6.2.3. Complex Fourier Integral. 前面介紹的 Fourier integral 的積分式都是實函數，所謂 Complex Fourier Integral 就是將其利用從前介紹過的 $e^{r+i\theta}=e^r(\cos\theta+i\sin\theta)$（注意 $i=\sqrt{-1}$）轉變成複數函數的積分。

首先我們將 Fourier integral 中的 $A(w),B(w)$ 重新寫回積分式，即

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty(\cos wx)(\int_{-\infty}^\infty f(t)\cos wt\,dt)\,dw+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty(\sin wx)(\int_{-\infty}^\infty f(t)\sin wt\,dt)\,dw.\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty f(t)(\cos wx\cos wt+\sin wx\sin wt)\,dt\,dw\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty f(t)\cos(wx-wt)\,dt\,dw.
\end{aligned}$$

給定 x，若令 $F(w)=\int_{-\infty}^\infty f(t)\cos(wx-wt)\,dt$，則因 $\cos(-wx+wt)=\cos(wx-wt)$ 我們有

$$F(-w)=\int_{-\infty}^\infty f(t)\cos(-wx+wt)\,dt=\int_{-\infty}^\infty f(t)\cos(wx-wt)\,dt=F(w).$$

也就是說 $F(w)$ 是偶函數，因此可得

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty F(w)\,dw=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty F(w)\,dw=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty f(t)\cos(wx-wt)\,dt\,dw. \tag{6.9}$$

我們將 $f(x)$ 的積分式中 w 原本從 0 積到 ∞ 改為式子 (6.9) 從 $-\infty$ 積到 ∞ 的原因是想要加入積分式 $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty f(t)\sin(wx-wt)\,dt\,dw$. 注意若令 $G(w)=\int_{-\infty}^\infty f(t)\sin(wx-wt)\,dt$，則由 $\sin(-wx+wt)=-\sin(wx-wt)$ 我們有

$$G(-w)=\int_{-\infty}^\infty f(t)\sin(-wx+wt)\,dt=-\int_{-\infty}^\infty f(t)\sin(wx-wt)\,dt=-G(w).$$

也就是說 $G(w)$ 是奇函數，因此可得

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty f(t)\sin(wx-wt)\,dt\,dw=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty G(w)\,dw=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty G(w)\,dw+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^0 G(w)\,dw=0. \tag{6.10}$$

將式子 (6.10) 多乘上 $\sqrt{-1}$ 加到式子 (6.9)，我們得

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty f(t)\cos(wx-wt)\,dt\,dw+i\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty f(t)\sin(wx-wt)\,dt\,dw\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty f(t)(\cos(wx-wt)+i\sin(wx-wt))\,dt\,dw.
\end{aligned}$$

最後利用 $\cos(wx-wt)+i\sin(wx-wt)=e^{iw(x-t)}$，我們得

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty f(t)e^{iw(x-t)}\,dt\,dw.$$

這就是 $f(x)$ 的 *complex Fourier integral.*

Example 6.2.4. 考慮 Example 6.2.2 中 $f(x)=\begin{cases}1, & \text{if } |x|<1;\\ 0, & \text{if } |x|>1.\end{cases}$ 我們有 $f(x)$ 的 complex Fourier integral 為 $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty\int_{-1}^1 e^{iw(x-t)}\,dt\,dw=\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty\frac{e^{iwx}}{w}(e^{-iw}-e^{iw})\,dw.$ ♯

了解了 complex Fourier integral，我們便可探討 Fourier transform 了。

6.3. Fourier Transform

我們曾經介紹過 Laplace transform，由於它將微分的動作轉換成簡單的代數運算，所以在處理微分方程時是一個重要的工具，另外它也能幫我們處理一些特殊的函數（step functions; impulse function）。Fourier transform 也和 Laplace transform 有類似的特性，對我們處理微分方程以及一些特殊函數，也是一個重要的工具。在這一節，我們將介紹 Fourier transform 的基本概念及性質。留待其應用在下一章介紹偏微方程再介紹。

6.3.1. Fourier Cosine and Sine Transforms. 我們先探討較簡單的 Fourier cosine 和 Fourier sine transform. 顧名思義，Fourier cosine transform 適用於偶函數，而 Fourier sine transform 適用於奇函數。至於定義在正實數的函數，我們可以利用前面談過擴張的方式，使用 Fourier cosine transform 以及 Fourier sine transform. 另外要注意的是，這裡的函數都必須符合 Theorem 6.2.1 中所提的條件（piecewise cotinuous, absolutely integrable 等），確保其 Fourier integral 存在。我們就不再重複說明及強調了。

