既然 image 和 kernel 這麼重要, 我們當然要去了解它們. 由下一個 Lemma 我們了解到 image 和 spanning set 有關而 kernel 就和 linear independency 相關.

Lemma 2.2.4. 假設 $T:V\to W$ 是一個 *linear transformation,* 且 S,S' 為 V 的 *subsets.*

(1) $T(\mathrm{Span}(S))=\mathrm{Span}(T(S))$. 特別的, 若 S 是 V 的 *spanning set,* 則 $T(S)$ 是 $\mathrm{Im}(T)$ 的 *spanning set.*

(2) 若 S' 為 *linearly independent* 且 $\mathrm{Span}(S')\cap\mathrm{Ker}(T)=\{\mathbf{O}_V\}$, 則 $T(S')$ 亦為 *linearly independent.*

Proof.

(1) 依定義 $S\subseteq\mathrm{Span}(S)$, 故得 $T(S)\subseteq T(\mathrm{Span}(S))$. 然而 $\mathrm{Span}(S)$ 是 V 的 subspace, 故由 Lemma 2.2.1 知 $T(\mathrm{Span}(S))$ 是 W 的 subspace. 也就是說 $T(\mathrm{Span}(S))$ 是一個包含 $T(S)$ 的 subspace. 又因為 $\mathrm{Span}(T(S))$ 是 W 中包含 $T(S)$ 最小的 subspace (參見 Proposition 1.3.3), 故得 $\mathrm{Span}(T(S))\subseteq T(\mathrm{Span}(S))$. 另一方面, 若 $\mathbf{w}\in T(\mathrm{Span}(S))$ 表示存在 $c_1,\dots,c_n\in F$ 以及 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n\in S$ 使得 $\mathbf{w}=T(c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n)$. 因此由 T 為 linear 知 $\mathbf{w}=c_1T(\mathbf{v}_1)+\cdots+c_nT(\mathbf{v}_n)\in\mathrm{Span}(T(S))$. 故得 $T(\mathrm{Span}(S))\subseteq\mathrm{Span}(T(S))$, 因而證得 $T(\mathrm{Span}(S))=\mathrm{Span}(T(S))$.

最後若 S 是 V 的 spanning set, 即 $\mathrm{Span}(S)=V$. 套用前面結果, 可得

$$\mathrm{Span}(T(S))=T(\mathrm{Span}(S))=T(V)=\mathrm{Im}(T).$$

(2) 首先我們說明依假設 $T(S')$ 中的元素皆相異. 否則若存在 $\mathbf{v},\mathbf{v}'\in S'$ 且 $\mathbf{v},\mathbf{v}'$ 相異使得 $T(\mathbf{v})=T(\mathbf{v}')$, 可得 $T(\mathbf{v}-\mathbf{v}')=\mathbf{O}_W$, 亦即 $\mathbf{v}-\mathbf{v}'\in\mathrm{Ker}(T)$. 然而 $\mathbf{v}-\mathbf{v}'\in\mathrm{Span}(S')$, 故由假設知 $\mathbf{v}-\mathbf{v}'\in\mathrm{Span}(S')\cap\mathrm{Ker}(T)=\{\mathbf{O}_V\}$ 推得 $\mathbf{v}=\mathbf{v}'$ 之矛盾. 故知 $T(S')$ 中的元素必相異.

現利用反證法設 $T(S')$ 為 linearly dependent, 表示存在 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n\in S'$ 皆相異且 $c_1,\dots,c_n\in F$ 皆不為 0 使得 $c_1T(\mathbf{v}_1)+\cdots+c_nT(\mathbf{v}_n)=\mathbf{O}_W$. 利用 T 為 linear 得 $T(c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n)=\mathbf{O}_W$, 亦即 $c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n\in\mathrm{Ker}(T)$. 然而 $c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n\in\mathrm{Span}(S')$, 故由 $\mathrm{Span}(S')\cap\mathrm{Ker}(T)=\{\mathbf{O}_V\}$, 得 $c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n=\mathbf{O}_V$. 此與 S' 為 linearly independent 相矛盾, 故得 $T(S')$ 為 linearly independent.

