Question 4.22. 試利用 $T^{\circ d}(\mathbf{v}) \in \mathrm{Span}(\mathbf{v}, T(\mathbf{v}), \dots, T^{\circ d-1}(\mathbf{v}), p(T)(\mathbf{v}))$ 來證明 *(4.7)* 為 $C_{\mathbf{v}}$ 的一組 *basis.*

Example 4.5.2. 考慮 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, 計算得 $\mu_A(x) = (x^2+1)^2$. 因 $A^2 + I_4$ 的 null space 為 $N(A^2+I_4) = \mathrm{Span}((0,1,0,1)^{\mathrm{t}}, (0,0,1,0)^{\mathrm{t}})$, 我們得 $\mathbb{R}^4 = C_{\mathbf{v}}$, 其中 $\mathbf{v} \notin N(A^2+I_4)$, 且 $\mu_{\mathbf{v}}(x) = (x^2+1)^2$. 所以取 $\mathbf{v} = (1,0,0,0)^{\mathrm{t}}$, 則由 Theorem 4.4.4 知

$$\{\mathbf{v}, A\mathbf{v}, A^2\mathbf{v}, A^3\mathbf{v}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

為 $\mathbb{R}^4 = C_{\mathbf{v}}$ 的一組 basis. 然而 Lemma 4.5.1 告訴我們

$$\{\mathbf{v}, A\mathbf{v}, (A^2+I_4)\mathbf{v}, (A^3+A)\mathbf{v}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

亦為 $\mathbb{R}^4 = C_{\mathbf{v}}$ 的一組 basis.

另外考慮 $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 得 $\mu_B(x) = (x-1)^2$. 因 $\mathrm{Span}((1,1,0)^{\mathrm{t}}, (-1,0,1)^{\mathrm{t}})$ 為 $B - I_3$ 的 null space, 若令 $\mathbf{w} = (1,0,0)^{\mathrm{t}}$, 我們有 $C_{\mathbf{w}}$ 的 cyclic basis 為

$$\{\mathbf{w}, B\mathbf{w}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

然而 Lemma 4.5.1 告訴我們

$$\{\mathbf{w}, (B-I_3)\mathbf{w}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

亦為 $C_{\mathbf{w}}$ 的一組 basis.

接下來我們要探討若利用 (4.7) 這一組 basis, 則 $T|_{C_{\mathbf{v}}}$ 的 representative matrix 為何. 對於 $0 \le i \le m-1$, $0 \le j \le d-1$, 令 $\mathbf{v}_{id+j+1} = p^i(T)(T^{\circ j}(\mathbf{v}))$. 我們就是要考慮 $\beta = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{md})$ 這一個 $C_{\mathbf{v}}$ 的 ordered basis. 假設 $p(x) = x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, 當 $1 \le k \le d-1$ 時, 我們有 $T(\mathbf{v}_k) = T(T^{\circ k-1}(\mathbf{v})) = T^{\circ k}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_{k+1}$. 而

$$\begin{aligned} T(\mathbf{v}_d) = T(T^{\circ d-1}(\mathbf{v})) = T^{\circ d}(\mathbf{v}) &= p(T)(\mathbf{v}) - a_{d-1}T^{\circ d-1}(\mathbf{v}) - \cdots - a_1 T(\mathbf{v}) - a_0\mathbf{v} \\ &= -a_0\mathbf{v}_1 - a_1\mathbf{v}_2 - \cdots - a_{d-1}\mathbf{v}_d + \mathbf{v}_{d+1}. \end{aligned}$$

也就是說 $[T|_{C_{\mathbf{v}}}]_\beta$ 這一個 matrix 的前 d 個 column 分別為

$$\begin{pmatrix} 0\\1\\0\\ \vdots\\0\\0\\0\\ \vdots\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\ \vdots\\0\\0\\0\\ \vdots\\0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\ \vdots\\1\\0\\0\\ \vdots\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a_0\\-a_1\\-a_2\\ \vdots\\-a_{d-1}\\1\\0\\ \vdots\\0 \end{pmatrix}.$$

也就是說前 d 個 column 所形成的 matrix 為

$$\begin{pmatrix} C_{p(x)}\\ U\\ \mathbf{O} \end{pmatrix}$$

這樣的形式, 其中 $C_{p(x)}$ 為 $d\times d$ 的 companion matrix of $p(x)$, 而 U 為 $d\times d$ 的 matrix 其在最右上角為 1 其他位置皆為 0. 最後的 $\mathbf{O}$ 是 $(m-2)d\times d$ 的 zero matrix. 同理當 $id+1\leq k=id+j+1\leq(i+1)d-1$, 我們有 $T(\mathbf{v}_k)=T(p^i(T)(T^{\circ j}(\mathbf{v}))=p^i(T)(T^{\circ j+1}(\mathbf{v}))=\mathbf{v}_{k+1}$. 而當 $k=(i+1)d$ 時