首先我們談 Fourier cosine transform。當 $f(x)$ 是偶函數或定義在正實數的函數，我們有 $f(x)$ 的 Fourier cosine integral $f(x) = \int_0^\infty A(w)\cos wx\,dw$, 其中 $A(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(t)\cos wt\,dt$. 我們將 $A(w)$ 除以 $\sqrt{2/\pi}$（即乘以 $\sqrt{\pi/2}$）後所得的函數稱為 $f(x)$ 的 *Fourier cosine transform* 並用 $\mathscr{F}_c(f)$ 或 $\hat{f}_c(w)$ 表示，也就是

$$\mathscr{F}_c(f) = \hat{f}_c(w) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}A(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\cos wt\,dt.$$

這裡除以 $\sqrt{2/\pi}$ 只是傳統上方便使用（基本上是為了使得與反向的 transform 形式一致）。而轉換後的函數我們用 w 來表示其變數，也是為了方便辨別是轉換前（用 x 表示變數）或轉換後（用 w 表示變數）的函數。另外和 Laplace transform 一樣，transform 這個字可以表示對函數做的動作，此時我們用 $\mathscr{F}_c(f)$ 來強調對 $f(x)$ 做 Fourier cosine transform。它也可以表示作用後所得函數，此時我們用 $\hat{f}_c(w)$ 來強調對 $f(x)$ 變換後所得的函數。

同樣的，當 $f(x)$ 是奇函數或定義在正實數的函數，我們有 Fourier sine integral $f(x) = \int_0^\infty B(w)\sin x\,dw$, 其中 $B(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(t)\sin wt\,dt$. 我們可得 $f(x)$ 的 *Fourier sine transform* 並用 $\mathscr{F}_s(f)$ 或 $\hat{f}_s(w)$ 表示，也就是

$$\mathscr{F}_s(f) = \hat{f}_s(w) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}B(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\sin wt\,dt.$$

我們看以下的例子。

Example 6.3.1 (課本 Example 11.8.1)**.** 考慮 $f(x) = \begin{cases} k, & \text{if } 0 < x < a; \\ 0, & \text{if } x > a. \end{cases}$，由於 $f(x)$ 符合有 Fourier integral 的條件，我們可求 $f(x)$ 的 Fourier cosine transform 以及 sine transform. 即，

$$\hat{f}_c(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^a k\cos wt\,dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{k}{w}\sin aw.$$
$$\hat{f}_s(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^a k\sin wt\,dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{k}{w}(1-\cos aw).$$

要注意常數函數，即 $g(x)=k, x>0$ 並沒有 Fourier cosine transform 也沒有 Fourier sine transform 因為 $g(x)$ 不是 absolutely integrable. $\sharp$

Question 6.17. 做課本習題 *11.8.1* 並求其 *Fourier sine transform.*

接下來，我們來看 $\mathscr{F}_c, \mathscr{F}_s$ 這兩個 transforms 的性質。當 $f(x), g(x)$ 同時是偶函數（或同時是奇函數），則對於任意的實數 a, b，函數 $af(x)+bg(x)$ 依然是偶函數（或奇函數）。又若 $f(x), g(x)$ 皆有 Fourier integral，之前曾提及 $af(x)+bg(x)$ 也有 Fourier integral，所以利用積分線性的性質，我們也有以下的線性性質：

$$\mathscr{F}_c(af+bg)=a\mathscr{F}_c(f)+b\mathscr{F}_c(g); \quad \mathscr{F}_s(af+bg)=a\mathscr{F}_s(f)+b\mathscr{F}_s(g).$$

接下來我們來看這兩個 transforms 對導函數的影響。一樣的，我們要假設 $f(x), f'(x)$ 都符合有 Fourier integral 的條件，另外要加上 $f(x)$ 連續的以及 $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ 的假設（大部分 absolutely integrable 的函數都會滿足）。另外要注意的是，當 $f(x)$ 是偶函數時，由於 $f(-x)=f(x)$，兩邊對 x 微分，會得 $-f'(-x)=f'(x)$，也就是說 $f'(x)$ 會是奇函數。所以我們可以預期此時 $f'(x)$ 的 Fourier sine integral 應該是和 $f(x)$ 的 Fourier cosine integral 有關（而不是 Fourier sine integral）。同理，當 $f(x)$ 是奇函數時，其微分 $f'(x)$ 會是偶函數。所以我們可以預期此時 $f'(x)$ 的 Fourier cosine integral 應該是和 $f(x)$ 的 Fourier sine integral 有關。

