

準基底  $\varepsilon$  的 representative matrix  $[T]_\varepsilon$ . 利用 Primary Decomposition Theorem, 我們可以找到  $F^n$  的 ordered basis  $\beta$  使得  $[T]_\beta$  為 block diagonal matrix. 然而

$$[T]_\beta = \beta[\text{id}]_\varepsilon \cdot [T]_\varepsilon \cdot \varepsilon[\text{id}]_\beta = \varepsilon[\text{id}]_\beta^{-1} \cdot A \cdot \varepsilon[\text{id}]_\beta,$$

所以可以令  $P = \varepsilon[\text{id}]_\beta$ . 也就是說若將 ordered basis  $\beta$  一個 column 一個 column (column by column) 的依序排成的  $n \times n$  matrix 就是我們想要的  $P$ . 因此我們的步驟如下: 首先求得  $\mu_A(x)$  並將之分解成相異的 monic irreducible polynomials 的乘積  $\mu_A(x) = p_1(x)^{m_1} \cdots p_k(x)^{m_k}$ . 接下來便是求每一個  $p_i(A)^{m_i}$  的 null space  $N(p_i(A)^{m_i})$  (此即對應到  $\text{Ker}(p_i(T)^{m_i})$ ). 得到每個 null space 的 basis 後, 將之 column by column 的依序排成矩陣  $P$  即可.

## 5. DIAGONAL FROM

這一節中, 我們將從最簡單的  $T$ -invariant subspace 出發, 引進所謂的 eigenvalue 以及 eigenvector, 再說明哪些情形可以得到 diagonal form.

對於一個 linear operator  $T: V \rightarrow V$ , 除了  $\{\mathbf{0}\}$  以外, 最簡單的  $T$ -invariant subspace 自然是 dimension 為 1 的  $T$ -invariant subspace. 現若  $U$  為  $T$ -invariant subspace 且  $\dim(U) = 1$ , 即存在  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_V$  使得  $U = \text{Span}(\{\mathbf{v}\})$ . 由  $U$  為  $T$ -invariant 的假設, 我們得  $T(\mathbf{v}) \in U = \text{Span}(\{\mathbf{v}\})$ . 也就是說, 存在  $\lambda \in F$  使得  $T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$ . 我們有以下的定義.

**Definition .** 假設  $T: V \rightarrow V$  為 linear operator, 若存在  $\lambda \in F$  以及  $\mathbf{v} \in V$  且  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_V$  使得  $T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$ , 則稱  $\lambda$  為  $T$  的一個 eigenvalue, 而  $\mathbf{v}$  為  $T$  的一個 eigenvector.

注意, 對於 eigenvector  $\mathbf{v}$  我們要求  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_V$ , 而對於 eigenvalue  $\lambda$  我們並無要求  $\lambda \neq 0$ . 也就是說  $\mathbf{0}_V$  雖符合  $T(\mathbf{0}_V) = \lambda\mathbf{0}_V$ , 但我們不考慮這種 trivial 的情形, 故不稱  $\mathbf{0}_V$  為 eigenvector. 另一方面若  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_V$  滿足  $T(\mathbf{v}) = 0\mathbf{v} = \mathbf{0}_V$ , 表示  $\mathbf{v}$  為  $\text{Ker}(T)$  的元素. 所以若  $0$  為  $T$  的 eigenvalue, 表示  $\text{Ker}(T) \neq \{\mathbf{0}_V\}$ , 亦即  $T: V \rightarrow V$  不是 one-to-one.

要找到一個 linear operator 有哪些 eigenvalue 和 eigenvector, 程序上是先找  $T$  有哪些 eigenvalue, 再利用這些 eigenvalue 將其對應的 eigenvector 找出. 首先觀察若  $\lambda$  為  $T: V \rightarrow V$  的 eigenvalue, 則必存在  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_V$  使得  $T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$ , 得  $\lambda\text{id}(\mathbf{v}) - T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_V$ . 也就是說  $\mathbf{v} \in \text{Ker}(\lambda\text{id} - T)$ , 亦即  $\lambda\text{id} - T$  這一個 linear operator 不是 isomorphism, 因此得  $\det(\lambda\text{id} - T) = 0$ . 如何求  $\det(\lambda\text{id} - T)$ ? 回顧一下, 我們需先找  $V$  的一個 ordered basis  $\beta$ , 再求  $\lambda\text{id} - T$  對於  $\beta$  的 representative matrix  $[\lambda\text{id} - T]_\beta$ . 依定義  $\det(\lambda\text{id} - T)$  就是  $\det([\lambda\text{id} - T]_\beta)$ . 然而若  $\dim(V) = n$ , 則我們有

$$[\lambda\text{id} - T]_\beta = [\lambda\text{id}]_\beta - [T]_\beta = \lambda[\text{id}]_\beta - [T]_\beta = \lambda I_n - [T]_\beta.$$

因此若  $\lambda \in F$  是  $T$  的一個 eigenvalue, 則  $\det(\lambda I_n - [T]_\beta) = 0$ . 又  $T$  的 characteristic polynomial 為  $\chi_T(x) = \chi_{[T]_\beta}(x) = \det(xI_n - [T]_\beta)$ . 得知, 若  $\lambda \in F$  是  $T$  的一個 eigenvalue, 則  $\chi_T(\lambda) = 0$ . 反之, 若  $\lambda \in F$  為  $\chi_T(x) = 0$  之一根, 則  $\det(\lambda\text{id} - T) = 0$ . 表示  $\lambda\text{id} - T$  這一個 linear operator 不是 one-to-one, 亦即存在  $\mathbf{v} \in V$  且  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_V$  使得  $T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$ . 因此我們有以下之結果.

**Proposition .** 假設  $V$  為 *finite dimensional vector space* 且  $T : V \rightarrow V$  為 *linear operator*. 則  $\lambda \in F$  為  $T$  的 *eigenvalue* 若且唯若  $\chi_T(\lambda) = 0$ .