$$\begin{aligned} T(\mathbf{v}_{(i+1)d}) &= T(p^i(T)(T^{\circ d-1}(\mathbf{v})))=p^i(T)(T^{\circ d}(\mathbf{v}))\\ &= p^{i+1}(T)(\mathbf{v})-a_{d-1}p^i(T)(T^{\circ d-1}(\mathbf{v}))-\cdots-a_1p^i(T)(T(\mathbf{v}))-a_0p^i(T)(\mathbf{v})\\ &= \begin{cases} -a_0\mathbf{v}_{id+1}-a_1\mathbf{v}_{id+2}-\cdots-a_{d-1}\mathbf{v}_{(i+1)d}+\mathbf{v}_{(i+1)d+1}, & \text{if } i+1<m;\\ -a_0\mathbf{v}_{md+1-d}-a_1\mathbf{v}_{md+2-d}-\cdots-a_{d-1}\mathbf{v}_{md}, & \text{if } i+1=m. \end{cases} \end{aligned}$$

故得到

$$[T|_{C_{\mathbf{v}}}]_\beta=\begin{pmatrix} C_{p(x)} & & & & \\ U & C_{p(x)} & & \mathbf{O} & \\ & U & \ddots & & \\ & \mathbf{O} & \ddots & C_{p(x)} & \\ & & & U & C_{p(x)} \end{pmatrix}.$$

這個 $md\times md$ 矩陣稱為 the *classical matrix associated with* $p(x)^m$.

Example 4.5.3. 我們探討在 Example 4.5.2 中, 選取不同的 basis 所得的 similar matrices. 利用 $\mathbf{v}$ 所形成的 cyclic basis, 考慮 $P_1=\begin{pmatrix} 1&0&-1&0\\0&1&0&-2\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$, 則 $P_1^{-1}AP_1=\begin{pmatrix} 0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&1&0&-2\\0&0&1&0\end{pmatrix}$ 為 $\mu_{\mathbf{v}}(x)=(x^2+1)^2=x^4+2x^2+1$ 的 companion matrix. 而若考慮 $P_2=\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$,

則 $P_2^{-1}AP_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 為 classical matrix associated with $\mu_{\mathbf{v}}(x) = (x^2+1)^2$. 注意 $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 為 x^2+1 的 companion matrix.

關於矩陣 B, 由於 $\mathbf{u} = (1,1,0)^t \in N(B-I_3)$ 且 $\mathbf{u} \notin C_{\mathbf{w}}$, 我們得 $\mathbb{R}^3 = C_{\mathbf{w}} \oplus C_{\mathbf{u}}$. 現考慮 $Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, 我們有 $Q_1^{-1}BQ_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 為 B 的 rational form. 而若考慮 $Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, 我們有 $Q_2^{-1}BQ_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 為 B 的 Jordan form.

Question 4.23. 試說明 *the classical matrix associated with* $(x-\lambda)^m$ 就是 $m \times m$ 的 *elementary Jordan block associated with* λ.

對於一般的情形, 若一個 F-linear operator $T : V \to V$ 的 minimal polynomial $\mu_T(x) = p_1(x)^{m_1} \cdots p_k(x)^{m_k}$, 利用 cyclic decomposition theorem (Theorem 4.4.10),

$$V = C_{\mathbf{v}_{1,1}} \oplus \cdots C_{\mathbf{v}_{1,n_1}} \oplus \cdots \oplus C_{\mathbf{v}_{k,1}} \oplus \cdots \oplus C_{\mathbf{v}_{k,n_k}},$$

其中每一個 $\mathbf{v}_{i,j}$ 的 T-annihilator 為 $\mu_{\mathbf{v}_{i,j}}(x) = p_i(x)^{m_{i,j}}$ 滿足 $m_i = m_{i,1} \geq m_{i,2} \geq \cdots \geq m_{i,n_i}$. 此時若對每個 $C_{\mathbf{v}_{i,j}}$, 我們選取如 Lemma 4.5.1 中 (4.7) 這樣一組 ordered basis, 然後組合成 V 的一組 ordered basis β, 則 $[T]_\beta$ 為以下形式的 block diagonal matrix

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} A_{1,1} & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & A_{1,n_1} & & & & \\ & \mathbf{O} & & \ddots & & \mathbf{O} & \\ & & & & A_{k,1} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & A_{k,n_k} \end{pmatrix},$$

其中每一個 $A_{i,j}$ 為 classical matrix associated with $\mu_{\mathbf{v}_{i,j}}(x) = p_i(x)^{m_{i,j}}$. 這也告訴我們任何的方陣都會 similar to 這樣形式的方陣, 我們稱此為 *classical form*.