□

Lemma 2.2.4 (1) 告訴我們當 $T:V\to W$ 是一個 linear transformation, 若 V 為 finite dimensional F-space, 則 $\mathrm{Im}(T)$ 亦為 finite dimensional F-space.

Question 2.9. 假設 $T:V\to W$ 是一個 *linear transformation.* 若 V 為 *finite dimensional F-space,* 可否得 $\dim(\mathrm{Im}(T))\leq\dim(V)$? 又若已知 $\dim(W)>\dim(V)$ 是否可確定 T 是否為映成的?

以下我們將利用 V 的一組 basis 得到 $\mathrm{Im}(T)$ 的一組 basis.

Theorem 2.2.5. 假設 $T:V\to W$ 是一個 *linear transformation.* 若 S_0 為 $\mathrm{Ker}(T)$ 的一組 *basis* 且 $S_0\cup S$ 為 V 的一組 *basis,* 則 $T(S)$ 為 $\mathrm{Im}(T)$ 的一組 *basis.*

Proof. 證明 $T(S)$ 為 $\mathrm{Im}(T)$ 的 spanning set: 因 $S_0\cup S$ 為 V 的 spanning set, 由 Lemma 2.2.4 (1) 知 $T(S_0\cup S)$ 為 $\mathrm{Im}(T)$ 的 spanning set. 由於 $S_0\in\mathrm{Ker}(T)$ 故得 $T(S_0)=\{\mathbf{O}_W\}$. 但由於 $T(S_0\cup S)=T(S_0)\cup T(S)=\{\mathbf{O}_W\}\cup T(S)$, 故由 $\{\mathbf{O}_W\}\subseteq\mathrm{Span}(T(S)$ (利用 Corollary 1.3.4) 知 $\mathrm{Span}(T(S))=\mathrm{Span}(\{\mathbf{O}_W\}\cup T(S))=\mathrm{Span}(T(S_0\cup S))=\mathrm{Im}(T)$.

證明 $T(S)$ 為 linearly independent: 因 $S_0\cup S$ 為 linearly independent 且 S_0 為 linearly independent, 由 Corollary 1.4.4 知 S 為 linearly independent 且 $\mathrm{Span}(S)\cap\mathrm{Ker}(T)=\mathrm{Span}(S)\cap\mathrm{Span}(S_0)=\{\mathbf{O}_V\}$. 故由 Lemma 2.2.4 (2) 知 $T(S)$ 為 linearly independent. □

特別的, 當 V 為 finite dimensional vector space, 我們可計算 V, $\mathrm{Ker}(T)$ 以及 $\mathrm{Im}(T)$ 之間 dimension 的關係.

Corollary 2.2.6 (Dimension Theorem)**.** 若 V 為一個 *finite dimensional F-space* 且 $T:V\to W$ 是一個 *linear transformation,* 則

$$\dim(V)=\dim(\mathrm{Ker}(T))+\dim(\mathrm{Im}(T)).$$

Proof. 首先利用 Theorem 1.5.10 找到 $\mathrm{Ker}(T)$ 的一組 basis $S_0=\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_m\}$, 再利用 Theorem 1.5.11 找到 $S=\{\mathbf{v}_{m+1},\ldots,\mathbf{v}_n\}$ 使得 $S_0\cup S=\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_m,\mathbf{v}_{m+1},\ldots,\mathbf{v}_n\}$ 為 V 的一組 basis. Theorem 2.2.5 告訴我們 $\{T(\mathbf{v}_{m+1}),\ldots,T(\mathbf{v}_n)\}$ 為 $\mathrm{Im}(T)$ 的一組 basis, 故知 $n-m=\dim(\mathrm{Im}(T))$, 得證 $\dim(V)=n=m+(n-m)=\dim(\mathrm{Ker}(T))+\dim(\mathrm{Im}(T))$. □

當 V 為 finite dimensional vector space 且 $T:V\to W$ 是一個 linear transformation, $\dim(\mathrm{Im}(T))$ 一般也稱為 the *rank* of T, 而 $\dim(\mathrm{Ker}(T))$ 也稱為 the *nullity* of T. 所以 Dimension Theorem 也有人稱為 Rank Theorem: rank of T + nullity of T = $\dim(V)$.