當  $\dim(V) = n$  時, 由於  $\chi_T(x) \in F[x]$  是一個次數為  $n$  的多項式, 它在  $F$  中根的個數最多只有  $n$  個 (當然也可能沒有根), 所以  $T$  僅能有有限多個 *eigenvalue*. 若  $\lambda \in F$  為  $\chi_T(x)$  的一根, 則  $(x - \lambda) \mid \chi_T(x)$ . 又  $x - \lambda$  為  $F[x]$  的 *monic irreducible polynomial*, 所以若將  $\chi_T(x)$  分解成 *monic irreducible polynomials* 的乘積  $\chi_T(x) = p_1(x)^{c_1} \cdots p_k(x)^{c_k}$ . 這些  $p_i(x)$  中次數為一次的多項式就給我們一個  $T$  的 *eigenvalue*. 我們對  $x - \lambda$  可整除  $\chi_T(x)$  的最高次方有興趣, 因此有以下的定義.

**Definition .** 假設  $V$  為 *finite dimensional F-space*,  $T : V \rightarrow V$  為 *linear operator* 且  $\lambda$  為  $T$  的一個 *eigenvalue*. 我們稱  $x - \lambda$  可整除  $\chi_T(x)$  的最高次方為  $\lambda$  的 *algebraic multiplicity*.

找到  $T$  所有可能的 *eigenvalue* 後, 我們就可以決定這些 *eigenvalue* 所對應的 *eigenvector* 了. 若  $\lambda$  為 *eigenvalue*, 前面提過所有滿足  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_V$  以及  $T(\mathbf{v}) - \lambda\mathbf{v} = \mathbf{0}_V$  的元素  $\mathbf{v}$  就是 *eigenvalue* 為  $\lambda$  的 *eigenvector*. 也就是說 *eigenvalue* 為  $\lambda$  的 *eigenvector* 就是  $\text{Ker}(T - \lambda \text{id})$  中的非  $\mathbf{0}_V$  元素. 我們很自然會考慮以下的 *vector space*.

**Definition .** 假設  $T : V \rightarrow V$  為 *linear operator* 且  $\lambda$  為  $T$  的一個 *eigenvalue*. 令

$$E_\lambda(T) = \text{Ker}(T - \lambda \text{id}) = \{\mathbf{v} \in V \mid T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}\}.$$

稱之為  $T$  對應於  $\lambda$  的 *eigenspace* 且  $\dim(E_\lambda(T))$  稱為  $\lambda$  的 *geometric multiplicity*.

假設  $\mathbf{v} \in E_\lambda(T)$ , 由於  $T(T(\mathbf{v})) = T(\lambda\mathbf{v}) = \lambda T(\mathbf{v})$ , 我們得  $T(\mathbf{v}) \in E_\lambda(T)$ . 得知  $E_\lambda(T)$  是一個  $T$ -invariant subspace.

*Algebraic multiplicity* 並不一定會等於 *geometric multiplicity*, 然而雖然  $T$  的一個 *eigenvalue*  $\lambda$  的 *algebraic multiplicity* 和 *geometric multiplicity* 有可能不同, 不過它們之間仍有著某種關係存在. 我們利用 *Primary Decomposition Theorem* 來說明. 利用前面所用的符號, 假設

$$\mu_T(x) = p_1(x)^{m_1} \cdots p_k(x)^{m_k} \quad \text{and} \quad \chi_T(x) = p_1(x)^{c_1} \cdots p_k(x)^{c_k}$$

其中  $p_1(x), \dots, p_k(x)$  為相異的 *monic irreducible polynomials* 且因為  $\lambda$  為  $T$  的 *eigenvalue*, 我們令  $p_1(x) = x - \lambda$ . 若令  $V_i = \text{Ker}(p_i(T)^{m_i})$ , for  $i = 1, \dots, k$ , 則 *Primary Decomposition Theorem* 告訴我們

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$$

且

$$\mu_{T|_{V_i}}(x) = p_i(x)^{m_i} \quad \text{and} \quad \chi_{T|_{V_i}}(x) = p_i(x)^{c_i}, \forall i = 1, \dots, k.$$

因假設  $p_1(x) = x - \lambda$ , 我們有

$$V_1 = \text{Ker}((T - \lambda \text{id})^{m_1}) \supseteq \text{Ker}(T - \lambda \text{id}) = E_\lambda(T).$$

由此知  $\lambda$  的 *geometric multiplicity*  $\dim(E_\lambda(T)) \leq \dim(V_1)$ . 另一方面, 依定義  $c_1$  為  $\lambda$  的 *algebraic multiplicity*, 而又  $\chi_{T|_{V_1}}(x) = (x - \lambda)^{c_1}$ , 知  $\deg(\chi_{T|_{V_1}}(x)) = c_1$ . 因為一個 *linear*

operator 的 characteristic polynomial 的 degree 為此 operator 所在的 space 之 dimension, 故得  $\dim(V_1) = c_1$ . 因此我們知  $\dim(E_\lambda(T)) \leq c_1$ , 得到以下的結果.

**Lemma .** 若  $V$  為 *finite dimensional  $F$ -space*,  $T: V \rightarrow V$  為 *linear operator* 且  $\lambda$  為  $T$  的一個 *eigenvalue*, 則  $\lambda$  的 *algebraic multiplicity* 大於等於其 *geometric multiplicity*.

當  $\lambda$  是  $T$  的 *eigenvalue* 時, 由於  $E_\lambda(T)$  存在著非  $\mathbf{O}_V$  的元素, 故知  $\dim(E_\lambda(T)) \geq 1$ , 也就是說  $\lambda$  的 *geometric multiplicity* 必大於等於 1. 此時若  $\lambda$  的 *algebraic multiplicity* 是 1, 則由前一 Lemma 知  $\lambda$  的 *algebraic multiplicity* 等於其 *geometric multiplicity* (即  $\lambda$  的 *geometric multiplicity* 等於 1). 在一般的情形, 什麼時候  $\lambda$  的 *algebraic multiplicity* 會等於其 *geometric multiplicity* 呢? 我們有以下的結果.