Example 4.5.4. 我們延續 Example 4.4.11, 探討 A 的 classical form. 這裡為了方便起見, 我們沿用 Example 4.4.11 的符號. 因 $\mu_{\mathbf{w}_1}(x) = x^2+1$, $\mu_{\mathbf{w}_2}(x) = (x-1)^2$ 以及 $\mu_{\mathbf{w}_3}(x) = x-1$, 考慮 $C_{\mathbf{w}_1}, C_{\mathbf{w}_2}$ 和 $C_{\mathbf{w}_3}$ 如 Lemma 4.5.1 中 (4.7) 這樣的 ordered basis $(\mathbf{w}_1, A\mathbf{w}_1)$, $(\mathbf{w}_2, (A-I_5)\mathbf{w}_2)$ 以及 $(\mathbf{w}_3)$, 所形成 $\mathbb{R}^5$ 的 order basis. 即若令

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 則 } Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

為 A 的 rational form.

Question 4.24. 考慮 *square matrix* A, 設 $\mu_A(x) = p_1(x)^{m_1}\cdots p_k(x)^{m_k}$, 其中 $p_i(x)$ 為相異的 *monic irreducible polynomial.* 若 $m_1 = m_2 = \cdots = m_k = 1$, 試說明 A 的 *classical form* 就是 *rational form.* 另一方面, 若 $\deg(p_1(x)) = \deg(p_2(x)) = \cdots = \deg(p_k(x)) = 1$, 試說明 A 的 *classical form* 就是 *Jordan form.*

在求得 rational form 以及 classical form 的過程中, 其實只要知道每一個 cyclic vector $\mathbf{v}_{i,j}$ 的 annihilator $p_i(x)^{m_{i,j}}$, 就可以確定其 rational form 及 classical form. 這一組 annihilators 相當的重要, 我們有以下的定義.

Definition 4.5.5. 設 $T : V \to V$ 為 F-linear operator, 且

$$V = C_{\mathbf{v}_{1,1}} \oplus \cdots C_{\mathbf{v}_{1,n_1}} \oplus \cdots \oplus C_{\mathbf{v}_{k,1}} \oplus \cdots \oplus C_{\mathbf{v}_{k,n_k}},$$

其中每一個 $\mathbf{v}_{i,j}$ 的 T-annihilator 為 $\mu_{\mathbf{v}_{i,j}}(x) = p_i(x)^{m_{i,j}}$ 滿足 $m_{i,1} \geq m_{i,2} \geq \cdots \geq m_{i,n_i}$. 我們稱

$$(p_1(x)^{m_{1,1}}, \ldots, p_1(x)^{m_{1,n_1}}, \ldots, p_k(x)^{m_{k,1}}, \ldots, p_k(x)^{m_{k,n_k}})$$

這一組 polynomials 為 T 的 *elementary divisors.*

例如在 Example 4.4.11 中 A 的 elementary divisors 就是 $(x^2+1, (x-1)^2, x-1)$. 要注意 elementary divisors 指的是所有的 $\mathbf{v}_{i,j}$ 的 T-annihilators, 所以即使有可能 $p_i(x)^{m_{i,j}} = p_i(x)^{m_{i,j'}}$, 也要將它們一一列出. 例如一個 linear operator $T : V \to V$ 的 cyclic decomposition 為 $V = C_{\mathbf{v}} \oplus C_{\mathbf{w}} \oplus C_{\mathbf{u}}$ 其中 $\mu_{\mathbf{v}}(x) = (x+1)^2, \mu_{\mathbf{w}}(x) = \mu_{\mathbf{u}}(x) = x+1$, 則 T 的 elementary divisors 為 $((x+1)^2, x+1, x+1)$.

基本上, 我們需要利用 $\ker(p_i(T)^{\circ t})$, $\forall t \in \mathbb{N}$ 來確定 T 的 elementary divisors. 不過我們可以由 $\chi_T(x)$ 和 $\mu_T(x)$ 得到 T 的 elementary divisors 的可能情況. 首先我們需要以下有關 elementary divisors 的性質.

Lemma 4.5.6. 設 $T : V \to V$ 為 *F-linear operator* 且

$$(p_1(x)^{m_{1,1}}, \ldots, p_1(x)^{m_{1,n_1}}, \ldots, p_k(x)^{m_{k,1}}, \ldots, p_k(x)^{m_{k,n_k}})$$

為 T 的 *elementary divisors,* 其中 $m_{i,1} \geq m_{i,2} \geq \cdots \geq m_{i,n_i}$, $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$. 則

$$\chi_T(x) = p_1(x)^{m_{1,1}} \cdots p_1(x)^{m_{1,n_1}} \cdots p_k(x)^{m_{k,1}} \cdots p_k(x)^{m_{k,n_k}},$$

$$\mu_T(x) = p_1(x)^{m_{1,1}} p_2(x)^{m_{2,1}} \cdots p_k(x)^{m_{k,1}}.$$

Proof. 由 elementary divisors 的定義知存在 $\mathbf{v}_{i,j} \in V$ 使得

$$V = C_{\mathbf{v}_{1,1}} \oplus \cdots C_{\mathbf{v}_{1,n_1}} \oplus \cdots \oplus C_{\mathbf{v}_{k,1}} \oplus \cdots \oplus C_{\mathbf{v}_{k,n_k}},$$