Question 2.10. 假設 $T:V\to W$ 是一個 *linear transformation.* 若 V 為 *finite dimensional F-space,* 若已知 $\dim(W)<\dim(V)$ 是否可確定 T 是否為一對一的?

2.3. Isomorphism

Linear transformation 將兩個 vector spaces 關連起來. 如果兩個 vector spaces 間可找到一個一對一且映成的 linear transformation, 我們便認為這兩個 vector spaces 有相同的結構, 稱它們為 isomorphic. 這一節中我們主要便是要探討幾個有關 isomorphism 的重要性質.

Definition 2.3.1. 假設 $T:V\to W$ 是一個 linear transformation. 若 T 為 one-to-one and onto, 則稱 T 為一個 *isomorphism.* 此時我們稱 V 和 W 為 *isomorphic* 且用 $V\simeq W$ 來表示.

由 Proposition 2.2.3 我們知 $T:V\to W$ 為 isomorphism 若且唯若 $\mathrm{Im}(T)=W$ and $\mathrm{Ker}(T)=\{\mathbf{O}_V\}$. 所以當 T 為 isomorphism 時, 若 S 為 V 的一組 basis, 由 $\mathrm{Span}(T(S))=$

$T(\mathrm{Span}(S)) = T(V) = \mathrm{Im}(T) = W$ 得 $T(S)$ 為 W 的 spanning set. 又因 T 為 one-to-one 知 $T(S)$ 中的元素皆相異 (即若 $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in S$ 且 $\mathbf{v} \neq \mathbf{v}'$, 則 $T(\mathbf{v}) \neq T(\mathbf{v}')$), 再由 Lemma 2.2.4 知 $T(S)$ 為 linearly independent, 故 $T(S)$ 為 W 的一組 basis. 反之, 若 $T(S)$ 中的元素皆相異且 $T(S)$ 為 W 的一組 basis, 由 $\mathrm{Span}(T(S)) = W$, 得 $\mathrm{Im}(T) = W$. 另一方面, 若 $\mathbf{v} \in \mathrm{Ker}(T)$, 由於 S 為 V 的一組 basis, 存在 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in S$ 皆相異, $c_1, \ldots, c_n \in F$ 使得 $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$. 由此得 $\mathbf{O}_W = T(c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n) = c_1T(\mathbf{v}_1) + \cdots + c_nT(\mathbf{v}_n)$. 但 $T(S)$ 為一組 basis 且 $T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_n) \in T(S)$ 皆相異故由 $T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_n)$ 為 Linearly independent 得 $c_1, \ldots, c_n$ 皆為 0. 因此知 $\mathbf{v} = \mathbf{O}_V$, 即 $\mathrm{Ker}(T) = \{\mathbf{O}_V\}$. 綜合以上, 我們有以下之結論.

Proposition 2.3.2. 假設 $T : V \to W$ 是一個 *linear transformation* 且 S 為 V 的一組 *basis.* 則 T 是 *isomorphism* 若且唯若 $T(S)$ 中的元素皆相異且 $T(S)$ 為 W 的一組 *basis.*

Question 2.11. *Proposition 2.3.2* 中為何要強調 $T(S)$ 中元素皆相異*?*

當 V 為 finite dimensional vector space 時, 我們有以下很好之結果.