**Proposition .** 假設  $V$  為 *finite dimensional  $F$ -space*,  $T: V \rightarrow V$  為 *linear operator* 且  $\lambda$  為  $T$  的一個 *eigenvalue*. 則  $\lambda$  的 *algebraic multiplicity* 等於其 *geometric multiplicity* 若且唯若  $x - \lambda \mid \mu_T(x)$  但  $(x - \lambda)^2 \nmid \mu_T(x)$ .

特別的, 假設  $\chi_T(x)$  可以完全分解成  $F[x]$  中的一次多項式的乘積, 亦即  $\chi_T(x) = p_1(x)^{c_1} \cdots p_k(x)^{c_k}$ , 其中每一個  $p_i(x)$  皆為一次多項式  $x - \lambda_i$ . 此時若每一個  $\lambda_i$  的 *algebraic multiplicity* 和 *geometric multiplicity* 皆相等, 則由前一 Proposition 知  $\mu_T(x) = p_1(x) \cdots p_k(x)$ , 因此得  $V_i = \text{Ker}(T - \lambda_i \text{id}) = E_{\lambda_i}(T)$ ,  $\forall i = 1, \dots, k$ . 因此由 Primary Decomposition Theorem 知

$$V = E_{\lambda_1}(T) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_k}(T).$$

也就是說此時  $V$  就會是 eigenspaces 的 (internal) direct sum. 因為每個 eigenspace 中的非  $\mathbf{O}_V$  元素皆為  $T$  的 *eigenvector*, 所以  $E_{\lambda_i}(T)$  中的任一組 basis  $S_i$  皆由  $T$  的 *eigenvector* 所組成. 又因  $V = E_{\lambda_1}(T) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_k}(T)$ , 我們得  $S_1 \cup \cdots \cup S_k$  為  $V$  的一組 basis, 也就是說  $V$  有一組 basis 是由  $T$  的 *eigenvector* 所組成. 現假設  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  為  $V$  的一組 basis, 其中  $\mathbf{v}_i$  為  $T$  的 *eigenvector* 且其對應的 *eigenvalue* 為  $\gamma_i$  (這裡  $\gamma_i$  不一定相異), 此時考慮  $V$  的 ordered basis  $\beta = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ . 由於對所有  $i = 1, \dots, n$ , 皆有  $T(\mathbf{v}_i) = \gamma_i \mathbf{v}_i$ , 我們得到

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} \gamma_1 & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & \gamma_n \end{pmatrix}$$

為一個 diagonal matrix (對角矩陣). 因此有以下之定義.

**Definition .** 假設  $V$  為 *finite dimensional  $F$ -space* 且  $T: V \rightarrow V$  為 *linear operator*. 若  $V$  存在一組 basis 是由  $T$  的 *eigenvectors* 所組成, 則稱  $T$  為一個 diagonalizable linear operator.

我們有以下等價的關係來判斷一個 linear operator 是否為 diagonalizable.

**Theorem .** 假設  $V$  為 *finite dimensional  $F$ -space* 且  $T: V \rightarrow V$  為 *linear operator*. 則以下是等價的.

- (1)  $T$  是一個 diagonalizable linear operator.

- (2) 存在  $V$  的 *ordered basis*  $\beta$  使得  $[T]_\beta$  為一個 *diagonal matrix*.
- (3)  $T$  的 *characteristic polynomial*  $\chi_T(x)$  可以完全分解成  $F[x]$  中的一次多項式之乘積, 且  $T$  的每一個 *eigenvalue* 的 *algebraic multiplicity* 和 *geometric multiplicity* 相等.
- (4)  $T$  的 *minimal polynomial*  $\mu_T(x)$  可以完全分解成  $F[x]$  中相異的 *monic* 一次多項式之乘積.

雖然前面都是談 linear operator, 我們要強調這些性質對於  $n \times n$  的方陣也有相對應的地方. 首先若  $A \in M_n(F)$ , 我們也有所謂的 *eigenvalue* 以及 *eigenvector*.

**Definition .** 假設  $A \in M_n(F)$ . 若存在  $\lambda \in F$  以及  $\mathbf{x} \in F^n$  且  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  使得  $A \cdot \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$ , 則稱  $\lambda$  為  $A$  的一個 *eigenvalue*, 而  $\mathbf{x}$  為  $T$  的一個 *eigenvector*.

接下來利用  $A$  的 *characteristic polynomial*  $\chi_A(x)$  來得到  $A$  的 *eigenvalues*  $\lambda$  以及求  $N(A - \lambda I_n)$  來得到  $A$  相對於  $\lambda$  的 *eigenvector*, 還有關於 *eigenvalue* 的 *algebraic multiplicity* 和 *geometric multiplicity*, ... 等性質, 我們就不再贅敘.

我們也可定義何謂 *diagonalizable matrix* 如下.

**Definition .** 假設  $A \in M_n(F)$ . 若存在一組  $F^n$  *basis* 是由  $A$  的 *eigenvectors* 所組成, 則稱  $A$  為一個 *diagonalizable matrix*.

我們也有如同 linear operator 來判斷矩陣  $A$  是否為 *diagonalizable* 的等價方法.

**Theorem .** 假設  $A \in M_n(F)$ . 則以下是等價的.

- (1)  $A$  是一個 *diagonalizable matrix*.
- (2) 存在  $P \in M_n(F)$  為 *invertible* 使得  $P^{-1} \cdot A \cdot P$  為一個 *diagonal matrix*.
- (3)  $\chi_A(x)$  可以完全分解成  $F[x]$  中的一次多項式之乘積, 且  $A$  的每一個 *eigenvalue* 的 *algebraic multiplicity* 和 *geometric multiplicity* 相等.
- (4)  $\mu_A(x)$  可以完全分解成  $F[x]$  中相異的 *monic* 一次多項式之乘積.

