4.3. Jordan Form

將矩陣化為 Triangular form 並不容易讓我們判斷兩個矩陣是否為 similar. 我們將挑選更好的 ordered basis 將其化為所謂的 Jordan form. 本節中我們仍假設 $\chi_T(x)$ 可以完全分解成一次的多項式的乘積 (即 $\chi_T(x)=(x-\lambda_1)^{c_1}\cdots(x-\lambda_k)^{c_k}$). 同樣的我們先討論 nilpotent 的情形.

對於一個 linear operator $T:V\to V$. 這一次我們探討 $T,T^{\circ 2},\ldots$ 的 kernel 間的關係. 若 $\mathbf{v}\in\mathrm{Ker}(T^{\circ i})$, 表示 $T^{\circ i}(\mathbf{v})=\mathbf{O}_V$, 故得 $T^{\circ i+1}(\mathbf{v})=T(T^{\circ i}(\mathbf{v}))=\mathbf{O}_V$. 所以我們自然有以下的 chain of subspaces

$$\{\mathbf{O}_V\}\subseteq\mathrm{Ker}(T)\subseteq\mathrm{Ker}(T^{\circ 2})\subseteq\cdots\subseteq\mathrm{Ker}(T^{\circ i-1})\subseteq\mathrm{Ker}(T^{\circ i})\subseteq\cdots.$$

特別的, 當 T 為 nilpotent of index m, 我們有 $\mathrm{Ker}(T^{\circ i+1})\neq\mathrm{Ker}(T^{\circ i})$, $\forall i=1,\ldots,m-1$.

Lemma 4.3.1. *假設 $\dim(V)>0$, 若 T 為 nilpotent operator of index m, 則我們有以下的 chain of subspaces.*

$$\{\mathbf{O}_V\}\subsetneq\mathrm{Ker}(T)\subsetneq\mathrm{Ker}(T^{\circ 2})\subsetneq\cdots\subsetneq\mathrm{Ker}(T^{\circ i-1})\subsetneq\mathrm{Ker}(T^{\circ i})\subsetneq\cdots\subsetneq\mathrm{Ker}(T^{\circ m-1})\subsetneq\mathrm{Ker}(T^{\circ m})=V.$$

Proof. 首先說明 $\mathrm{Ker}(T^{\circ m-1})\subsetneq\mathrm{Ker}(T^{\circ m})=V$. 因為 $T^{\circ m}=\mathbf{O}$, 亦即對任意 $\mathbf{v}\in V, T^{\circ m}(\mathbf{v})=\mathbf{O}_V$, 所以 $\mathrm{Ker}(T^{\circ m})=V$. 另一方面, 若 $\mathrm{Ker}(T^{\circ m-1})=\mathrm{Ker}(T^{\circ m})=V$, 則表示 $T^{\circ m-1}=\mathbf{O}$, 此與 m 為最小的正整數使得 $T^{\circ m}=\mathbf{O}$ 相矛盾, 故知 $\mathrm{Ker}(T^{\circ m-1})\neq\mathrm{Ker}(T^{\circ m})$.

接下來我們說明 $\{\mathbf{O}_V\}\subsetneq\mathrm{Ker}(T)$. 對任意 $\mathbf{v}\in V$ 因 $\mathbf{O}_V=T^{\circ m}(\mathbf{v})=T(T^{\circ m-1}(\mathbf{v}))$ 得 $T^{\circ m-1}(\mathbf{v})\in\mathrm{Ker}(T)$. 現若 $\mathrm{Ker}(T)=\{\mathbf{O}_V\}$, 則任意 $\mathbf{v}\in V$ 皆滿足 $T^{\circ m-1}(\mathbf{v})=\mathbf{O}_V$ 而得到 $T^{\circ m-1}=\mathbf{O}$ 之矛盾, 故知 $\mathrm{Ker}(T)\neq\{\mathbf{O}_V\}$.

同理, 當 $1\leq i\leq m-2$, 因對於所有 $\mathbf{v}\in V$ 皆有 $\mathbf{O}_V=T^{\circ m}(\mathbf{v})=T^{\circ i+1}(T^{\circ m-(i+1)}(\mathbf{v}))$, 即 $T^{\circ m-(i+1)}(\mathbf{v})\in\mathrm{Ker}(T^{\circ i+1})$. 現若 $\mathrm{Ker}(T^{\circ i})=\mathrm{Ker}(T^{\circ i+1})$, 則由 $T^{\circ m-(i+1)}(\mathbf{v})\in\mathrm{Ker}(T^{\circ i})$ 得 $\mathbf{O}_V=T^{\circ i}(T^{\circ m-(i+1)}(\mathbf{v}))=T^{\circ m-1}(\mathbf{v})$. 因為這是對任意 $\mathbf{v}\in V$ 皆成立, 故得到 $T^{\circ m-1}=\mathbf{O}$ 之矛盾, 得證 $\mathrm{Ker}(T^{\circ i})\neq\mathrm{Ker}(T^{\circ i+1})$. □

現假設 $i\geq 2$, 若 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_s\in\mathrm{Ker}(T^{\circ i+1})$ 為 linearly independent 且

$$\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_s)\cap\mathrm{Ker}(T^{\circ i})=\{\mathbf{O}_V\},$$