其中每一個 $\mathbf{v}_{i,j}$ 的 T-annihilator 為 $\mu_{\mathbf{v}_{i,j}}(x) = p_i(x)^{m_{i,j}}$. 由 Theorem 4.4.4, 我們有 $\chi_{T|_{C_{\mathbf{v}_{i,j}}}}(x) = \mu_{\mathbf{v}_{i,j}}(x) = p_i(x)^{m_{i,j}}$, 故由 Lemma 3.5.5 得

$$\chi_T(x) = \prod_{i,j} \chi_{T|_{C_{\mathbf{v}_{i,j}}}}(x) = \prod_{i,j} p_i(x)^{m_{i,j}}.$$

另外由 Theorem 4.4.10, 我們已知若 $\mu_T(x) = p_1(x)^{m_1} p_2(x)^{m_2} \cdots p_k(x)^{m_k}$, 則 $m_i = m_{i,1}$, $\forall i \in \{1,\ldots,k\}$. 故得證 $\mu_T(x) = p_1(x)^{m_{1,1}} p_2(x)^{m_{2,1}} \cdots p_k(x)^{m_{k,1}}$. $\square$

我們利用以下的例子說明判斷 elementary divisors 的方法.

Example 4.5.7. 設 $T:\mathbb{R}^{10}\to\mathbb{R}^{10}$ 為 $\mathbb{R}$-linear operator 且 $\chi_T(x) = (x^2+1)^3(x-1)^4$ 以及 $\mu_T(x) = (x^2+1)^2(x-1)^2$. 首先我們知道 $(x^2+1)^2$ 以及 $(x-1)^2$ 一定會出現在 T 的 elementary divisors 中. 不過 $(x^2+1)^2$ 不會出現兩次. 這是因為在 $\chi_T(x)$ 中 (x^2+1) 有三次方, 所以由 Lemma 4.5.6 知僅還有一個 x^2+1 會出現. 另一方面可能還有一個 $(x-1)^2$ 會出現在 elementary divisor 中, 要不然就是有兩個 $x-1$ 會出現. 這是因為 $\chi_T(x)$ 中 $x-1$ 有四次方. 所以 T 的 elementary divisors 會有兩種可能, 一個是 $((x^2+1)^2, x^2+1, (x-1)^2, (x-1)^2)$. 而另一個是 $((x^2+1)^2, x^2+1, (x-1)^2, x-1, x-1))$.

至於 Example 4.5.7 中 T 的 elementary divisors 到底是哪種可能, 就不能完全由 $\chi_T(x)$ 和 $\mu_T(x)$ 來決定了. 此時我們可以考慮 $\dim(\mathrm{Ker}(T-\mathrm{id}))$. 若 $\dim(\mathrm{Ker}(T-\mathrm{id})) = 2$ 表示 $\mathrm{Ker}((T-\mathrm{id})^{\circ 2})$ 可以寫成兩個 T-cyclic subspaces 的 direct sum, 在這種情形我們有 $((x^2+1)^2, x^2+1, (x-1)^2, (x-1)^2)$ 為 T 的 elementary divisors. 而若 $\dim(\mathrm{Ker}(T-\mathrm{id})) = 3$ 表示 $\mathrm{Ker}((T-\mathrm{id})^{\circ 2})$ 可以寫成三個 T-cyclic subspaces 的 direct sum, 在這種情形我們有 $((x^2+1)^2, x^2+1, (x-1)^2, x-1, x-1)$ 為 T 的 elementary divisors. 至於一般的情形, 我們就必須探討每一個 $\mathrm{Ker}(p_i^l(T))$ 的維度. 首先我們有以下的性質.

Lemma 4.5.8. 設 $T:V\to V$ 為 *F-linear operator* 且 $f(x)\in F[x]$ 與 $\mu_T(x)$ 互質. 則 $\mathrm{Ker}(f(T)) = \{\mathbf{O}\}$.

Proof. 由於 $f(x)$ 與 $\mu_T(x)$ 互質, 知存在 $g(x), h(x) \in F[x]$ 使得 $g(x)f(x)+h(x)\mu_T(x) = 1$. 現若 $\mathbf{w}\in\mathrm{Ker}(f(T))$, 由 $\mu_T(T)(\mathbf{v}) = f(T)(\mathbf{v}) = \mathbf{O}$, 得 $\mathbf{v} = g(T)(f(T)(\mathbf{v})) + h(T)(\mu_T(T(\mathbf{v}))) = \mathbf{O}$. $\square$

當 $T:V\to V$ 為 linear operator 且 $V = W_1\oplus\cdots W_k$, 其中 W_i 為 T-invariant subspace, 則

$$\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Ker}(T|_{W_1})\oplus\cdots\oplus\mathrm{Ker}(T|_{W_k}). \tag{4.8}$$