當  $A$  為 *diagonalizable*, 前面 Theorem 中  $P^{-1} \cdot A \cdot P$  這一個 *diagonal matrix* 就稱為  $A$  的 *diagonal form*. 我們特別說明一下如何找到  $P$  將  $A$  化為 *diagonal form*. 假設

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = D = \begin{pmatrix} \gamma_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \gamma_n \end{pmatrix},$$

且令  $P_i \in F^n$  為  $P$  的  $i$ -th column. 前面提過求兩個矩陣相乘其  $i$ -th column 的方法, 我們有  $A \cdot P$  的  $i$ -th column 為  $A \cdot P_i$ , 而  $P \cdot D$  的  $i$ -th column 為  $\gamma_i P_i$ , 所以利用  $A \cdot P = P \cdot D$  得  $A \cdot P_i = \lambda P_i$ , 也就是說  $P$  的  $i$ -th column  $P_i$  就是一個 *eigenvalue* 為  $\gamma_i$  的 *eigenvector*. 因此我們只要將一個 *diagonalizable matrix*  $A$  的 *eigenvectors* 所組成  $F^n$  的一組 *basis*, 按照順序一個 column 一個 column 填入, 所得的 *invertible matrix*  $P$ , 就是可以將  $A$  對角化. 也就是說  $P^{-1} \cdot A \cdot P$  為一個對角矩陣.

最後我們說明為何兩個 *diagonalizable matrices*, 將其化成 *diagonal form* 後就可以判斷其是否為 *similar*. 首先強調若  $A$  為 *diagonalizable*, 且  $B \sim A$ , 則  $B$  必為 *diagonalizable*. 這

是因為假設  $P$  為 invertible 且  $P^{-1} \cdot A \cdot P = D$  為 diagonal matrix. 由存在  $Q$  為 invertible 使得  $B = Q^{-1} \cdot A \cdot Q$ , 得

$$(Q^{-1} \cdot P)^{-1} \cdot B \cdot (Q^{-1} \cdot P) = (P^{-1} \cdot Q) \cdot (Q^{-1} \cdot A \cdot Q) \cdot (Q^{-1} \cdot P) = P^{-1} \cdot A \cdot P = D.$$

又因  $Q^{-1} \cdot P$  為 invertible 得證  $B$  為 diagonalizable.

另一方面若  $A, B$  皆為 diagonalizable, 若  $A \sim B$ , 表示它們有相同的 characteristic polynomial, 因此有相同的 eigenvalues 且  $A$  和  $B$  同一個 eigenvalue 的 algebraic multiplicity 皆相等. 而每一個 eigenvalue 的 algebraic multiplicity 又等於其 geometric multiplicity, 所以將  $A, B$  化為 diagonal form 後同一個 eigenvalue 發生在的對角線上的次數會相同. 反之, 若將  $A, B$  化為 diagonal form 後同一個 eigenvalue 發生在的對角線上的次數相同, 表示將 diagonal form 對角線位置適當互換後, 兩個 diagonal form 會相等. 然而對角線位置互換只是將 eigenvector 所形成的 ordered basis 做適當重新排序 (例如將  $(i, i)$ -th entry 和  $(j, j)$ -th entry 互換只是將原來  $P$  的  $i$ -th column 和  $j$ -th column 互換), 所以得知  $A \sim B$ .

## 6. TRIANGULAR FORM

當 linear operator  $T$  的 characteristic polynomial 可完全分解成一次 monic polynomials 的乘積時,  $T$  不一定是 diagonalizable. 這一節中我們將探討在這種情形時  $T$  可以化成怎樣的形式.

注意本節中我們仍假設  $\chi_T(x)$  可以完全分解成一次的多項式的乘積 (即  $\chi_T(x) = (x - \lambda_1)^{c_1} \cdots (x - \lambda_k)^{c_k}$ ). 這個假設當  $V$  over 的 field  $F$  是 algebraically closed (例如  $F = \mathbb{C}$ ) 時自然會成立. 利用 Primary Decomposition Theorem, 我們假設  $T$  的 minimal polynomial 為  $\mu_T(x) = (x - \lambda)^m$ . 也就是說  $(T - \lambda \text{id})^m = \mathbf{O}$ .

當一個 linear operator  $T : V \rightarrow V$  滿足  $T^m = \mathbf{O}$ , 我們稱之為 *nilpotent*, 而最小的正整數  $m$  使得  $T^m = \mathbf{O}$ , 稱為這個 nilpotent operator 的 *index*. 因為我們假設  $T - \lambda \text{id}$  為 nilpotent 且 index 為  $m$ . 我們來特別探討 nilpotent operator 的性質.

對於一個 linear operator  $T : V \rightarrow V$ . 若  $\mathbf{v} \in \text{Im}(T^i)$ , 表示存在  $\mathbf{u} \in V$  使得  $\mathbf{v} = T^i(\mathbf{u})$ , 因此當  $i \geq 2$  時, 我們有  $\mathbf{v} = T^{i-1}(T(\mathbf{u})) \in \text{Im}(T^{i-1})$ . 所以我們自然有以下的 chain of subspaces

$$V \supseteq \text{Im}(T) \supseteq \text{Im}(T^2) \supseteq \cdots \supseteq \text{Im}(T^{i-1}) \supseteq \text{Im}(T^i) \supseteq \cdots.$$

特別的, 當  $T$  為 nilpotent of index  $m$ , 我們有以下情形.

