於 $f(x)$ 在 $x=-1, x=1$ 的左右極限的平均值為 $\frac{1}{2}$，我們也有

$$\int_0^\infty \frac{\sin w}{w}\cos(-w)\,dw = \int_0^\infty \frac{\sin w\cos w}{w}\,dw = \frac{\pi}{4}.$$

這是 Fourier integral 的一個很重要的應用，它可以幫我們計算一些瑕積分的收斂值（就像在 Example 6.1.2 中，Fourier series 可以幫我們計算無窮級數的收斂值）。

這些瑕積分的值，在 $x=0$ 的情況特別重要，因為 $\cos 0 = 1$，此時我們有

$$\int_0^\infty \frac{\sin w}{w}\,dw = \frac{\pi}{2}.$$

有一個積分函數稱為 *sine integral* 在數學上很重要，它的定義為 $\mathrm{Si}(u) = \int_0^u \frac{\sin w}{w}\,dw$. 所以我們知道 $\mathrm{Si}(u)$ 在 $u \to \infty$ 的極限值為 $\frac{\pi}{2}$。 ♯

在上一節談論週期函數的 Fourier series 時，我們提及利用 Fourier series 來估計函數值，估計的方式就是計算到有限項 $n=N$ 的級數和。同樣的，對於有 Fourier integral 的函數 $f(x)$，我們也可以用 Fourier integral 來估計函數值。由於 $f(x)=\int_0^\infty (A(w)\cos wx+B(w)\sin wx)\,dw$，估計的方法就是考慮積分 $\int_0^u (A(w)\cos wx+B(w)\sin wx)\,dw$ 當 u 的取值越大，所得的積分值就越接近 $f(x)$ 的值。

Question 6.13. 試求 $h(x)=\begin{cases} 0, & \text{if} \quad x<0; \\ 1, & \text{if} \quad 0<x<1; \\ 0, & \text{if} \quad x>1 \end{cases}$ 的 *Fourier integral*。

6.2.2. 一些簡化計算的方法. 和 Fourier series 一樣，在計算一個函數的 Fourier integral 時，也有一些情形可以簡化我們的計算。這些簡化的方法都與 Fourier series 的情形相似，大家可以互相對照。

首先我們看 $f(x)$ 是偶函數的情形，此時由於 $f(t)\sin wt$ 是奇函數且在實數上為 absolutely integrable，我們有 $B(w)=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(t)\sin wt\,dt=0$. 也因此得 $f(x)=\int_0^\infty A(w)\cos wx\,dw$. 又因為 $f(t)\cos wt$ 是偶函數且在實數上為 absolutely integrable，這裡 $A(w)$ 也可簡化成 $A(w)=\dfrac{2}{\pi}\int_0^\infty f(t)\cos wt\,dt$. 我們也稱這樣的表示法為 *Fourier cosine integral*。也就是說當 $f(x)$ 為偶函數若且唯若 $f(x)$ 的 Fourier integral 為 Fourier cosine integral。在 Example 6.2.2 中，$f(x)$ 是偶函數，所以它有 Fourier cosine integral 表示法。以後在計算時，我們可以因 $f(x)$ 為偶函數，直接計算 $A(w)$ 來寫下其 Fourier integral。

當 $f(x)$ 是奇函數的情形，此時由於 $f(t)\cos wt$ 是奇函數，同理我們有 $A(w)=0$. 也因此得 $f(x)=\int_0^\infty B(w)\cos wx\,dw$，其中 $B(w)$ 也可簡化成 $B(w)=\dfrac{2}{\pi}\int_0^\infty f(t)\sin wt\,dt$. 我們也稱這樣的表示法為 *Fourier sine integral*。也就是說當 $f(x)$ 為奇函數若且唯若 $f(x)$ 的 Fourier integral 為 Fourier sine integral。

Question 6.14. 做課本習題 *11.7.4*（請先說明考慮的函數是否為偶函數或奇函數）。

另一種情況是當 $f(x),g(x)$ 都有 Fourier integral，則對任意實數 r,s，函數 $rf(x)+sg(x)$ 也會有 Fourier integral。假設我們已知 $f(x),g(x)$ 的 Fourier integral 分別為

$$f(x)=\int_0^\infty (A(w)\cos wx+B(w)\sin wx)\,dw;\quad g(x)=\int_0^\infty (\tilde{A}(w)\cos wx+\tilde{B}(w)\sin wx)\,dw,$$