Corollary 2.3.3. 假設 V, W 皆為 *F-spaces* 且 V 為 *finite dimensional F-space.* 則 $V \simeq W$ 若且唯若 $\dim(V) = \dim(W)$.

Proof. $V \simeq W$ 表示存在一個 isomorphism $T : V \to W$, 因此由 Proposition 2.3.2 知 W 亦為 finite dimensional F-space 且 $\dim(W) = \dim(V)$. 反之, 若 W 為 finite dimensional F-space 且 $\dim(W) = \dim(V) = n$, 可任取 V 的一組 basis $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ 以及 W 的一組 basis $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n\}$, 利用 Theorem 2.1.4 知存在一個 linear transformation $T : V \to W$ 滿足 $T(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$. 由於 $\{T(\mathbf{v}_1) \ldots, T(\mathbf{v}_n)\} = \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ 為 W 的一組 basis, 由 Proposition 2.3.2 知 T 為 isomorphism, 得證 $V \simeq W$. □

Corollary 2.3.3 告訴我們考慮 finite dimensional vector spaces 間是否 isomorphic 是個簡單的問題, 只要看它們的 dimension 是否相同即可. 底下我們介紹幾個 isomorphism 的定理, 事實上在 finite dimension 的情形確實可以很簡單的利用 dimension 來證得. 不過這些定理在一般狀況之下也成立, 雖然我們不會去談 infinite dimensional vector space, 不過利用 linear transformation 的性質來證明這些 isomorphism 更能讓我們了解這些 vector spaces 間的關係, 所以我們還是不假設 finite dimensional 的情形, 選擇不用 dimension 的方法來證明這些定理 (不過大家可以利用 dimension 來驗證這些定理的正確性).

當一個函數 f 是一對一且映成時, 我們知其反函數 $f^{\circ -1}$ 是存在的, 但當 f 是 linear transformation 時其反函數 $f^{\circ -1}$ 是否也是 linear transformation? 以下我們便是回答這個問題. 要注意, 在這裡因為要避免和 preimage 的符號相混淆, 我們用 $f^{\circ -1}$ 來表示 f 的反函數.

Proposition 2.3.4. 假設 $T : V \to W$ 為一個 *isomorphism,* 則 T 的 *inverse (*反函數*)* $T^{\circ -1} : W \to V$ 亦為 *isomorphism.*

Proof. T 為 one-to-one and onto, 故其 inverse $T^{\circ -1}$ 亦為 one-to-one and onto. 所以我們僅要證明 $T^{\circ -1}$ 為 W 到 V 的 linear transformation 即可. 任取 $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in W$, 由 T 為

isomorphism 知存在唯一的 $\mathbf{v},\mathbf{v}'\in V$ 滿足 $T(\mathbf{v})=\mathbf{w}$ 且 $T(\mathbf{v}')=\mathbf{w}'$. 依 inverse 的定義 $T^{\circ-1}(\mathbf{w})=\mathbf{v}$ 且 $T^{\circ-1}(\mathbf{w}')=\mathbf{v}'$. 對任意 $r\in F$, 要證明 $T^{\circ-1}$ 為 linear transformation, 即要證明 $T^{\circ-1}(r\mathbf{w}+\mathbf{w}')=rT^{\circ-1}(\mathbf{w})+T^{\circ-1}(\mathbf{w}')=r\mathbf{v}+\mathbf{v}'$. 然而依 T 為 linear, 可得 $T(r\mathbf{v}+\mathbf{v}')=rT(\mathbf{v})+T(\mathbf{v}')=r\mathbf{w}+\mathbf{w}'$. 故再依 inverse 之定義得 $T^{\circ-1}(r\mathbf{w}+\mathbf{w}')=r\mathbf{v}+\mathbf{v}'$, 得證 $T^{\circ-1}:W\to V$ 為 linear transformation, 故為 isomorphism. □