這是因為若 $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1+\cdots+\mathbf{w}_k \in \mathrm{Ker}(T)$, 其中 $\mathbf{w}_i \in W_i$, 則 $\mathbf{O}_V = T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{w}_1)+\cdots+T(\mathbf{w}_k)$. 由於 $T(\mathbf{w}_i)\in W_i$ 且 $V = W_1\oplus\cdots\oplus W_k$ 為 inner direct sum, 由 Proposition 3.4.6 (2) 知 $T(\mathbf{w}_1) = \cdots = T(\mathbf{w}_k) = \mathbf{O}_V$. 也就是說 $\mathbf{w}_i \in \mathrm{Ker}(T)\cap W_i = \mathrm{Ker}(T|_{W_i})$, $\forall i = 1,\ldots,k$. 特別的, 若 $f(x)\in F[x]$, 則由於 W_i 亦皆為 $f(T)$-invariant, 故由式子 (4.8) 得

$$\mathrm{Ker}(f(T)) = \mathrm{Ker}(f(T)|_{W_1})\oplus\cdots\oplus\mathrm{Ker}(f(T)|_{W_k}). \tag{4.9}$$

現考慮 $T:V\to V$ 的 primary decomposition $V = W_1\oplus\cdots\oplus W_k$, 其中 $W_i = \mathrm{Ker}(p_i(T)^{\circ m_i})$ 且 $p_1(x),\ldots,p_k(x)$ 為相異的 monic irreducible polynomials. 對於 $i,j\in\{1,\ldots,k\}$, 由於當 $i\neq j$ 時, $\mu_{T|_{W_j}}(x) = p_j^{m_j}(x)$ 與 $p_i^l(x)$ 互質, 故此時 Lemma 4.5.8 告訴我們 $\mathrm{Ker}(p_i^l(T)|_{W_j}) = \mathrm{Ker}(p_i^l(T|_{W_j})) = \{\mathbf{O}\}$. 再由式子 (4.8) 得

$$\mathrm{Ker}(p_i^l(T)) = \mathrm{Ker}(p_i^l(T)|_{W_1})\oplus\cdots\oplus\mathrm{Ker}(p_i^l(T)|_{W_k}) = \mathrm{Ker}(p_i^l(T)|_{W_i}).$$

也就是說在求 $\mathrm{Ker}(p_i^l(T))$ 就等同於求 $\mathrm{Ker}(p_i^l(T)|_{W_i})$, 因此不失一般性我們僅要考慮 $T:V\to V$, 其中 $\mu_T(x)=p(x)^m$ 這樣的情況.

現考慮 $T:V\to V$, 其中 $\mu_T(x)=p(x)^m$. Cyclic Decomposition Theorem 告訴我們 $V=C_{\mathbf{v}_1}\oplus\cdots\oplus C_{\mathbf{v}_k}$, 其中對於 $i=1,\ldots,k$, $\mu_{\mathbf{v}_i}(x)=p(x)^{m_i}$ 且 $m=m_1\geq m_2\geq\cdots\geq k\geq 1$ (亦即 $(p(x)^{m_1},\ldots,p(x)^{m_k})$ 為 T 的 elementary divisors). 如何利用 $\mathrm{Ker}(p^l(T))$ 來判斷 T 的 elementary divisors 呢? 我們有以下的性質.

Lemma 4.5.9. 設 $T:V\to V$ 為 *F-linear operator*, $\mathbf{v}\in V$ 其 *T-annihilator* 為 $p(x)^m$, 其中 $p(x)\in F[x]$ 為 *monic irreducible* 且 $\deg(p(x))=d$. 則

$$\dim(\mathrm{Ker}(p^l(T)|_{C_\mathbf{v}}))=\begin{cases} ld, & \text{if } 1\leq l\leq m-1;\\ md, & \text{if } l\geq m.\end{cases}$$

Proof. 對於 $0\leq i\leq m-1$, $0\leq j\leq d-1$, 令 $\mathbf{v}_{id+j+1}=p^i(T)(T^{\circ j}(\mathbf{v}))$. 由 Lemma 4.5.1, 我們知 $\beta=\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_{md}\}$ 為 $C_\mathbf{v}$ 的一組 basis. 即若 $\mathbf{w}\in C_\mathbf{v}$, 則存在 $c_1,\ldots,c_{md}\in F$ 使得 $\mathbf{w}=\sum_{k=1}^{md}c_k\mathbf{v}_k$. 因對於 $r\geq m$, $p^r(T)(\mathbf{v})=\mathbf{O}$ 故當 $1\leq l\leq m-1$ 時

$$p^l(T)(\mathbf{w})=\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{d-1}c_{id+j+1}p^{l+i}(T)(T^{\circ j}(\mathbf{v}))=\sum_{i=0}^{m-l-1}\sum_{j=0}^{d-1}c_{id+j+1}p^{l+i}(T)(T^{\circ j}(\mathbf{v})).$$