則 $T(\mathbf{v}_1),\ldots,T(\mathbf{v}_s)\in\mathrm{Ker}(T^{\circ i})$ 亦為 linearly independent. 事實上若

$$r_1T(\mathbf{v}_1)+\cdots+r_sT(\mathbf{v}_s)=\mathbf{O}_V,$$

則由 $T(r_1\mathbf{v}_1+\cdots+r_s\mathbf{v}_s)=\mathbf{O}_V$ 得 $r_1\mathbf{v}_1+\cdots+r_s\mathbf{v}_s\in\mathrm{Ker}(T)\subseteq\mathrm{Ker}(T^{\circ i})$. 故由 $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_s)\cap\mathrm{Ker}(T^{\circ i})=\{\mathbf{O}_V\}$ 之假設得 $r_1\mathbf{v}_1+\cdots+r_s\mathbf{v}_s=\mathbf{O}_V$, 再由 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_s$ 為 linearly independent 得 $r_1=\cdots=r_s=0$, 得證 $T(\mathbf{v}_1),\ldots,T(\mathbf{v}_s)$ 為 linearly independent. 另外我們也可得

$$\mathrm{Span}(T(\mathbf{v}_1),\ldots,T(\mathbf{v}_s))\cap\mathrm{Ker}(T^{\circ i-1})=\{\mathbf{O}_V\}.$$

這是因為若 $\mathbf{v}=r_1T(\mathbf{v}_1)+\cdots+r_sT(\mathbf{v}_s)\in\mathrm{Ker}(T^{\circ i-1})$, 則

$$\mathbf{O}_V=T^{\circ i-1}(r_1T(\mathbf{v}_1)+\cdots+r_sT(\mathbf{v}_s))=T^{\circ i}(r_1\mathbf{v}_1+\cdots+r_s\mathbf{v}_s),$$

即 $r_1\mathbf{v}_1+\cdots+r_s\mathbf{v}_s \in \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_s)\cap\mathrm{Ker}(T^{\circ i})=\{\mathbf{O}_V\}$. 再由 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_s$ 為 linearly independent 得 $r_1=\cdots=r_s=0$, 得證 $\mathbf{v}=\mathbf{O}_V$. 我們有以下之結論.

Lemma 4.3.2. 假設 $T:V\to V$ 為 *linear operator.* 當 $i\geq 2$ 時, 若 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_s\in\mathrm{Ker}(T^{\circ i+1})$ 為 *linearly independent* 且 $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_s)\cap\mathrm{Ker}(T^{\circ i})=\{\mathbf{O}_V\}$, 則 $T(\mathbf{v}_1),\ldots,T(\mathbf{v}_s)\in\mathrm{Ker}(T^{\circ i})$ 為 *linearly independent* 且 $\mathrm{Span}(T(\mathbf{v}_1),\ldots,T(\mathbf{v}_s))\cap\mathrm{Ker}(T^{\circ i-1})=\{\mathbf{O}_V\}$.

特別地, 若 V 為 *finite dimensional F-space,* 則

$$\dim(\mathrm{Ker}(T^{\circ i+1}))-\dim(\mathrm{Ker}(T^{\circ i}))\leq\dim(\mathrm{Ker}(T^{\circ i}))-\dim(\mathrm{Ker}(T^{\circ i-1})). \tag{4.2}$$

Proof. 我們僅剩要證明式子 (4.2). 假設 $\{\mathbf{u}_1,\ldots\mathbf{u}_t\}$ 為 $\mathrm{Ker}(T^{\circ i-1})$ 的一組 basis, 將之擴大成 $\{\mathbf{u}_1,\ldots\mathbf{u}_t,\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_l\}$ 使之為 $\mathrm{Ker}(T^{\circ i})$ 的一組 basis. 再擴大成 $\{\mathbf{u}_1,\ldots\mathbf{u}_t,\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_l,\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_s\}$ 使之為 $\mathrm{Ker}(T^{\circ i+1})$ 的一組 basis. 依此得 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_s\in\mathrm{Ker}(T^{\circ i+1})$ 為 linearly independent 且 $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_s)\cap\mathrm{Ker}(T^{\circ i})=\{\mathbf{O}_V\}$. 由前面結果知 $T(\mathbf{v}_1),\ldots,T(\mathbf{v}_s)\in\mathrm{Ker}(T^{\circ i})$ 為 linearly independent 且 $\mathrm{Span}(T(\mathbf{v}_1),\ldots,T(\mathbf{v}_s))\cap\mathrm{Ker}(T^{\circ i-1})=\{\mathbf{O}_V\}$. 故 $\{\mathbf{u}_1,\ldots\mathbf{u}_t,T(\mathbf{v}_1),\ldots,T(\mathbf{v}_s)\}$ 為 $\mathrm{Ker}(T^{\circ i})$ 中的 linearly independent set. 得知 $t+s\leq\dim(\mathrm{Ker}(T^{\circ i}))=t+l$, 亦即

$$\dim(\mathrm{Ker}(T^{\circ i+1}))-\dim(\mathrm{Ker}(T^{\circ i}))=s\leq l=\dim(\mathrm{Ker}(T^{\circ i}))-\dim(\mathrm{Ker}(T^{\circ i-1})).$$

□

接下來我們先說明何謂 Jordan form, 然後再說明如何得到 Jordan form.

Definition 4.3.3. 給定 $\lambda\in F$, 對於 1×1 matrix (λ) 以及如下形式的更高階 square matrix

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix},$$

也就是說對角線 (i,i)-th entry 為 λ, 而對角線下方的位置即 $(i,i-1)$-th entry 為 1, 其他位置皆為 0 的矩陣, 我們稱為 *elementary Jordan matrix* associated with λ. 而由 associated with λ 的 elementary Jordan matrices 所組成的 block diagonal matrix, 即

$$\begin{pmatrix} J_1 & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & J_k \end{pmatrix},$$

其中每個 J_i 皆為 elementary Jordan matrix associated with λ, 稱為 *Jordan block matrix* associated with λ.

注意有些書本的 elementary Jordan matrix 的定義為 1 在對角線的上方 (即 $(i,i+1)$ 的位置), 不過只要將 ordered basis 順序前後對調, 不難發現這兩種矩陣為 similar.