Question 2.12. *Vector spaces 之間的 isomorphic 是否為一個 equivalent relation?*

Question 2.13. *當 V 是一個 finite dimensional vector space, 你能利用 Theorem 2.1.4 證明 Proposition 2.3.4 嗎?*

接下來我們將介紹大家在學習代數時已接觸過的幾個 Isomorphism Theorems. 首先我們先看利用一個已知的 linear transformation 得到新的 linear transformation 的方法. 假設 $T:V\to W$ 是一個 linear transformation 且 U 是一個 $\mathrm{Ker}(T)$ 的 subspace, 定義 $\overline{T}:V/U\to\mathrm{Im}(T)$ 為 $\overline{T}(\overline{\mathbf{v}})=T(\mathbf{v}), \forall\overline{\mathbf{v}}\in V/U$. 首先我們先說明 $\overline{T}$ 是一個 well-defined function. 亦即, 若 $\overline{\mathbf{v}_1}=\overline{\mathbf{v}_2}$ in V/U, 則需驗證 $\overline{T}(\overline{\mathbf{v}_1})=\overline{T}(\overline{\mathbf{v}_2})$. 然而 $\overline{\mathbf{v}_1}=\overline{\mathbf{v}_2}$, 表示 $\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2\in U\subseteq\mathrm{Ker}(T)$, 故得 $T(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2)=\mathbf{O}_W$, 亦即 $\overline{T}(\overline{\mathbf{v}_1})=T(\mathbf{v}_1)=T(\mathbf{v}_2)=\overline{T}(\overline{\mathbf{v}_2})$. 另一方面, 對任意 $\overline{\mathbf{v}_1},\overline{\mathbf{v}_2}\in V/U$ 以及 $r\in F$,

$$\overline{T}(r\overline{\mathbf{v}_1}+\overline{\mathbf{v}_2})=\overline{T}(\overline{r\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2})=T(r\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)=rT(\mathbf{v}_1)+T(\mathbf{v}_2)=r\overline{T}(\overline{\mathbf{v}_1})+\overline{T}(\overline{\mathbf{v}_2}),$$

得知 $\overline{T}$ 是一個 linear transformation.

Theorem 2.3.5. 假設 $T:V\to W$ 是一個 *linear transformation* 且 U 是一個 $\mathrm{Ker}(T)$ 的 *subspace,* 則函數 $\overline{T}:V/U\to\mathrm{Im}(T)$ 定義為 $\overline{T}(\overline{\mathbf{v}})=T(\mathbf{v}), \forall\overline{\mathbf{v}}\in V/U$ 是一個 *linear transformation* 且 $\mathrm{Ker}(\overline{T})=\mathrm{Ker}(T)/U$ 以及 $\mathrm{Im}(\overline{T})=\mathrm{Im}(T)$.

Proof. 前面已知, $\overline{T}$ 是一個 linear transformation. 現若 $\overline{\mathbf{v}}\in\mathrm{Ker}(\overline{T})$, 依定義表示 $\mathbf{O}_W=\overline{T}(\overline{\mathbf{v}})=T(\mathbf{v})$, 亦即 $\mathbf{v}\in\mathrm{Ker}(T)$, 得證 $\overline{\mathbf{v}}\in\mathrm{Ker}(T)/U$. 另一方面, 若 $\overline{\mathbf{v}}\in\mathrm{Ker}(T)/U$, 表示 $\mathbf{v}\in\mathrm{Ker}(T)$, 故 $\overline{T}(\overline{\mathbf{v}})=T(\mathbf{v})=\mathbf{O}_W$, 得證 $\overline{\mathbf{v}}\in\mathrm{Ker}(\overline{T})$. 故得 $\mathrm{Ker}(\overline{T})=\mathrm{Ker}(T)/U$. 最後依定義, 我們知 $\mathbf{w}\in\mathrm{Im}(\overline{T})$ 若且唯若存在 $\overline{\mathbf{v}}\in V/U$ 使得 $\mathbf{w}=\overline{T}(\overline{\mathbf{v}})=T(\mathbf{v})$ 若且唯若 $\mathbf{w}\in\mathrm{Im}(T)$. 得證 $\mathrm{Im}(\overline{T})=\mathrm{Im}(T)$. □

特別地當 $U=\mathrm{Ker}(T)$, 我們有以下的定理.