首先我們先考慮 $f(x)$ 是偶函數的情況。此時我們需考慮 $f'(x)$ 的 Fourier sine transform $\mathscr{F}_s(f')=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f'(t)\sin wt\,dt$. 接著我們需處理 $f'(t)\sin wt$ 對 t 的反導函數，即不定積分 $\int f'(t)\sin wt\,dt$。由於 $f(x)$ 是連續的，我們可以利用分部積分：$u=\sin wt$; $dv=f'(t)\,dt$，此時 $du=w\cos wt\,dt$, $v=f(t)$。所以

$$\int f'(t)\sin wt\,dt=f(t)\sin wt-w\int f(t)\cos wt\,dt.$$

也因此

$$\int_0^\infty f'(t)\sin wt\,dt=f(t)\sin wt\Big|_0^\infty-w\int_0^\infty f(t)\cos wt\,dt=-w\int_0^\infty f(t)\cos wt\,dt.$$

注意這裡我們用到了 $t\to\infty$ 時 $f(t)\to 0$ 以及 $\sin 0=0$。依照 $\mathscr{F}_c$ 和 $\mathscr{F}_s$ 這兩個 transforms 的定義，我們得

$$\mathscr{F}_s(f')=-w\mathscr{F}_c(f). \tag{6.11}$$

接下來我們考慮 $f(x)$ 是奇函數的情況。此時我們需考慮 $f'(x)$ 的 Fourier cosine transform $\mathscr{F}_c(f')=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f'(t)\cos wt\,dt$. 接著我們需處理 $f'(t)\cos wt$ 對 t 的反導函數，即不定積分 $\int f'(t)\cos wt\,dt$。同樣的由於 $f(x)$ 是連續的，我們可以利用利用分部積分：$u=\cos wt$; $dv=f'(t)\,dt$，我們有 $du=-w\sin wt\,dt$, $v=f(t)$。所以

$$\int f'(t)\cos wt\,dt=f(t)\cos wt+w\int f(t)\sin wt\,dt.$$

也因此

$$\int_0^\infty f'(t)\cos wt\,dt = f(t)\cos wt\Big|_0^\infty + w\int_0^\infty f(t)\sin wt\,dt = -f(0)+w\int_0^\infty f(t)\sin wt\,dt.$$

注意這裡我們用到了 $t\to\infty$ 時 $f(t)\to 0$ 以及 $\cos 0=0$。依照 $\mathscr{F}_c$ 和 $\mathscr{F}_s$ 這兩個 transforms 的定義，我們得

$$\mathscr{F}_c(f') = w\mathscr{F}_s(f) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}f(0). \tag{6.12}$$

注意別忘了 $f(0)$ 要乘上 $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$。

取一次微分會讓原函數與導函數的 $\mathscr{F}_c$ 和 $\mathscr{F}_s$ 互換，不過若再取一次微分就可以換回來了。當然了這裡因為要考慮的是 $f'(x)$ 的微分 $f''(x)$ 所以若要套用 $\mathscr{F}_c$ 和 $\mathscr{F}_s$，則 $f'(x), f''(x)$ 就必須分別符合前面 $f(x), f'(x)$ 所相對應的條件。在此條件下我們就可套用式子 (6.11), (6.12) 了。

當 $f(x)$ 時偶函數時，$f'(x)$ 是奇函數，而 $f''(x)$ 是偶函數，所以套用式子 (6.12) 得 $\mathscr{F}_c(f'') = w\mathscr{F}_s(f') - \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}f'(0)$. 再將 $\mathscr{F}_s(f')$ 套用式子 (6.11)，我們得

$$\mathscr{F}_c(f'') = -w^2\mathscr{F}_c(f) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}f'(0). \tag{6.13}$$

同理，當 $f(x)$ 時奇函數時，$f'(x)$ 是偶函數，而 $f''(x)$ 是奇函數，所以套用式子 (6.11) 得 $\mathscr{F}_s(f'') = -w\mathscr{F}_c(f')$. 再將 $\mathscr{F}_c(f')$ 套用式子 (6.12)，我們得

$$\mathscr{F}_s(f'') = -w^2\mathscr{F}_s(f) + w\sqrt{\frac{2}{\pi}}f(0). \tag{6.14}$$

我們可以預期式子 (6.13),(6.14) 在處理微分方程時會很有用，另一方面它們也像 Laplace transform 一樣，可以幫我們求一些函數的 Fourier cosine transform 及 Fourier sine transform。我們看以下的例子。

Example 6.3.2 (課本 Example 11.8.2, 11.8.3)**.** 給定正實數 k，我們要利用定義直接計算 $\mathscr{F}_c(e^{-kx})$。我們也要探討如何利用式子 (6.13) 來計算 $\mathscr{F}_c(e^{-kx})$，並檢視其結果是否相同。