因此若 $\mathbf{w}\in\mathrm{Ker}(p^l(T)|_{C_\mathbf{v}})=\mathrm{Ker}(p^l(T))\cap C_\mathbf{v}$, 則由 β 為 linearly independent 知 $c_1=c_2=\cdots=c_{(m-l)d}=0$. 得 $\mathbf{w}\in\mathrm{Span}(\{\mathbf{v}_{(m-l)d+1},\ldots,\mathbf{v}_{md}\})$. 很容易看出 $\mathrm{Span}(\{\mathbf{v}_{(m-l)d+1},\ldots,\mathbf{v}_{md}\})\subseteq\mathrm{Ker}(p^l(T))\cap C_\mathbf{v}$, 故得證 $\dim(\mathrm{Ker}(p^l(T)|_{C_\mathbf{v}}))=md-(m-l)d=ld$.

當 $l\geq m$ 時, 因 $p^l(T)(\mathbf{w})=\mathbf{O}_V$, for all $\mathbf{w}\in C_\mathbf{v}$, 得 $\mathrm{Ker}(p^l(T)|_{C_\mathbf{v}})=C_\mathbf{v}$. 故

$$\dim(\mathrm{Ker}(p^l(T)|_{C_\mathbf{v}}))=\dim(C_\mathbf{v})=md.$$

□

我們沿用剛才的符號, 利用 Lemma 4.5.9 我們有 $\dim(\mathrm{Ker}(p(T)|_{C_{\mathbf{v}_i}}))=\deg(p(x))$, 再利用式子 (4.9) 得

$$\dim(\mathrm{Ker}(p(T)))=\sum_{i=1}^{k}\dim(\mathrm{Ker}(p(T)|_{C_{\mathbf{v}_i}}))=k\deg(p(x)).$$

換言之, $\dim(\mathrm{Ker}(p(T)))/\deg(p(x))$ 告訴我們 V 可以寫成多少個 T-cyclic subgroup 的 direct sum. 同理若 $m_i\geq 2$, 則 $\dim(\mathrm{Ker}(p^2(T)|_{C_{\mathbf{v}_i}}))=2\deg(p(x))$. 而若 $m_i<2$, 則 $\dim(\mathrm{Ker}(p^2(T)|_{C_{\mathbf{v}_i}}))=\deg(p(x))$. 因此

$$\dim(\mathrm{Ker}(p^2(T)))=\sum_{i=1}^{k}\dim(\mathrm{Ker}(p^2(T)|_{C_{\mathbf{v}_i}}))=2(k-s_1)\deg(p(x))+s_1\deg(p(x)),$$

其中 $s_1=\#\{1\leq i\leq k\mid m_i=1\}$. 也就是說我們可由

$$\dim(\mathrm{Ker}(p^2(T)))-\dim(\mathrm{Ker}(p(T)))=(k-s_1)\deg(p(x))$$

得知 T 的 elementary divisors 中有多少個為 $p(x)^t$ 其中 $t>1$ 這種形式. 而且我們知 T 的 elementary divisors 中有

$$s_1=(2\dim(\mathrm{Ker}(p(T)))-\dim(\mathrm{Ker}(p^2(T))))/\deg(p_i(x))$$

個為 $p(x)$. 依此類推, 若令 $s_t=\#\{1\leq j\leq k \mid m_i=t\}$, 則當 $1\leq l\leq k$ 時,

$$\dim(\mathrm{Ker}(p^l(T)))=(l(k-(s_1+s_2+\cdots+s_{l-1}))+s_1+2s_2+\cdots+(l-1)s_{l-1})\deg(p(x)).$$

故由

$$\dim(\mathrm{Ker}(p^l(T))-\dim(\mathrm{Ker}(p^{l-1}(T))))=(k-(s_1+s_2+\cdots+s_{l-1}))\deg(p(x)) \tag{4.10}$$

我們可以將 $s_1,s_2,\ldots,s_k$ 一一求出.

Proposition 4.5.10. 設 $T:V\to V$ 為 *F-linear operator* 且 $\mu_T(x)=p(x)^m$, 其中 $p(x)\in F[x]$ 為 *monic irreducible polynomial.* 當 $1\leq l\leq m$ 時, T 的 *elementary divisors* 中 $p(x)^l$ 出現的次數為

$$\frac{1}{\deg(p(x))}\Big(2\dim(\mathrm{Ker}(p^l(T)))-\dim(\mathrm{Ker}(p^{l-1}(T)))-\dim(\mathrm{Ker}(p^{l+1}(T)))\Big).$$