Question 4.10. 假設 $T:V\to V$ 為 *linear operator* 且 $\beta=(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,,\mathbf{v}_{n-1},\mathbf{v}_n)$ 為 V 的 *ordered basis.* 若 $[T]_\beta$ 為 *elementary Jordan matrix associated with* λ, 考慮 *ordered basis* $\beta'=(\mathbf{v}_n,\mathbf{v}_{n-1},\ldots,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_1)$, 則 $[T]_{\beta'}$ 為何種形式的 *matrix?*

接下來我們說明 nilpotent linear operator 皆可找到 ordered basis 使其 representative matrix 為 Jordan block matrix associated with 0.

Proposition 4.3.4. 假設 V 為 *finite dimensional F-space.* 若 $T:V\to V$ 是一個 *nilpotent linear operator of index m,* 則存在 V 的 *ordered basis* β 使得 $[T]_\beta$ 為 *Jordan block matrix associated with* 0.

Proof. 令 S_1 為 $\mathrm{Ker}(T)$ 的一組 basis, 將之擴大為 $\mathrm{Ker}(T^{\circ 2})$ 的一組 basis S_2, 一直下去直到得到 S_m 為 $\mathrm{Ker}(T^{\circ m})=V$ 的一組 basis. 也就是說當 $i=1,\ldots,m$ 時 S_i 為 $\mathrm{Ker}(T^{\circ i})$ 的 basis (注意 Lemma 4.3.1 告訴我們當 $i=2,\ldots,m$ 時 $S_{i-1}\subsetneq S_i$). 現考慮 $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_{k_1}\}=S_m\setminus S_{m-1}$ 這組 linear independent subset (它不是空集合). Corollary 1.4.4 告訴我們 $\mathrm{Span}(\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_{k_1}\})$ 和 $\mathrm{Span}(S_{m-1})=\mathrm{Ker}(T^{\circ m-1})$ 的交集為 $\{\mathbf{O}_V\}$ 故由 Lemma 4.3.2 知 $\{T(\mathbf{v}_1),\ldots,T(\mathbf{v}_{k_1})\}$ 為 $\mathrm{Ker}(T^{\circ m-1})$ 中的 linearly independent set 且 $\mathrm{Span}(\{T(\mathbf{v}_1),\ldots,T(\mathbf{v}_{k_1})\})\cap\mathrm{Ker}(T^{\circ m-2})=\{\mathbf{O}_V\}$, 故利用 Corollary 1.4.4 知 $\{T(\mathbf{v}_1),\ldots,T(\mathbf{v}_{k_1})\}\cup S_{m-2}$ 為 $\mathrm{Ker}(T^{\circ m-1})$ 中的 linearly independent set. 若 $\{T(\mathbf{v}_1),\ldots,T(\mathbf{v}_{k_1})\}\cup S_{m-2}$ 亦為 $\mathrm{Ker}(T^{\circ m-1})$ 的 spanning set, 則它就是 $\mathrm{Ker}(T^{\circ m-1})$ 的一組 basis. 而若 $\{T(\mathbf{v}_1),\ldots,T(\mathbf{v}_{k_1})\}\cup S_{m-2}$ 不是 $\mathrm{Ker}(T^{\circ m-1})$ 的 spanning set, 則我們可在 $\mathrm{Ker}(T^{\circ m-1})$ 中選取 $\mathbf{v}_{k_1+1},\ldots,\mathbf{v}_{k_2}$ 使得

$$\{T(\mathbf{v}_1),\ldots,T(\mathbf{v}_{k_1}),\mathbf{v}_{k_1+1},\ldots,\mathbf{v}_{k_2}\}\cup S_{m-2}$$

為 $\mathrm{Ker}(T^{\circ m-1})$ 中的一組 basis. 也就是說我們將集合 $S_{m-1}\setminus S_{m-2}$ 用

$$\{T(\mathbf{v}_1),\ldots,T(\mathbf{v}_{k_1}),\mathbf{v}_{k_1+1},\ldots,\mathbf{v}_{k_2}\}$$

取代. 注意此時 $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_{k_1},T(\mathbf{v}_1),\ldots,T(\mathbf{v}_{k_1}),\mathbf{v}_{k_1+1},\ldots,\mathbf{v}_{k_2}\}\cup S_{m-2}$ 仍為 $\mathrm{Ker}(T^{\circ m})=V$ 的一組 basis.

接下來考慮取代 $S_{m-1}\setminus S_{m-2}$ 的集合 $\{T(\mathbf{v}_1),\ldots,T(\mathbf{v}_{k_1}),\mathbf{v}_{k_1+1},\ldots,\mathbf{v}_{k_2}\}$. 再次利用 Lemma 4.3.2, 我們知 $\{T^{\circ 2}(\mathbf{v}_1),\ldots,T^{\circ 2}(\mathbf{v}_{k_1}),T(\mathbf{v}_{k_1+1}),\ldots,T(\mathbf{v}_{k_2})\}\cup S_{m-3}$ 為 $\mathrm{Ker}(T^{\circ m-2})$ 中的 linearly independent set. 所以再加入 $\mathrm{Ker}(T^{\circ m-2})$ 中的元素 $\mathbf{v}_{k_2+1},\ldots,\mathbf{v}_{k_3}$ 使得

$$\{T^{\circ 2}(\mathbf{v}_1),\ldots,T^{\circ 2}(\mathbf{v}_{k_1}),T(\mathbf{v}_{k_1+1}),\ldots,T(\mathbf{v}_{k_2}),\mathbf{v}_{k_2+1},\ldots,\mathbf{v}_{k_3}\}\cup S_{m-3}$$