Corollary 2.3.6 (The First Isomorphism Theorem)**.** 假設 $T:V\to W$ 是一個 *linear transformation* 且 $\overline{T}:V/\mathrm{Ker}(T)\to\mathrm{Im}(T)$ 定義為 $\overline{T}(\overline{\mathbf{v}})=T(\mathbf{v})$, 則 $\overline{T}$ 是一個 *isomorphism,* 即得

$$V/\mathrm{Ker}(T)\simeq\mathrm{Im}(T).$$

Proof. 因 $\overline{T}:V/\mathrm{Ker}(T)\to\mathrm{Im}(T)$ 為 linear transformation 滿足 $\mathrm{Ker}(\overline{T})=\mathrm{Ker}(T)/\mathrm{Ker}(T)=\{\overline{\mathbf{O}_V}\}$ 且 $\mathrm{Im}(\overline{T})=\mathrm{Im}(T)$, 故知 $\overline{T}$ 為 isomorphism 得證 $V/\mathrm{Ker}(T)\simeq\mathrm{Im}(T)$. □

Question 2.14. *當 V 為 finite dimensional vector space, 你能利用 quotient space 的 dimension 性質以及 Dimension Theorem 證明 $V/\mathrm{Ker}(T)\simeq\mathrm{Im}(T)$ 嗎?*

Theorem 2.3.6 之所以稱為 The First Isomorphism Theorem, 是因為可以利用它證得其他的 Isomorphism Theorems.

Corollary 2.3.7 (The Second Isomorphism Theorem)**.** 假設 V 為一個 *vector space* 且 U,W 為 V 的 *subspaces.* 則

$$(U+W)/U \simeq W/U\cap W.$$

Proof. 首先注意 U 為 $U+W$ 的 subspace, 所以 $(U+W)/U$ 為一個 vector space. 考慮 $T: W \to (U+W)/U$ 定義為 $T(\mathbf{w}) = \overline{\mathbf{w}}, \forall \mathbf{w} \in W$. 很容易驗證 T 為一個 linear transformation. 接著我們要證明 $\mathrm{Im}(T) = (U+W)/U$ 以及 $\mathrm{Ker}(T) = U\cap W$, 便可由 Corollary 2.3.6 得證 $(U+W)/U \simeq W/U\cap W$.

由於 $\mathrm{Im}(T) \subseteq (U+W)/U$, 我們僅要證明 $\mathrm{Im}(T) \supseteq (U+W)/U$. 對於任意 $\overline{\mathbf{v}} \in (U+W)/U$, 由定義知存在 $\mathbf{u} \in U, \mathbf{w} \in W$ 使得 $\mathbf{v} = \mathbf{u}+\mathbf{w}$. 由於 $\mathbf{v}-\mathbf{w} = \mathbf{u} \in U$, 依定義知在 $(U+W)/U$ 中 $\overline{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{w}}$. 因此我們有 $\overline{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{w}} = T(\mathbf{w}) \in \mathrm{Im}(T)$. 得證 $\mathrm{Im}(T) = (U+W)/U$.