Proof. 利用前面的符號, T 的 elementary divisors 中 $p(x)^l$ 出現的次數為 s_l. 由式子 (4.10) 我們知當 $1\leq l\leq m-1$ 時

$$\begin{aligned}&\dim(\mathrm{Ker}(p^l(T)))-\dim(\mathrm{Ker}(p^{l-1}(T)))-\Big(\dim(\mathrm{Ker}(p^{l+1}(T)))-\dim(\mathrm{Ker}(p^l(T)))\Big)\\ &=(k-(s_1+s_2+\cdots+s_{l-1})-(k-(s_1+s_2+\cdots+s_l)))\deg(p(x))=s_l\deg(p(x)).\end{aligned}$$

另外當 $l=m$ 時 $\mathrm{Ker}(p^m(T))=\mathrm{Ker}(p^{m+1}(T))$ 所以由式子 (4.10) 知

$$\begin{aligned}&\quad 2\dim(\mathrm{Ker}(p^m(T)))-\dim(\mathrm{Ker}(p^{m-1}(T)))-\dim(\mathrm{Ker}(p^{m+1}(T)))\\ &=\dim(\mathrm{Ker}(p^m(T))-\dim(\mathrm{Ker}(p^{m-1}(T))))\\ &=(k-(s_1+s_2+\cdots+s_{m-1}))\deg(p(x))=s_m\deg(p(x)),\end{aligned}$$

得證本定理. □

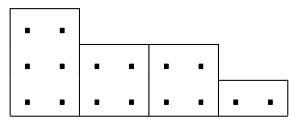
Proposition 4.5.10 看起來有點複雜, 其實它只是 Jordan form 的推廣. 在處理 Jordan form 時, 由於前提是 minimal polynomial 可以完全分解, 所以 $p(x)$ 的次數為 1. 我們也可以利用像 Jordan form 的點圖, 來說明 $\mathrm{Ker}(p^l(T))$ 和 elementary divisor 的關係. 首先考慮 $C_{\mathbf{v}}$ 的情形, 假設 $\mu_{\mathbf{v}}(x)=p^m(x)$ 其中 $p(x)$ 為 irreducible 且 $\deg(p(x))=d$. 我們知道 $\mathbf{v},T(\mathbf{v}),\ldots,T^{d-1}(\mathbf{v})\in\mathrm{Ker}(p^m(T))\setminus\mathrm{Ker}(p^{m-1}(T))$ 為 linearly independent 而 $p(T)(\mathbf{v}),p(T)(T(\mathbf{v})),\ldots,p(T)(T^{d-1}(\mathbf{v}))\in\mathrm{Ker}(p^{m-1}(T))\setminus\mathrm{Ker}(P^{m-1}(T))$. 這樣一直下去直到得到 classical form 中 $C_{\mathbf{v}}$ 的 basis. 我們大致上有以下的圖形:

$$\begin{array}{ccccc}\mathrm{Ker}(p^m(T)) & \blacksquare & \blacksquare & \cdots & \blacksquare\\ \mathrm{Ker}(p^{m-1}(T)) & \blacksquare & \blacksquare & \cdots & \blacksquare\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \mathrm{Ker}(p(T)) & \blacksquare & \blacksquare & \cdots & \blacksquare\end{array}$$

這樣的點圖代表的就是 $C_{\mathbf{v}}$ 所形成的“一棟樓”. 和 Jordan form 的情形不同的是 Jordan form 的每棟樓的每一層樓僅有一個點 (因為 $\deg(p(x))=1$), 而這裡每一層會有 $d=\deg(p(x))$ 個點. 而樓層的高度 m 代表的就是 $\mu_{\mathbf{v}}(x)=p^m(x)$ 中 $p(x)$ 的次方.

回到 $V=C_{\mathbf{v}_1}\oplus\cdots\oplus C_{\mathbf{v}_k}$, 其中對於 $i=1,\ldots,k$, $\mu_{\mathbf{v}_i}(x)=p(x)^{m_i}$ 的情形. 我們便會有 k 棟樓, 由於每棟樓的每一層都有 $d=\deg(p(x))$ 個點, 所以最底下的一層, 即代表 $\mathrm{Ker}(p(T))$ 這一層共有 kd 個點, 亦即 $\dim(\mathrm{Ker}(p(T))=kd$. 因此只要我們先求出 $n_1=\dim(\mathrm{Ker}(p(T))$, 便知

V 可寫成 n_1/d 個 cyclic subspace 的 direct sum. 接著再令 $n_1+d_2=n_2=\dim(\ker(p^2(T)))$. 由於上一層的點代入 $p(T)$ 會得到下一層的點, 由 Lemma 4.3.2 知 $d_2 \le n_1$. 接著令 $n_2+d_3=n_3=\dim(\ker(p^3(T)))$. 同理有 $d_3 \le d_2$. 這樣一直下去, 令 $n_l=\dim(\ker(p^l(T)))$ 且 $d_l=n_l-n_{l-1}=\dim(\ker(p^l(T)))-\dim(\ker(p^{l-1}(T)))$. 注意這裡 d_l 表示的就是第 l 層共有 d_l 個點, 也因此 d_l 會被 $d=\deg(p(x)$ 所整除且我們有 $n_1 \ge d_2 \ge \cdots \ge d_m$. 接下來我們可以畫一個有 m 層的點所成的的圖. 最底下一層有 n_1 個點, 再上一層靠左對齊有 d_2 個點, 這樣依序往上靠左對齊在第 l 層畫上 d_l 個點. 最後所得的圖形就像有好幾棟樓房, 如下圖就是 $m=3$, $\deg(p(x))=2$, $n_1=8, d_2=6, d_3=2$ 的圖形