為 $\mathrm{Ker}(T^{\circ m-2})$ 的 basis. 也就是說我們將 $S_{m-2}\setminus S_{m-3}$ 集合用

$$\{T^{\circ 2}(\mathbf{v}_1),\ldots,T^{\circ 2}(\mathbf{v}_{k_1}),T(\mathbf{v}_{k_1+1}),\ldots,T(\mathbf{v}_{k_2}),\mathbf{v}_{k_2+1},\ldots,\mathbf{v}_{k_3}\}$$

取代. 這樣一直下去, 簡單的說就是將取代 $S_{i+1}\setminus S_i$ 的集合 S'_{i+1} 代入 T 得到 $T(S'_{i+1})$ 這一組在 $\mathrm{Ker}(T^{\circ i})$ 的 linearly independent set, 再加入 $\mathrm{Ker}(T^{\circ i})$ 中的子集合 S''_i 使得 $T(S'_{i+1})\cup S''_i\cup S_{i-1}$ 為 $\mathrm{Ker}(T^{\circ i})$ 的 basis. 接著就是將 S_i/S_{i-1} 用 $S'_i=T(S'_{i+1})\cup S''_i$ 取代. 我們用以下圖表來表示:

$$\begin{array}{lllllll}
S_m \setminus S_{m-1} & \mathbf{v}_1,\ldots \mathbf{v}_{k_1} & & & & & \\
S_{m-1} \setminus S_{m-2} \rightsquigarrow & T(\mathbf{v}_1),\ldots,T(\mathbf{v}_{k_1}), & \mathbf{v}_{k_1+1},\ldots,\mathbf{v}_{k_2} & & & & \\
S_{m-2} \setminus S_{m-3} \rightsquigarrow & T^{\circ 2}(\mathbf{v}_1),\ldots,T^{\circ 2}(\mathbf{v}_{k_1}), & T(\mathbf{v}_{k_1+1}),\ldots,T(\mathbf{v}_{k_2}), & \mathbf{v}_{k_2+1},\ldots,\mathbf{v}_{k_3} & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
S_1 \rightsquigarrow & T^{\circ m-1}(\mathbf{v}_1),\ldots,T^{\circ m-1}(\mathbf{v}_{k_1}), & T^{\circ m-2}(\mathbf{v}_{k_1+1}),\ldots,T^{\circ m-2}(\mathbf{v}_{k_2}), & T^{\circ m-3}(\mathbf{v}_{k_2+1}),\ldots,T^{\circ m-3}(\mathbf{v}_{k_3}), & \cdots & T(\mathbf{v}_{k_{m-2}+1}),\ldots,T(\mathbf{v}_{k_{m-1}}), & \mathbf{v}_{k_{m-1}+1},\ldots,\mathbf{v}_{k_m}
\end{array}$$

最後一個步驟就是將取代 $S_2 \setminus S_1$ 的元素

$$T^{\circ m-2}(\mathbf{v}_1),\ldots,T^{\circ m-2}(\mathbf{v}_{k_1}),T^{\circ m-3}(\mathbf{v}_{k_1+1}),\ldots,T^{\circ m-3}(\mathbf{v}_{k_2}),\ldots,$$
$$T(\mathbf{v}_{k_{m-3}+1}),\ldots,T(\mathbf{v}_{k_{m-2}}),\mathbf{v}_{k_{m-2}+1},\ldots,\mathbf{v}_{k_{m-1}}$$

代入 T, 得到 $\mathrm{Ker}(T)$ 中的 linearly independent set

$$\{T^{\circ m-1}(\mathbf{v}_1),\ldots,T^{\circ m-1}(\mathbf{v}_{k_1}),T^{\circ m-2}(\mathbf{v}_{k_1+1}),\ldots,T^{\circ m-2}(\mathbf{v}_{k_2}),\ldots,$$
$$T^{\circ 2}(\mathbf{v}_{k_{m-3}+1}),\ldots,T^{\circ 2}(\mathbf{v}_{k_{m-2}}),T(\mathbf{v}_{k_{m-2}+1}),\ldots,T(\mathbf{v}_{k_{m-1}})\}$$

再加入 $\mathrm{Ker}(T)$ 中的元素 $\mathbf{v}_{k_{m-1}+1},\ldots,\mathbf{v}_{k_m}$ 使其成為 $\mathrm{Ker}(T)$ 的 basis. 所以上面圖表的最後一個 row 的元素就是取代 S_1 的元素, 即 $\mathrm{Ker}(T)$ 的 basis. 將之與取代 $S_2 \setminus S_1$ 的集合聯集就是取代 S_2 的元素, 即 $\mathrm{Ker}(T^{\circ 2})$ 的 basis. 同理圖表中取代 $S_i \setminus S_{i-1}$ 的那一個 row 及其以下各 row 的元素即為組成 $\mathrm{Ker}(T^{\circ i})$ 的 basis. 也因此上表中的各元素即組成 $V = \mathrm{Ker}(T^{\circ m})$ 的 basis. 考慮將它們按順序一個 column 一個 column 由上往下排序所形成的 ordered basis β, 即 β 的第一個元素為 $\mathbf{v}_1$ 接著為 $T(\mathbf{v}_1)$, 一直到第 m 個為 $T^{\circ m-1}(\mathbf{v}_1)$ 接著放 $\mathbf{v}_2,T(\mathbf{v}_2),\ldots$ 這樣一直下去最後依序為 $\mathbf{v}_{k_{m-1}},T(\mathbf{v}_{k_{m-1}}),\mathbf{v}_{k_{m-1}+1},\ldots,\mathbf{v}_{k_m}$. 很容易看出 $[T]_\beta$ 便是一個 Jordan block matrix associated with 0. 例如 $[T]_\beta$ 對應 $(\mathbf{v}_1,T(\mathbf{v}_1),\ldots,T^{\circ m-1}(\mathbf{v}_1))$ 的部分的 block 就是