**Lemma .** 假設  $\dim(V) > 0$ , 若  $T$  為 nilpotent operator of index  $m$ , 則我們有以下的 chain of subspaces.

$$V \supsetneq \text{Im}(T) \supsetneq \text{Im}(T^2) \supsetneq \cdots \supsetneq \text{Im}(T^{i-1}) \supsetneq \text{Im}(T^i) \supsetneq \cdots \supsetneq \text{Im}(T^{m-1}) \supsetneq \text{Im}(T^m) = \{\mathbf{O}_V\}.$$

接下來我們說明若  $\dim(V) = n$  且  $T : V \rightarrow V$  為 nilpotent operator of index  $m$ , 如何將其化為 triangular form. 首先選取  $\text{Im}(T^{m-1})$  的 ordered basis  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k_1})$ , 注意此時我們有  $T(\mathbf{v}_i) \in \text{Im}(T^m) = \{\mathbf{O}_V\}$ , 故

$$T(\mathbf{v}_i) = \mathbf{O}_V, \forall i = 1, \dots, k_1.$$

接著加入  $\{\mathbf{v}_{k_1+1}, \dots, \mathbf{v}_{k_2}\}$  使得  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k_1}, \dots, \mathbf{v}_{k_2})$  為  $\text{Im}(T^{\circ m-2})$  的 ordered basis. 此時我們有

$$T(\mathbf{v}_i) \in \text{Im}(T^{\circ m-1}) = \text{Span}(\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k_1}\}), \forall i = k_1 + 1, \dots, k_2,$$

而且利用 ordered basis  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k_1}, \dots, \mathbf{v}_{k_2})$  所得  $T|_{\text{Im}(T^{\circ m-2})}$  的 representative matrix 為

$$\begin{pmatrix} \mathbf{O}_{k_1, k_1} & * \\ \mathbf{O}_{k_2-k_1, k_1} & \mathbf{O}_{k_2-k_1, k_2-k_1} \end{pmatrix},$$

其中  $\mathbf{O}_{i,j}$  表示為  $i \times j$  階的零矩陣, 而右上角的  $*$  為一個  $k_1 \times k_2 - k_1$  階的非零矩陣. 接下來加入  $\{\mathbf{v}_{k_2+1}, \dots, \mathbf{v}_{k_3}\}$  使得  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k_1}, \dots, \mathbf{v}_{k_2}, \dots, \mathbf{v}_{k_3})$  為  $\text{Im}(T^{\circ m-3})$  的 ordered basis. 此時我們有

$$T(\mathbf{v}_i) \in \text{Im}(T^{\circ m-2}) = \text{Span}(\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k_1}, \dots, \mathbf{v}_{k_2}\}), \forall i = k_2 + 1, \dots, k_3,$$

而且利用 ordered basis  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k_1}, \dots, \mathbf{v}_{k_2}, \dots, \mathbf{v}_{k_3})$  所得  $T|_{\text{Im}(T^{\circ m-3})}$  的 representative matrix 為

$$\begin{pmatrix} \mathbf{O}_{k_1, k_1} & * & * \\ \mathbf{O}_{k_2-k_1, k_1} & \mathbf{O}_{k_2-k_1, k_2-k_1} & * \\ \mathbf{O}_{k_3-k_2, k_1} & \mathbf{O}_{k_3-k_2, k_2-k_1} & \mathbf{O}_{k_3-k_2, k_3-k_2} \end{pmatrix}.$$

這樣一直下去我們可得到  $\text{Im}(T)$  的 ordered basis  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k_{m-1}})$ , 其中對於  $j = 1, \dots, m-1$ , 皆有  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k_j})$  為  $\text{Im}(T^{\circ m-j})$  的 ordered basis 且

$$T(\mathbf{v}_i) \in \text{Im}(T^{\circ m-(j-1)}) = \text{Span}(\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k_{j-1}}\}), \forall i = k_{j-1} + 1, \dots, k_j.$$

最後加入  $\{\mathbf{v}_{k_{m-1}+1}, \dots, \mathbf{v}_n\}$  使得  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k_{m-1}}, \dots, \mathbf{v}_n)$  為  $V$  的 ordered basis, 此時

$$T(\mathbf{v}_i) \in \text{Im}(T) = \text{Span}(\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k_{m-1}}\}), \forall i = k_{m-1} + 1, \dots, k_n,$$

而且利用 ordered basis  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k_{m-1}}, \dots, \mathbf{v}_n)$  所得  $T$  的 representative matrix 為

$$\begin{pmatrix} \mathbf{O} & * & * \\ \vdots & \ddots & * \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix}.$$

這一個矩陣是對角線皆為 0 的 upper triangular matrix (上三角矩陣), 所以我們有以下的結果.

**Proposition .** 假設  $V$  為 finite dimensional  $F$ -space 且  $T : V \rightarrow V$  為 linear operator. 則  $T$  為 nilpotent 若且唯若存在  $V$  的 ordered basis  $\beta$  使得  $[T]_\beta$  為 upper triangular matrix 且  $[T]_\beta$  的對角線皆為 0.

回顧一下, 對於 linear operator  $T : V \rightarrow V$ , 要找到  $\text{Im}(T)$ , 我們可以利用  $V$  的 ordered basis  $\beta$ , 先得到 representative matrix  $[T]_\beta$ . 再求  $[T]_\beta$  的 column space  $C([T]_\beta)$  (我們用  $C(A)$  表示矩陣  $A$  的 column space). 接著將 column space 的元素用  $\tau_\beta^{\circ-1}$  還原成  $V$  的元素, 就得到  $\text{Im}(T)$  的元素了.