這裡共有 4 棟樓, 第一棟樓有 3 層. 第二, 三棟樓有 2 層, 最後一棟有 1 層. 每一棟樓的每一層有兩個點, 這些點就表示一個 basis 中的向量, 其下面的點表示為該向量代入 $p(T)$ 所得的向量. 因此每一棟樓代表一個 classical matrix. 且其上的點代表的就是它們所形成的 T-cyclic subspace 的 basis, 因此該棟樓的層數就是其所對應 $p(x)$ 的次方. 因為共有 n_1/d 棟, 所以共可寫成的 T-cyclic subspace 的個數就是 $\dim(\mathrm{Ker}(T))/\deg(p(x))$. 而 l 層樓的個數共有 $(d_l-d_{l+1})/d$ 所以 T 的 elementary divisor 中 $p^l(x)$ 的個數為

$$\frac{1}{\deg(p(x))}\big(\dim(\mathrm{Ker}(p^l(T)))-\dim(\mathrm{Ker}(p^{l-1}(T)))-(\dim(\mathrm{Ker}(p^{l+1}(T)))-\dim(\mathrm{Ker}(p^l(T))))\big).$$

由 Proposition 4.5.10, 我們得知 T 的 elementary divisors 完全由 $\mathrm{Ker}(p_i^l(T))$ 來決定, 這和 V 的 basis 選取無關. 也就是說不管選取怎樣的 cyclic basis, 我們都會得到相同的 elementary divisors. 所以都可以化成相同的 rational form 和 classical form. 也就是說 rational form 和 classical form 都是 canonical form. 我們有以下之結論.

Theorem 4.5.11. 設 A,B 為 $n\times n$ *matrices.* 則 A 和 B 為 *similar* 若且唯若 A 和 B 可以化成相同的 *rational form* 也若且唯若 A 和 B 可以化成相同的 *classical form.*

在 Theorem 4.3.9 我們知道當 $A\in M_n(F)$ 且 $\chi_A(x)$ 可以在 $F[x]$ 中完全分解成一次的 monic polynomials 的乘積, 則 A 的 transpose A^{t} 和 A 為 similar. 當時我們也提到這個定理在一般的狀況也是對的, 現在我們可以證明這個更一般的結果.

Theorem 4.5.12. 設 A 為 $n\times n$ *matrix,* 則 A 的 *transpose* A^{t} 和 A 為 *similar.*

Proof. 因 $\mu_A(x)=\mu_{A^{\mathrm{t}}}(x)$. 若 $\mu_A(x)=p_1(x)^{m_1}\cdots p_k(x)^{m_k}$, 我們僅要討論 $\forall i\in\{1,\dots,k\}$ 對於 $1\le l\le m_i$, $p_i(x)^l$ 出現在 A 的 elementary divisors 的次數等於出現在 A^{t} 的 elementary divisors 的次數. 這表示 A 和 A^{t} 有相同的 elementary divisors, 所以他們為 similar. 然而 $p_i(x)^l$ 出現在 A 的 elementary divisors 的次數依 Proposition 4.5.10 知由 $\dim(\mathrm{Ker}(p_i^{l-1}(A))), \dim(\mathrm{Ker}(p_i^l(A)))$ 以及 $\dim(\mathrm{Ker}(p_i^{l+1}(A)))$ 所決定. 而對於任意 $j\in\mathbb{N}$, 我們有

$$\dim(\mathrm{Ker}(p_i^j(A)))=\dim(\mathrm{Ker}((p_i^j(A))^{\mathrm{t}}))=\dim(\mathrm{Ker}(p_i^j(A^{\mathrm{t}}))).$$

故得證本定理. □

以前我們曾提到若 $A,B \in M_n(F)$ 且存在一個比 F 大的 field $\tilde{F}$ 使得在 $M_n(\tilde{F})$ 中 $A \sim B$ (即存在 $\tilde{P} \in M_n(\tilde{F})$ invertible 使得 $B = \tilde{P}^{-1} \cdot A \cdot \tilde{P}$), 則在 $M_n(F)$ 中 $A \sim B$ (即存在 $P \in M_n(F)$ invertible 使得 $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$). 這個事實是因為由 A,B 看成 $M_n(\tilde{F})$ 的 matrices 時它們的 elementary divisors 相同可以推得 A,B 看成 $M_n(F)$ 的 matrices 時它們的 elementary divisors 也相同. 證明的細節, 就留給大家當成習題了.