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}$$

這一個 associated with 0 的 $m\times m$ 階 elementary Jordan matrix. □

Question 4.11. 在上面證明中 $[T]_\beta$ 對應 $(\mathbf{v}_{k_1+1},T(\mathbf{v}_{k_1+1}),\ldots,T^{\circ m-2}(\mathbf{v}_1))$ 的部分的 *block* 是幾階的 *elementary Jordan matrix?* 對應到 $(\mathbf{v}_{k_{m-1}},T(\mathbf{v}_{k_{m-1}}))$ 和 $(\mathbf{v}_{k_{m-1}+1},\ldots,\mathbf{v}_{k_m})$ 部分又是怎樣的 *matrices?*

Example 4.3.5. 考慮 linear operator $T: P_4(\mathbb{R}) \to P_4(\mathbb{R})$ 定義為 $T(ax^4+bx^3+cx^2+dx+e) = 4ax^2+3bx+2c$, 很容易判斷 T 為 nilpotent of index 3. 因 $\mathrm{Ker}(T) = \{dx+e \mid d,e \in \mathbb{R}\}$, 我們找到 $\mathrm{Ker}(T)$ 的一組 basis $S_1 = \{x,1\}$. 而 $\mathrm{Ker}(T^{\circ 2}) = \{bx^3+cx^2+dx+e \mid b,c,d,e \in \mathbb{R}\}$, 我們將 S_1 擴大為 $S_2 = \{x^3,x^2,x,1\}$ 成為 $\mathrm{Ker}(T^{\circ 2})$ 的 basis. 最後將 S_2 擴大為 $S_3 = \{x^4,x^3,x^2,x,1\}$ 使其為 $\mathrm{Ker}(T^{\circ 3}) = V$ 的 basis.

現 $S_3 \setminus S_2 = \{x^4\}$, 故考慮 $T(x^4) = 4x^2$. 其與 S_1 的聯集 $\{4x^2,x,1\}$ 為 $\mathrm{Ker}(T^{\circ 2})$ 上的 linearly independent set, 可加入 x^3 使得 $\{4x^2,x^3\} \cup S_1 = \{4x^2,x^3,x,1\}$ 為 $\mathrm{Ker}(T^{\circ 2})$ 的 basis. 此時用

$\{4x^2, x^3\}$ 取代 $S_2 \setminus S_1 = \{x^3, x^2\}$. 接著考慮 $T(4x^2) = 8, T(x^3) = 3x$, 因為 $\{8, 3x\}$ 已為 $\mathrm{Ker}(T)$ 的 basis 所以不需加入元素直接用 $\{8, 3x\}$ 取代 S_1. 我們有以下之圖表:

$$\begin{array}{rcll} S_3 \setminus S_2 = \{x^4\} & & x^4 & \\ S_2 \setminus S_1 = \{x^3, x^2\} & \rightsquigarrow & T(x^4) = 4x^2, & x^3 \\ S_1 = \{x, 1\} & \rightsquigarrow & T(T(x^4)) = 8, & T(x^3) = 3x \end{array}$$

所以考慮 ordered basis $\beta = (x^4, 4x^2, 8, x^3, 3x)$, 我們得到

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

其實在 Example 4.3.5, 我們不必真的找到 ordered basis 便能判斷 T 的 Jordan form 的可能形式. 利用 Proposition 4.3.4 的證明中所用的圖表, 我們知道 Jordan block matrix 中的 elementary Jordan matrix 的個數就是圖表中 column 的個數, 而 column 的個數就是圖表中最後一個 row 的元素個數, 即 $\#(S_1) = \dim(\mathrm{Ker}(T))$. 另外每一個 column 的元素個數就是它所對應的 elementary Jordan matrix 的階數. 例如第一個 column 就是來自 $S_m \setminus S_{m-1}$ 的元素 $\mathbf{v}_1$, 接著為 $T(\mathbf{v}_1), \ldots, T^{\circ m-1}(T)$ 共 m 個元素, 它所對應的就是一個 $m \times m$ 階的 elementary Jordan matrix. 這些 $m \times m$ 階的 elementary Jordan matrices 的個數就是那些有 m 個元數的 column 的個數, 由圖表中我們可以知道他們的個數就是 k_1, 即 $S_m \setminus S_{m-1}$ 的元素個數, 也就是 $\dim(\mathrm{Ker}(T^{\circ m})) - \dim(\mathrm{Ker}(T^{\circ m-1}))$. 由 Lemma 4.3.1, 我們知此數必大於 0. 至於 $(m-1) \times (m-1)$ 階的 elementary Jordan matrices 的個數, 就是 Proposition 4.3.4 中的 $k_2 - k_1$, 即 $\dim(\mathrm{Ker}(T^{\circ m-1})) - \dim(\mathrm{Ker}(T^{\circ m-2})) - (\dim(\mathrm{Ker}(T^{\circ m})) - \dim(\mathrm{Ker}(T^{\circ m-1})))$, 此數有可能為 0 (Lemma 4.2 僅告訴我們它大於等於 0). 同理, $i \times i$ 階的 elementary Jordan matrices 的個數為 $\dim(\mathrm{Ker}(T^{\circ i})) - \dim(\mathrm{Ker}(T^{\circ i-1})) - (\dim(\mathrm{Ker}(T^{\circ i+1})) - \dim(\mathrm{Ker}(T^{\circ i})))$.