現在我們回到  $T$  的 minimal polynomial 為  $\mu_T(x) = (x - \lambda)^m$  的情形, 此時  $T - \lambda \text{id}$  為 nilpotent 所以由前一 Proposition 知存在 ordered basis  $\beta$  使得  $[T - \lambda \text{id}]_\beta = U$  為一個 diagonal 皆為 0 的 upper triangular matrix

$$U = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ \vdots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

然而若  $\dim(V) = n$ , 因  $[T - \lambda \text{id}]_\beta = [T]_\beta - \lambda I_n$ , 故得  $[T]_\beta = \lambda I_n + U$ , 為一個 diagonal 皆為  $\lambda$  的 upper triangular matrix

$$\lambda I_n + U = \begin{pmatrix} \lambda & * & * \\ & \ddots & * \\ \mathbf{O} & & \lambda \end{pmatrix}.$$

**Theorem .** 假設  $V$  為 finite dimensional  $F$ -space. 若  $T : V \rightarrow V$  為 linear operator 其 characteristic polynomial 為

$$\chi_T(x) = (x - \lambda_1)^{c_1} \cdots (x - \lambda_k)^{c_k},$$

其中  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  為  $F$  中相異的元素, 則存在  $V$  的 ordered basis  $\beta$  使得

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} A_1 & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & A_k \end{pmatrix},$$

其中每個  $A_i$  為  $c_i \times c_i$  階的 upper triangular matrix

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & * & * \\ & \ddots & * \\ \mathbf{O} & & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

這一個 Theorem 告訴我們當  $T$  的 characteristic polynomial 可完全分解成  $F[x]$  中的一次多項式乘積, 雖然  $T$  可能不能化成 diagonal form 不過一定可以化成 triangular form.

接著我們來看 linear operator 相對應到  $n \times n$  matrix 的結論.

**Theorem .** 假設  $A \in M_n(F)$  且其 characteristic polynomial 和 minimal polynomial 分別為

$$\chi_A(x) = (x - \lambda_1)^{c_1} \cdots (x - \lambda_k)^{c_k}, \mu_A(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \cdots (x - \lambda_k)^{m_k}$$

其中  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  為  $F$  中相異的元素. 則存在 invertible matrix  $P$  使得

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} A_1 & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & A_k \end{pmatrix},$$

其中每個  $A_i$  為  $c_i \times c_i$  階的 upper triangular matrix

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & * & * \\ & \ddots & * \\ \mathbf{O} & & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

假設  $A \in M_n(F)$  且  $\chi_A(X) = (x - \lambda_1)^{c_1} \cdots (x - \lambda_k)^{c_k}$ ,  $\mu_A(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \cdots (x - \lambda_k)^{m_k}$ . 我們說明如何找到 invertible matrix  $M$  使得  $M^{-1} \cdot A \cdot M$  為 upper triangular matrix. 首先我們利用 primary decomposition 的方法找到 invertible matrix  $P$  使得  $P^{-1} \cdot A \cdot P$  為 block diagonal matrix

$$\begin{pmatrix} A_1 & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & A_k \end{pmatrix},$$

接著考慮每一個  $c_i \times c_i$  matrix  $A_i$ . 因為  $\mu_{A_i}(x) = (x - \lambda_i)^{m_i}$ ,  $A_i - \lambda_i I_{c_i}$  是 nilpotent of index  $m_i$ , 我們可以先找  $(A_i - \lambda_i I_{c_i})^{m_i-1}$  的 column space 的一組 basis, 然後擴大成  $(A_i - \lambda_i I_{c_i})^{m_i-2}$  的 column space 的一組 basis, 這樣一直下去直到擴大成  $F^{c_i}$  的一組 basis. 若令這組 basis 以 column by column 依序組成的  $c_i \times c_i$  的 matrix 為  $Q_i$ , 則我們有  $Q_i^{-1} \cdot A_i \cdot Q_i$  為 upper triangular matrix. 最後將這些  $Q_i$  在 diagonal 的位置依序放入, 組成  $n \times n$  的 invertible matrix

$$\begin{pmatrix} Q_1 & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & Q_k \end{pmatrix},$$

就會使得

$$(P \cdot Q)^{-1} \cdot A \cdot (P \cdot Q) = Q^{-1} \cdot (P^{-1} \cdot A \cdot P) \cdot Q = \begin{pmatrix} Q_1^{-1} \cdot A_1 \cdot Q_1 & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & Q_k^{-1} \cdot A_k \cdot Q_k \end{pmatrix},$$

為 upper triangular matrix 了.

## 7. JORDAN FORM

將矩陣化為 Triangular form 並不容易讓我們判斷兩個矩陣是否為 similar. 我們將挑選更好的 ordered basis 將其化為所謂的 Jordan form. 本節中我們仍假設  $\chi_T(x)$  可以完全分解成一次的多項式的乘積 (即  $\chi_T(x) = (x - \lambda_1)^{c_1} \cdots (x - \lambda_k)^{c_k}$ ). 同樣的我們先討論 nilpotent 的情形.

對於一個 linear operator  $T : V \rightarrow V$ . 這一次我們探討  $T, T^{\circ 2}, \dots$  的 kernel 間的關係. 若  $\mathbf{v} \in \text{Ker}(T^{\circ i})$ , 表示  $T^{\circ i}(\mathbf{v}) = \mathbf{O}_V$ , 故得  $T^{\circ i+1}(\mathbf{v}) = T(T^{\circ i}(\mathbf{v})) = \mathbf{O}_V$ . 所以我們自然有以下 chain of subspaces

$$\{\mathbf{O}_V\} \subseteq \text{Ker}(T) \subseteq \text{Ker}(T^{\circ 2}) \subseteq \cdots \subseteq \text{Ker}(T^{\circ i-1}) \subseteq \text{Ker}(T^{\circ i}) \subseteq \cdots$$

特別的, 當  $T$  為 nilpotent of index  $m$ , 我們有  $\text{Ker}(T^{\circ i+1}) \neq \text{Ker}(T^{\circ i})$ ,  $\forall i = 1, \dots, m-1$ .