現若 $\mathbf{w} \in \mathrm{Ker}(T)$, 由於 T 的定義域為 W, 可知 $\mathbf{w} \in W$. 又因 $(U+W)/U$ 的加法單位元素為 $\overline{\mathbf{O}}$, 其中 $\mathbf{O}$ 為 V 的加法單位元素, 得 $\overline{\mathbf{O}} = T(\mathbf{w}) = \overline{\mathbf{w}}$. 亦即 $\mathbf{w} = \mathbf{w}-\mathbf{O} \in U$, 故 $\mathbf{w} \in U\cap W$, 得證 $\mathrm{Ker}(T) \subseteq U\cap W$. 反之, 若 $\mathbf{w} \in U\cap W$ 則因 $\mathbf{w} \in U$, 得 $\overline{\mathbf{w}} = \overline{\mathbf{O}}$. 故 $T(\mathbf{w}) = \overline{\mathbf{w}} = \overline{\mathbf{O}}$, 即 $\mathbf{w} \in \mathrm{Ker}(T)$, 得證 $\mathrm{Ker}(T) = U\cap W$. □

從這裡我們可以看出, 只要定出一個好的 linear transformation 就可利用 the First Isomorphism Theorem, 得到好的 isomorphic 性質.

Corollary 2.3.8 (The Third Isomorphism Theorem)**.** 假設 V 為一個 *vector space* 且 U,W 為 V 的 *subspaces* 滿足 $U \subseteq W$. 則

$$(V/U)/(W/U) \simeq V/W.$$

Proof. 首先注意, 由於 $U \subseteq W \subseteq V$ 且皆為 vector spaces, 故 V/U 以及 V/W 皆為 vector spaces. 現考慮 $T: V \to V/W$, 定義為 $T(\mathbf{v}) = \overline{\mathbf{v}}, \forall \mathbf{v} \in V$. 很容易驗證 $\mathrm{Ker}(T) = W$ 且 $\mathrm{Im}(T) = V/W$. 故由 $U \subseteq \mathrm{Ker}(T) = W$, 利用 Theorem 2.3.5, 知 $\overline{T}: V/U \to V/W$ 為一個 linear transformation, 且 $\mathrm{Im}(\overline{T}) = \mathrm{Im}(T) = V/W$ 以及 $\mathrm{Ker}(\overline{T}) = \mathrm{Ker}(T)/U = W/U$. 因此利用 Corollary 2.3.6 得 $(V/U)/\mathrm{Ker}(\overline{T}) \simeq \mathrm{Im}(\overline{T})$, 即 $(V/U)/(W/U) \simeq V/W$. □

Question 2.15. 當 V 為 *finite dimensional vector space,* 你能利用 *dimension* 來證明 *the Second and Third Isomorphism Theorems* 嗎?

Question 2.16. 假設 V 為一個 *finite dimensional vector space* 且 U,W 為 V 的 *subspaces* 滿足 $U \subseteq W \subseteq V$. 我們知 $\dim(V/U) = \dim(V) - \dim(U), \dim(V/W) = \dim(V) - \dim(W)$ 且 $\dim(W/U) = \dim(W) - \dim(U)$. 也就是說 $\dim(V/U) - \dim(V/W) = \dim(W/U)$, 那我們可不可以說 $(V/U)/(V/W) \simeq W/U$?

Exercise 2.3. Let $T_1 : V \to W$ and $T_2 : W \to U$ be linear transformations. Consider the composition $T_2 \circ T_1 : V \to U$. Suppose that W is finite dimensional. Prove

$$\dim(\mathrm{Im}(T_1)) + \dim(\mathrm{Im}(T_2)) - \dim(W) \leq \dim(\mathrm{Im}(T_2 \circ T_1)) \leq \min\{\dim(\mathrm{Im}(T_1)), \dim(\mathrm{Im}(T_2))\}.$$

(Hint: Consider the restriction map $T_2|_{\mathrm{Im}(T_1)} : \mathrm{Im}(T_1) \to U$ for the first inequality.)

Exercise 2.4. Suppose that V_1, V_2 are vector spaces and U_1, U_2 are subspaces of V_1, V_2 respectively.

(1) Prove that $U_1 \oplus U_2$ is a subspace of $V_1 \oplus V_2$.

(2) Show that

$$(V_1 \oplus V_2)/(U_1 \oplus U_2) \simeq (V_1/U_1) \oplus (V_2/U_2).$$