在 Example 4.3.5 中的 T 為 nilpotent of index 3, 故其 Jordan block matrix 中一定有 3×3 階的 elementary Jordan matrix. 但 $\dim(V) = 5$, 故僅能有一個 (否則 Jordan block matrix 的階數會大於等於 6×6). 所以剩下可能是僅有一個 2×2 階的 elementary Jordan matrix, 或是有兩個 1×1 階的 elementary Jordan matrix. 不過 $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = 2$, 所以僅能有 2 個 elementary Jordan matrices, 因此排除後者. 知 T 化成的 Jordan block matrix 一定是由一個 3×3 階和一個 2×2 階的 elementary Jordan matrices 所組成.

現在我們回到 T 的 minimal polynomial 為 $\mu_T(x) = (x - \lambda)^m$ 的情形, 此時 $T - \lambda\,\mathrm{id}$ 為 nilpotent 所以由 Proposition 4.3.4 知存在 ordered basis β 使得 $[T - \lambda\,\mathrm{id}]_\beta = J$ 為一個 diagonal 皆為 0 的 Jordan block matrix J. 然而若 $\dim(V) = n$, 因 $[T - \lambda\,\mathrm{id}]_\beta = [T]_\beta - \lambda I_n$, 故得 $[T]_\beta = \lambda I_n + J$, 為一個 diagonal 皆為 λ 的 Jordan block matrix.

Theorem 4.3.6. 假設 V 為 *finite dimensional F-space.* 若 $T : V \to V$ 為 *linear operator* 其 *characteristic polynomial* 和 *minimal polynomial* 分別為

$$\chi_T(x) = (x - \lambda_1)^{c_1} \cdots (x - \lambda_k)^{c_k}, \mu_T(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \cdots (x - \lambda_k)^{m_k}$$

其中 $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ 為 F 中相異的元素, 則存在 V 的 *ordered basis* β 使得

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} J_1 & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & J_k \end{pmatrix},$$

其中每個 J_i 為 $c_i \times c_i$ 階的 *Jordan block matrix associated with* λ_i, 而且組成 J_i 的 *elementary Jordan matrices* 的個數就是 λ_i 的 *geometric multiplicity,* 即 $\dim(\mathrm{Ker}(T-\lambda_i\,\mathrm{id}))$. 另外 J_i 中最高階的 *elementary Jordan matrix* 為 $m_i \times m_i$ 階.

Proof. 由 Primary Decomposition Theorem 得 $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$, 其中 $V_i = \mathrm{Ker}((T-\lambda_i\,\mathrm{id})^{\circ m_i})$ 且 $\mu_{T|_{V_i}}(x) = (x-\lambda_i)^{m_i}$. 得 $T|_{V_i} - \lambda_i\,\mathrm{id}|_{V_i}$ 為 nilpotent, 故利用 Proposition 4.3.4, 我們知存在 β_i 為 V_i 的 ordered basis, 使得 $[T|_{V_i}]_{\beta_i}$ 為 J_i 這樣的 $c_i \times c_i$ 階的 Jordan block matrix associated with λ_i. 故將 $\beta_1,\dots,\beta_k$ 依序排列形成 V 的 ordered basis β, 可得 $[T]_\beta$ 為所要的 Jordan matrix. □

Question 4.12. 你能利用 *Theorem 4.3.6,* 證明若 T 的 *characteristic polynomial* $\chi_T(x)$ 可以完全分解成 $F[x]$ 中的一次多項式之乘積, 且 T 的每一個 *eigenvalue* 的 *algebraic multiplicity* 等於其 *geometric multiplicity,* 則 T 為 *diagonalizable?*

在 Theorem 4.3.6 中 T 的 representative matrix 就稱為 T 的 *Jordan form.* 前面提過有些情況我們可以用 $\chi_T(x), \mu_T(x)$ 來得到 T 的 Jordan form, 不過有時並不盡然, 我們用以下了例子來探討.

Example 4.3.7. 假設 $T: V \to V$ 為 linear operator 且 $\chi_T(x) = (x-\lambda_1)^3(x-\lambda_2)^4$, 其中 $\lambda_1 \neq \lambda_2$. 我們來探討 T 的 Jordan form 可能的形式. 首先由 $\deg(\chi_T(x)) = 7$, 知 $\dim(V) = 7$, 所以 T 的 Jordan form 一定是 7×7 matrix. 另外因 $\chi_T(x)$ 有兩個相異的一次因式, 所以它的 Jordan form, 一定是有兩個 Jordan block matrix 所組成, 其中一個是 3×3 且 associated with λ_1, 另一個是 4×4 且 associated with λ_2. 現在問題是這兩個 Jordan block matrix 是由哪些 elementary Jordan matrix 所組成.

首先看 3×3 的 block Jordan matrix associated with λ_1 的可能情況. 若 $\mu_T(x)$ 可被 $(x-\lambda_1)^3$ 整除, 則由 Theorem 4.3.6 知此 block 中一定有一個 3×3 的 elementary Jordan matrix, 所以此時這一個 Jordan block 就是一個 3×3 的 elementary Jordan matrix. 若 $\mu_T(x)$ 僅可被 $(x-\lambda_1)^2$ 整除, 不能被 $(x-\lambda_1)^3$ 整除, 則同樣由 Theorem 4.3.6 知此 block 中一定有一個 2×2 的 elementary Jordan matrix, 但此 block 為 3×3 matrix, 所以應該還有一個 1×1 的 elementary Jordan matrix. 所以這種情形這個 block 是由一個 2×2 和一個 1×1 matrix 所組成. 最後若 $(x-\lambda_1) \mid \mu_T(x)$ 但 $(x-\lambda_1)^2 \nmid \mu_T(x)$, 可知此 block 是由 3 個 1×1 的 elementary Jordan matrix 所組成. 我們將結果列為下表

$x-\lambda_1$ 的次數	3	2	1
block Jordan matrix	$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$

所以 Jordan block matrix associated with λ_1 皆可由 $\mu_T(x)$ 確定.