則我們可以馬上確定 $rf(x)+sg(x)$ 的 Fourier integral 為

$$rf(x)+sg(x)=\int_0^\infty ((rA(w)+s\tilde{A}(w))\cos wx+(rB(w)+s\tilde{B}(w))\sin wx)\,dw.$$

在談論 Fourier series 時，我們探討過 half-range expansion 的概念，大致上是利用 Fourier series 來了解函數在某一區間的情形，基本的概念就是將其擴大成一個週期偶函數或奇函數來處理。同樣的概念，當我們有一個定義在正實數的函數且為 absolutely integrable，我們自然可以將其擴展到整個實數，也就是負實數的部分皆令為 0，此時仍為 absolutely integrable，所以自然有 Fourier integral。不過既然我們只關心該函數在正實數的部分，我們可以定義其在負實數的部分使其成為偶函數或奇函數，如此便可簡化計算，求其 Fourier cosine integral 或 Fourier sine integral 即可。我們看以下的例子。

Example 6.2.3 (課本 Example 11.7.3)**.** 給定一正實數 k，考慮定義在正實數的函數 $f(x)=e^{-kx}$。由於瑕積分 $\int_0^\infty e^{-kx}\,dx=\frac{1}{k}$，得 $f(x)$ 在正實數為 absolutely integrable. 我們想用 Fourier integral 來表示 $f(x)$。

首先我們重新定義 $f(x)$ 在負實數上的取值，使其為偶函數，也就是定義

$$f(x)=\begin{cases} e^{-kx}, & \text{if } x>0;\\ e^{kx}, & \text{if } x<0.\end{cases}$$

依此我們僅求 $A(w)$ 就可得 $f(x)$ 的 Fourier cosine integral。由於 $A(w)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-kt}\cos wt\,dt$, 利用兩次的分部積分（或用查表）可得

$$\int e^{-kt}\cos wt\,dt=\frac{e^{-kt}}{k^2+w^2}(w\sin wt-k\cos wt).$$

由於當 $t\to\infty$ 時 $e^{-kt}\to 0$，以及 $t=0$ 時 $e^{-kt}=1,\sin wt=0,\cos wt=1$，故得 $A(w)=\frac{2k}{\pi(k^2+w^2)}$。也因此我們可以得到 e^{-kx} 的 Fourier cosine integral 的表示法

$$e^{-kx}=\frac{2k}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos wx}{k^2+w^2}\,dw,\quad x>0.$$

注意，這個積分式只適用於 $x>0$ 的情形；當代入 $x<0$，會等於 e^{kx}。

同理，我們也可重新定義 $f(x)$ 在負實數上的取值，使其為奇函數，也就是定義

$$f(x)=\begin{cases} e^{-kx}, & \text{if } x>0;\\ -e^{kx}, & \text{if } x<0.\end{cases}$$

依此我們僅求 $B(w)$ 就可得 $f(x)$ 的 Fourier sine integral。由於 $B(w)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-kt}\sin wt\,dt$, 利用分部積分可得 $B(w)=\frac{2w}{\pi(k^2+w^2)}$。也因此我們可以得到 e^{-kx} 的 Fourier sine integral 的表示法

$$e^{-kx}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{w\sin wx}{k^2+w^2}\,dw,\quad x>0.$$

總合以上 e^{-kx} 的 Fourier cosine integral 以及 Fourier sine integral，我們得到兩個很重要的積分式。即，對於任意的正實數 k 以及 x，皆有

$$\int_0^\infty \frac{\cos wx}{k^2+w^2}\,dw=\frac{\pi}{2k}e^{-kx};\quad \int_0^\infty \frac{w\sin wx}{k^2+w^2}\,dw=\frac{\pi}{2}e^{-kx}.$$

這兩個積分式稱為 *Laplace integrals*。 ♯

Question 6.15. *做課本習題 11.7.7, 11.7.17。並說明 11.7.7 的積分式為何與講義 Example 6.2.2（課本 Example 11.7.2）的積分式相同？*

Question 6.16. *課本習題 11.7.7, 11.7.17 的函數雖相同，但其結果分別是將其擴展成兩個不同（定義在整個實數）的函數 $g_1(x)$ 和 $g_2(x)$ 的 Fourier integral 所得。請將 Question 6.13 的函數 $h(x)$ 寫成 $g_1(x),g_2(x)$ 的線性組合（即找到實數 r,s 使得 $h(x)=rg_1(x)+sg_2(x)$），並利用 Question 6.15 的結果，寫下 $h(x)$ 的 Fourier integral（請檢查是否和 Question 6.13 的結果一致）。*