**Lemma .** 假設  $\dim(V) > 0$ , 若  $T$  為 nilpotent operator of index  $m$ , 則我們有以下的 chain of subspaces.

$$\{\mathbf{O}_V\} \subsetneq \text{Ker}(T) \subsetneq \text{Ker}(T^{\circ 2}) \subsetneq \cdots \subsetneq \text{Ker}(T^{\circ i-1}) \subsetneq \text{Ker}(T^{\circ i}) \subsetneq \cdots \subsetneq \text{Ker}(T^{\circ m-1}) \subsetneq \text{Ker}(T^{\circ m}) = V.$$

現假設  $i \geq 2$ , 若  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s \in \text{Ker}(T^{\circ i+1})$  為 linearly independent 且

$$\text{Span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s) \cap \text{Ker}(T^{\circ i}) = \{\mathbf{O}_V\},$$

則  $T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_s) \in \text{Ker}(T^{\circ i})$  亦為 linearly independent. 事實上若

$$r_1 T(\mathbf{v}_1) + \dots + r_s T(\mathbf{v}_s) = \mathbf{O}_V,$$

則由  $T(r_1 \mathbf{v}_1 + \dots + r_s \mathbf{v}_s) = \mathbf{O}_V$  得  $r_1 \mathbf{v}_1 + \dots + r_s \mathbf{v}_s \in \text{Ker}(T) \subseteq \text{Ker}(T^{\circ i})$ . 故由  $\text{Span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s) \cap \text{Ker}(T^{\circ i}) = \{\mathbf{O}_V\}$  之假設得  $r_1 \mathbf{v}_1 + \dots + r_s \mathbf{v}_s = \mathbf{O}_V$ , 再由  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s$  為 linearly independent 得  $r_1 = \dots = r_s = 0$ , 得證  $T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_s)$  為 linearly independent. 另外我們也可得

$$\text{Span}(T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_s)) \cap \text{Ker}(T^{\circ i-1}) = \{\mathbf{O}_V\}.$$

這是因為若  $\mathbf{v} = r_1 T(\mathbf{v}_1) + \dots + r_s T(\mathbf{v}_s) \in \text{Ker}(T^{\circ i-1})$ , 則

$$\mathbf{O}_V = T^{\circ i-1}(r_1 T(\mathbf{v}_1) + \dots + r_s T(\mathbf{v}_s)) = T^{\circ i}(r_1 \mathbf{v}_1 + \dots + r_s \mathbf{v}_s),$$

即  $r_1 \mathbf{v}_1 + \dots + r_s \mathbf{v}_s \in \text{Span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s) \cap \text{Ker}(T^{\circ i}) = \{\mathbf{O}_V\}$ . 再由  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s$  為 linearly independent 得  $r_1 = \dots = r_s = 0$ , 得證  $\mathbf{v} = \mathbf{O}_V$ . 我們有以下之結論.

**Lemma .** 假設  $T : V \rightarrow V$  為 linear operator. 當  $i \geq 2$  時, 若  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s \in \text{Ker}(T^{\circ i+1})$  為 linearly independent 且  $\text{Span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s) \cap \text{Ker}(T^{\circ i}) = \{\mathbf{O}_V\}$ , 則  $T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_s) \in \text{Ker}(T^{\circ i})$  為 linearly independent 且  $\text{Span}(T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_s)) \cap \text{Ker}(T^{\circ i-1}) = \{\mathbf{O}_V\}$ .

特別地, 若  $V$  為 finite dimensional  $F$ -space, 則

$$\dim(\text{Ker}(T^{\circ i+1})) - \dim(\text{Ker}(T^{\circ i})) \leq \dim(\text{Ker}(T^{\circ i})) - \dim(\text{Ker}(T^{\circ i-1})).$$

接下來我們先說明何謂 Jordan form, 然後再說明如何得到 Jordan form.

**Definition .** 給定  $\lambda \in F$ , 對於  $1 \times 1$  matrix  $(\lambda)$  以及如下形式的更高階 square matrix

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix},$$

也就是說對角線  $(i, i)$ -th entry 為  $\lambda$ , 而對角線下方的位置即  $(i, i-1)$ -th entry 為 1, 其他位置皆為 0 的矩陣, 我們稱為 elementary Jordan matrix associated with  $\lambda$ . 而由 associated with  $\lambda$  的 elementary Jordan matrices 所組成的 block diagonal matrix, 即

$$\begin{pmatrix} J_1 & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & J_k \end{pmatrix},$$

其中每個  $J_i$  皆為 elementary Jordan matrix associated with  $\lambda$ , 稱為 Jordan block matrix associated with  $\lambda$ .



**Theorem .** 假設  $V$  為 *finite dimensional  $F$ -space*. 若  $T : V \rightarrow V$  為 *linear operator* 其 *characteristic polynomial* 和 *minimal polynomial* 分別為

$$\chi_T(x) = (x - \lambda_1)^{c_1} \cdots (x - \lambda_k)^{c_k}, \mu_T(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \cdots (x - \lambda_k)^{m_k}$$

其中  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  為  $F$  中相異的元素, 則存在  $V$  的 *ordered basis*  $\beta$  使得

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} J_1 & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & J_k \end{pmatrix},$$

其中每個  $J_i$  為  $c_i \times c_i$  階的 *Jordan block matrix associated with  $\lambda_i$* , 而且組成  $J_i$  的 *elementary Jordan matrices* 的個數就是  $\lambda_i$  的 *geometric multiplicity*, 即  $\dim(\text{Ker}(T - \lambda_i \text{id}))$ . 另外  $J_i$  中最高階的 *elementary Jordan matrix* 為  $m_i \times m_i$  階.

對於  $n \times n$  的矩陣我們也有相對應的定理, 也就是說若  $A \in M_n(F)$  其 *characteristic polynomial* 可以完全分解成  $F[x]$  中的一次多項式乘積  $\chi_A(x) = (x - \lambda_1)^{c_1} \cdots (x - \lambda_k)^{c_k}$ , 則存在 invertible matrix  $P \in M_n(F)$  使得

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} J_1 & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & J_k \end{pmatrix},$$

其中每個  $J_i$  為  $c_i \times c_i$  階的 *Jordan block matrix associated with  $\lambda_i$* . 這個 matrix 我們稱為  $A$  的 *Jordan form*.