至於 4×4 的 block Jordan matrix associated with λ_2 的可能情況, 在 $x-\lambda_2$ 可整除 $\mu_T(x)$ 的最高次數為 4,3,1 時, 和前面一樣的, 此時組成此 block 的 elementary Jordan matrix 是可以被確定的. 我們列出下表:

$x-\lambda_2$ 的次數	4	3	1
block Jordan matrix	$\begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

若 $x-\lambda_2$ 可整除 $\mu_T(x)$ 的最高次數為 2 時, 此時 associated with λ_2 的 4×4 的 block Jordan matrix 中雖知一定有一個 2×2 的 elementary Jordan matrix, 但其他的部分有可能是一個 2×2 的 elementary Jordan matrix 或是有兩個 1×1 的 elementary Jordan matrices 所組成. 也就是說此時這一個 block 有可能是以下兩種情況:

$$\begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

當然了就得利用 λ_2 的 geometric multiplicity (即 $\dim(\mathrm{Ker}(T-\lambda_2\,\mathrm{id}))$) 來判斷了. 若 geometric multiplicity 為 2 則 block Jordan matrix 為前者 (即由兩個 2×2 elementary Jordan matrices 所組成), 而 geometric multiplicity 為 3 時就是後者 (即由一個 2×2 和兩個 1×1 elementary Jordan matrices 所組成).

將兩個 Jordan block matrices 確定後, 我們就能決定 T 的 Jordan form 了, 例如當 $\mu_T(x) = (x-\lambda_1)^2(x-\lambda_2)^3$ 的情形 T 的 Jordan form 就可確定為

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

而若 $\mu_T(x) = (x-\lambda_1)^2(x-\lambda_2)^2$ 時 T 的 Jordan form 就有兩種可能, 當 λ_2 的 geometric multiplicity 為 2 和 3 時, T 的 Jordan form 分別為

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Question 4.13. 在 *Example 4.3.7* 中 $\chi_T(x)=(x-\lambda_1)^3(x-\lambda_2)^4$. 當 $\mu_T(x)=(x-\lambda_1)^2(x-\lambda_2)^2$ 時, λ_2 的 *geometric multiplicity* 為什麼不可能是 1 或 4 呢? 又此時能確定 λ_1 的 *geometric multiplicity* 嗎?

對於 $n\times n$ 的矩陣我們也有相對應的定理, 也就是說若 $A\in M_n(F)$ 其 characteristic polynomial 可以完全分解成 $F[x]$ 中的一次多項式乘積 $\chi_A(x)=(x-\lambda_1)^{c_1}\cdots(x-\lambda_k)^{c_k}$, 則存在 invertible matrix $P\in M_n(F)$ 使得

$$P^{-1}\cdot A\cdot P=\begin{pmatrix} J_1 & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & J_k \end{pmatrix},$$

其中每個 J_i 為 $c_i\times c_i$ 階的 Jordan block matrix associated with λ_i. 這個 matrix 我們稱為 A 的 Jordan form.

我們說明如何找到 invertible matrix P 使得 $P^{-1}\cdot A\cdot P$ 為 Jordan form. 首先注意我們不必如得到 triangular form 的情形先把 A 化為 block diagonal matrix. 這是因為若 $\mu_A(x)=(x-\lambda_1)^{m_1}\cdots(x-\lambda_k)^{m_k}$, 利用 Proposition 4.3.4 的方法, 對於每一個 $i=1,\ldots,k$, 我們必須找到一組 $(A-\lambda_iI_n)^{m_i}$ 的 null space $N((A-\lambda_iI_n)^{m_i})$ 的 basis (此即相對於 Proposition 4.3.4 中 $\mathrm{Ker}(T^{\circ m})$ 的 basis), 而 $N((A-\lambda_iI_n)^{m_i})$ 剛好是 primary decomposition 中所考慮的 invariant subspace, 所以我們不必重複做變換 basis 的動作. 要找到 P 的步驟如下: 對於每一個 $i=1,\ldots,k$, 先找到 $N(A-\lambda_iI_n)$ 的 basis S_1, 再將之擴大成 S_2 使之成為 $N((A-\lambda_i)^2)$ 的 basis. 這樣一直下去直到得到 $N((A-\lambda_i)^{m_i})$ 的 basis S_{m_i}. 接下來令 $S_{m_i}\setminus S_{m_1-1}=\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_{k_1}\}$, 然後得 $\{A\mathbf{v}_1,\ldots,A\mathbf{v}_{k_1}\}$. 將之擴大成 $\{A\mathbf{v}_1,\ldots,A\mathbf{v}_{k_1},\mathbf{v}_{k_1+1},\ldots,\mathbf{v}_{k_2}\}$ 使之與 S_{m_i-2} 的聯集成為 $N((A-\lambda_i)^{m_i-1})$ 的 basis 並取代 $S_{m_i-1}\setminus S_{m_i-2}$. 這樣一直下去直到將 $S_2\setminus S_1$ 取代完畢. 最後依 Proposition 4.3.4 將這些 bases 排序得到 P. 我們看以下的例子.

Example 4.3.8. 考慮 5×5 matrix

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

雖然在 Example 3.5.10 中我們找到 invertible matrix P 使得 $P^{-1}\cdot A\cdot P$ 為 block diagonal matrix, 接著在 Example 4.2.6 中我們又找到 invertible matrix Q 使得 $(P\cdot Q)^{-1}\cdot A\cdot(P\cdot Q)$ 為 upper triangular matrix. 不過要將 A 化為 Jordan form 就不必先將 A 化為 block diagonal matrix 再化為 Jordan form 這麼麻煩, 我們直接用 Proposition 4.3.4 的方法處理.