首先再強調一下，這裡函數 $f(x)=e^{-kx}$ 是僅考慮定義在 $x>0$ 的部分，而我們求 $\mathscr{F}_c(e^{-kx})$ 是將其擴張成偶函數來處理（參見 Example 6.2.3）。

在 Example (6.2.3) 已算出 e^{-kx} 的 Fourier cosine integral 的 $A(w)=\dfrac{2k}{\pi(k^2+w^2)}$，所以由定義得

$$\mathscr{F}_c(e^{-kx}) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}A(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{k}{k^2+w^2}.$$

另一方面，由 $f(x)=e^{-kx}$ 得 $f'(x)=-ke^{-kx}$ 以及 $f''(x)=k^2e^{-kx}$。它們都有 Fourier integral 且其中 $f(x), f'(x)$ 都符合連續性以及當 $x\to\infty$ 皆趨近於 0 等性質。故由式子 (6.13)，我們有 $\mathscr{F}_c(k^2e^{-kx}) = -w^2\mathscr{F}_c(e^{-kx}) - \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}(-k)$. 利用 $\mathscr{F}_c$ 線性的性質，即 $\mathscr{F}_c(k^2e^{-kx}) = k^2\mathscr{F}_c(e^{-kx})$，將上式移項整理得

$$(k^2+w^2)\mathscr{F}_c(e^{-kx}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}k.$$

與依定義所求的結果一致。 ♯

這裡要注意的是，若想要像上例中利用微分求 Fourier cosine 或 Fourier sine transform，則必須要 $f(x)$ 是連續才能套用。否則像 Example 6.3.1 中 $f(x)$ 是不連續的，但 $f'(x)$ 處處為 0，套用 $\mathscr{F}_c,\mathscr{F}_s$ 在 $f'(x)$ 會得到錯誤的結論。

Question 6.18. 令 $f(x)=e^{-x^2/2}$，已知 $\mathscr{F}_c(f)=e^{-w^2/2}$。

(1) 求 $f'(x)$ 並利用微分性質求 $\mathscr{F}_s(xe^{-x^2/2})$ (課本習題 *11.8.12*)。

(2) 求 $f''(x)$ 並利用微分以及線性性質求 $\mathscr{F}_c(x^2e^{-x^2/2})$。

當我們利用 $\mathscr{F}_c,\mathscr{F}_s$ 這兩個 transforms 處理問題，最後得到的 w 為變數的函數，必須能還原成 x 為變數的函數，這樣才能解決問題。此時便需要用到所謂 inverse transform 的概念。首先觀察，若 $\hat{f}_c(w)$ 是 $f(x)$ 的 Fourier cosine transform，則由 $A(w)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\hat{f}_c(w)$ 可得

$$f(x)=\int_0^\infty A(w)\cos wx\,dw=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \hat{f}_c(w)\cos wx\,dw.$$

因此，若我們知道 $g(w)$ 會是某個函數的 Fourier cosine transform，便可利用所謂的 *inverse Fourier cosine transform* (用 $\mathscr{F}_c^{-1}$ 表示) 找到這個函數。也就是說，利用積分

$$\mathscr{F}_c^{-1}(g)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty g(w)\cos wx\,dw.$$

所得的函數 $f(x)$ 就會滿足 $\hat{f}_c(w)=g(w)$。同樣的，我們也有所謂的 *inverse Fourier sine transform* (用 $\mathscr{F}_s^{-1}$ 表示)。當 $g(w)$ 是某個函數的 Fourier sine transform，則考慮積分

$$\mathscr{F}_s^{-1}(g)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty g(w)\sin wx\,dw.$$

所得的函數 $f(x)$ 就會滿足 $\hat{f}_s(w)=g(w)$。

從這邊我們可以了解當初 Fourier cosine 和 sine transforms 的定義，為何積分式前乘上 $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$，就是讓它和 inverse transform 有一樣的形式。因此若 $f(x)$ 的 Fourier cosine transform 為 $g(w)$，而 $g(x)$ 的 Fourier cosine integral 存在 (注意，g 的變數改為 x)，則 $g(x)$ 的 Fourier cosine transform 就會是 $f(w)$ (注意，f 的變數改為 w)。這稱為 Fourier cosine transform pair (或 dual) 的性質。同理 Fourier sine transform 和其 inverse 也有這樣 pair 的關係。

Question 6.19. 假設 k 為正實數。請利用 *pair* 的概念求以下函數的 *Fourier cosine transform*。

(1) 利用 *Example 6.3.1* 的結果求 $\mathscr{F}_c(\dfrac{\sin kx}{x})$。

(2) 利用 *Example 6.3.2* 的結果求 $\mathscr{F}_c(\dfrac{1}{k^2+x^2})$。