我們說明如何找到 invertible matrix  $P$  使得  $P^{-1} \cdot A \cdot P$  為 *Jordan form*. 首先注意我們不必如得到 *triangular form* 的情形先把  $A$  化為 *block diagonal matrix*. 這是因為若  $\mu_A(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \cdots (x - \lambda_k)^{m_k}$ , 對於每一個  $i = 1, \dots, k$ , 我們必須找到一組  $(A - \lambda_i I_n)^{m_i}$  的 null space  $N((A - \lambda_i I_n)^{m_i})$  的 basis, 而  $N((A - \lambda_i I_n)^{m_i})$  剛好是 *primary decomposition* 中所考慮的 *invariant subspace*, 所以我們不必重複做變換 basis 的動作. 要找到  $P$  的步驟如下: 對於每一個  $i = 1, \dots, k$ , 先找到  $N(A - \lambda_i I_n)$  的 basis  $S_1$ , 再將之擴大成  $S_2$  使之成為  $N((A - \lambda_i)^2)$  的 basis. 這樣一直下去直到得到  $N((A - \lambda_i)^{m_i})$  的 basis  $S_{m_i}$ . 接下來令  $S_{m_i} \setminus S_{m_i-1} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k_1}\}$ , 然後得  $\{A\mathbf{v}_1, \dots, A\mathbf{v}_{k_1}\}$ . 將之擴大成  $\{A\mathbf{v}_1, \dots, A\mathbf{v}_{k_1}, \mathbf{v}_{k_1+1}, \dots, \mathbf{v}_{k_2}\}$  使之與  $S_{m_i-2}$  的聯集成為  $N((A - \lambda_i)^{m_i-1})$  的 basis 並取代  $S_{m_i-1} \setminus S_{m_i-2}$ . 這樣一直下去直到將  $S_2 \setminus S_1$  取代完畢. 最後將這些 bases 排序得到  $P$ .

在前面我們提到當  $A, B \in M_n(F)$  為 *diagonalizable* 時, 我們可以將其對角線位置的 *eigenvalue* 適當的重排來判斷  $A, B$  是否為 *similar*. 同樣的若  $A, B$  的 *characteristic polynomial* 在  $F[x]$  可完全分解成一次的 *monic polynomials* 的乘積, 我們可以將  $A, B$  化為 *Jordan form* 來判斷它們是否為 *similar*. 當然了先決條件是  $\chi_A(x) = \chi_B(x)$  且  $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ . 若其中有一個不相等便可知  $A, B$  不為 *similar*, 而若皆相等就需藉由  $A, B$  的 *Jordan form* 來確定. 對於  $A, B$  的每一個 *eigenvalue*, 若將  $A, B$  對於 associated with  $\lambda$  的 *block Jordan matrix* 中的 *elementary Jordan matrices* 做適當重排後會相同, 則知  $A \sim B$ . 反之, 若  $A \sim B$ , 我們可將  $A, B$  視為某一個 *linear operator*  $T$  用不同 *ordered bases* 所得的 *representative matrices*. 由

於 associated  $\lambda$  的 elementary Jordan matrices 的各個階數的個數告訴我們

$$\dots, \dim(\text{Ker}((T - \lambda \text{id})^{\circ i-1})), \dim(\text{Ker}((T - \lambda \text{id})^{\circ i})), \dim(\text{Ker}((T - \lambda \text{id})^{\circ i+1})), \dots$$

這些 dimensions 之間的關係, 而這些關係和 ordered basis 的選取無關, 所以  $A, B$  associated  $\lambda$  的 elementary Jordan matrices 的各個階數的個數會相同, 也就是  $A, B$  可以化為相同的 Jordan form. 因為 Jordan form 可以用來判定兩個 matrixes 是否為 similar, 所以 Jordan form 可以視為一種 canonical form.

最後我們談論 Jordan form 一個重要的應用. 回顧一下, 若  $A \in M_n(F)$  則  $A$  和  $A$  的 transpose  $A^t$  有相同的 characteristic polynomial 和 minimal polynomial. 這表示  $A$  和  $A^t$  有可能為 similar. 事實上當  $\chi_A(x)$  可以在  $F[x]$  中完全分解成一次的 monic polynomials 的乘積, 我們可得  $A \sim A^t$ . 這是因為當  $A \in M_n(F)$  時,  $\dim(N(A)) + \dim(C(A)) = n$ . 又因為  $\dim(C(A)) = \dim(C(A^t))$ , 所以我們得  $\dim(N(A)) = \dim(N(A^t))$ . 同理, 對於每一個  $A$  的 eigenvalue  $\lambda$  (也會是  $A^t$  的 eigenvalue), 我們有

$$\dim(N((A - \lambda I_n)^i)) = \dim(N(((A - \lambda I_n)^t)^i)) = \dim(N((A^t - \lambda I_n)^i)).$$

所以將  $A$  化為 Jordan form, 每一個階數的 elementary Jordan matrix associated with  $\lambda$  和  $A^t$  同階的 elementary Jordan matrix associated with  $\lambda$  個數都相同, 也就是說  $A$  和  $A^t$  可以化成同樣的 Jordan form. 我們有以下之結果.

**Theorem .** 假設  $A \in M_n(F)$ . 若  $\chi_A(x)$  可以在  $F[x]$  中完全分解成一次的 monic polynomials 的乘積, 則  $A$  的 transpose  $A^t$  和  $A$  為 similar.

以後我們會提到若  $A, B \in M_n(F)$  且存在一個比  $F$  大的 field  $\tilde{F}$  使得在  $M_n(\tilde{F})$  中  $A \sim B$  (即存在  $\tilde{P} \in M_n(\tilde{F})$  invertible 使得  $B = \tilde{P}^{-1} \cdot A \cdot \tilde{P}$ ), 則在  $M_n(F)$  中  $A \sim B$  (即存在  $P \in M_n(F)$  invertible 使得  $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$ ). 所以事實上不需  $\chi_A(x)$  可以在  $F[x]$  中完全分解成一次的 monic polynomials 的乘積之假設, 我們仍可得  $A \sim A^t$ .