因 $\chi_A(x)=\mu_A(x)=(x-1)^3(x-2)^2$, 首先觀察 $A-I_5$ 的 null space 為 dimension 1, 我們得 $S_1=\{(0,0,-1,1,0)^{\mathrm{t}}\}$ 為其 basis. 接著擴大成 $S_2=\{(0,0,-1,1,0)^{\mathrm{t}},(1,0,-1,0,1)^{\mathrm{t}}\}$ 為 $(A-I_5)^2$ 的 null space 的 basis. 然後擴大成 $S_3=\{(0,0,-1,1,0)^{\mathrm{t}},(1,0,-1,0,1)^{\mathrm{t}},(-1,0,0,0,1)^{\mathrm{t}}\}$ 為 $(A-I_5)^3$ 的 null space 的 basis. 因為 $\mathbf{v}_1=(-1,0,0,0,1)^{\mathrm{t}}\in S_3\setminus S_2$, 我們考慮 $\mathbf{v}_2=A\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_1=(-1,0,0,1,-1)^{\mathrm{t}}$, 且將之取代 $S_2\setminus S_1$ 的元素. 最後得 $\mathbf{v}_3=A\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_2=(0,0,1,-1,0)$ 取代 S_1 的

元素. 此時我們有 $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$ 為 $(A-I_5)^3$ 的 null space 的 basis 且

$$A\mathbf{v}_1=\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2, A\mathbf{v}_2=\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3, A\mathbf{v}_3=\mathbf{v}_3.$$

同樣的我們有 $S_1'=\{(0,-1,1,0,0)^{\mathrm{t}}\}$ 為 $A-2I_5$ 的 null space 的 basis. 將之擴大為 $S_2'=\{(0,-1,1,0,0)^{\mathrm{t}},(1,0,0,0,0)\}$ 為 $(A-2I_5)^2$ 的 null space 的 basis. 故考慮 $\mathbf{v}_1'=(1,0,0,0,0)$ 並用 $\mathbf{v}_2'=A\mathbf{v}_1'-2\mathbf{v}_1'=(0,1,-1,0,0)^{\mathrm{t}}$ 取代 $(0,-1,1,0,0)^{\mathrm{t}}$. 此時我們有 $\{bv_1',\mathbf{v}_2'\}$ 為 $(A-2I_5)^2$ 的 null space 的 basis 且

$$A\mathbf{v}_1'=2\mathbf{v}_1'+\mathbf{v}_2', A\mathbf{v}_2'=2\mathbf{v}_2'.$$

最後令

$$P=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{得} \quad P^{-1}\cdot A\cdot P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

在前面 Section 4.1, 我們提到當 $A,B\in M_n(F)$ 為 diagonalizable 時, 我們可以將其對角線位置的 eigenvalue 適當的重排來判斷 A,B 是否為 similar. 同樣的若 A,B 的 characteristic polynomial 在 $F[x]$ 可完全分解成一次的 monic polynomials 的乘積, 我們可以將 A,B 化為 Jordan form 來判斷它們是否為 similar. 當然了先決條件是 $\chi_A(x)=\chi_B(x)$ 且 $\mu_A(x)=\mu_B(x)$. 若其中有一個不相等便可知 A,B 不為 similar, 而若皆相等就需藉由 A,B 的 Jordan form 來確定. 對於 A,B 的每一個 eigenvalue, 若將 A,B 對於 associated with λ 的 block Jordan matrix 中的 elementary Jordan matrices 做適當重排後會相同, 則知 $A\sim B$. 反之, 若 $A\sim B$, 我們可將 A,B 視為某一個 linear operator T 用不同 ordered bases 所得的 representative matrices. 由於 associated λ 的 elementary Jordan matrices 的各個階數的個數告訴我們

$$\ldots,\dim(\mathrm{Ker}((T-\lambda\,\mathrm{id})^{\circ i-1})),\dim(\mathrm{Ker}((T-\lambda\,\mathrm{id})^{\circ i})),\dim(\mathrm{Ker}((T-\lambda\,\mathrm{id})^{\circ i+1})),\ldots$$

這些 dimensions 之間的關係, 而這些關係和 ordered basis 的選取無關, 所以 A,B associated λ 的 elementary Jordan matrices 的各個階數的個數會相同, 也就是 A,B 可以化為相同的 Jordan form. 因為 Jordan form 可以用來判定兩個 matrixes 是否為 similar, 所以 Jordan form 可以視為一種 canonical form.

Exercise 4.10. Let $A=\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0\\ 1 & \lambda & 0 & 0\\ 0 & 1 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}\in M_4(F)$. Suppose that r,s,t are nonzero. Find an invertible matrix $P\in M_4(F)$ such that $P^{-1}\cdot A\cdot P=\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0\\ r & \lambda & 0 & 0\\ 0 & s & \lambda & 0\\ 0 & 0 & t & \lambda \end{pmatrix}$.

Exercise 4.11. Find the Jordan form J of the following matrix A and find an invertible P such that $P^{-1} \cdot A \cdot P = J$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -4 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercise 4.12. Suppose that A, B are square matrices over F. For the following given characteristic polynomials, find all the possible minimal polynomials of A and B and find all the possible Jordan forms for the corresponding minimal polynomial.

(1) $\chi_A(x) = (x-\lambda)^5$.

(2) $\chi_B(x) = (x-\lambda_1)^2(x-\lambda_2)^3$, where $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Exercise 4.13. Let A, B be square matrices over F with $\chi_A(x) = \chi_B(x) = (x-\lambda_1)^2(x-\lambda_2)^3$ where $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Suppose further that $\mu_A(x) = \mu_B(x)$. Prove A and B are similar.

Exercise 4.14. Consider the following nilpotent matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Show that A and B are not similar.