當 W 是 V 的 subspace 時, 我們知道可以找到 W' 為 V 的 subspace 使得 $V = W \oplus W'$, 不過符合這個條件的 W' 並不唯一. 在 inner product space 中, 我們可以加上條件使得 W' 為唯一. 我們需要以下的定義.

Definition 5.1.10. 假設 V 為 inner product space, S 為 V 的一個 nonempty subset. 令

$$S^{\perp} = \{\mathbf{v} \in V \mid \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0, \forall \mathbf{w} \in S\}.$$

我們稱 $S^{\perp}$ 為 the *orthogonal complement* of S in V.

Question 5.4. 什麼是 $\{\mathbf{O}_V\}^{\perp}$? 什麼是 $V^{\perp}$?

關於 $S^{\perp}$ 我們有以下幾個簡單的性質.

Lemma 5.1.11. 假設 V 為 *inner product space.*

(1) 若 S 為 V 的 *nonempty subset,* 則 $S^{\perp}$ 為 V 的 *subspace.*

(2) 若 S_1, S_2 為 V 的 *nonempty subsets* 滿足 $S_1 \subseteq S_2$, 則 $S_2^{\perp} \subseteq S_1^{\perp}$.

(3) 若 S 為 V 的 *nonempty subset,* 則 $S^{\perp} = \mathrm{Span}(S)^{\perp}$.

(4) 若 W 為 V 的 *subspace,* 則 $W \cap W^{\perp} = \{\mathbf{O}_V\}$.

Proof. 令 V 為 inner product space over F (即 $F = \mathbb{C}$ 或 $F = \mathbb{R}$).

(1) 首先依定義 $\mathbf{O}_V \in S^{\perp}$. 又若 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in S^{\perp}$, 則對於任意 $r, s \in F$ 皆有 $\langle r\mathbf{v}_1 + s\mathbf{v}_2, \mathbf{w} \rangle = r\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{w} \rangle + s\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w} \rangle = 0, \forall \mathbf{w} \in S$. 亦即 $r\mathbf{v}_1 + s\mathbf{v}_2 \in S^{\perp}$. 得證 $S^{\perp}$ 為 V 的 subspace.

(2) 若 $\mathbf{v} \in S_2^{\perp}$, 表示對任意 $\mathbf{w} \in S_2$ 皆有 $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$. 故對任意 $\mathbf{w} \in S_1$ 因 $S_1 \subseteq S_2$, 知 $\mathbf{w} \in S_2$, 得證 $\mathbf{v} \in S_1^{\perp}$, 即 $S_2^{\perp} \subseteq S_1^{\perp}$.

(3) 因 $S \subseteq \mathrm{Span}(S)$, 故由 (2) 知 $\mathrm{Span}(S)^{\perp} \subseteq S^{\perp}$. 另一方面, 若 $\mathbf{v} \in S^{\perp}$, 則對任意 $\mathbf{w} \in \mathrm{Span}(S)$, 因存在 $c_1, \ldots, c_n \in F$ 以及 $\mathbf{w}_1 \ldots, \mathbf{w}_n \in S$ 使得 $\mathbf{w} = c_1\mathbf{w}_1 + \cdots + c_n\mathbf{w}_n$, 我們有 $\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = c_1\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{v} \rangle + \cdots + c_n\langle \mathbf{w}_n, \mathbf{v} \rangle = 0$. 亦即 $\mathbf{v} \in \mathrm{Span}(S)^{\perp}$, 得證 $S^{\perp} \subseteq \mathrm{Span}(S)^{\perp}$, 故 $S^{\perp} = \mathrm{Span}(S)^{\perp}$.

(4) 若 $\mathbf{v} \in W \cap W^{\perp}$, 表示 $\mathbf{v} \perp \mathbf{v}$, 即 $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$. 故由 inner product 的性質知 $\mathbf{v} = \mathbf{O}_V$.

□

Question 5.5. 在 *Lemma 5.1.11 (1)* 中 S 不需假設為 V 的 *subspace,* $S^{\perp}$ 仍為 V 的 *subspace.* 為何在 *(4)* 中需假設 W 為 V 的 *subspace?*

Question 5.6. 試證明若 W_1, W_2 為 V 的 *subspaces,* 則 $(W_1 + W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp}$.

當 W 是 V 的 subspace 我們可以利用 Gram-Schmidt process 找到 W 的一組 orthogonal basis $S = \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k\}$. 此時對任意 $\mathbf{v} \in V$ 若令

$$\tilde{\mathbf{v}} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle}\mathbf{w}_1 + \cdots + \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_k \rangle}{\langle \mathbf{w}_k, \mathbf{w}_k \rangle}\mathbf{w}_k,$$

我們有 $\tilde{\mathbf{v}} \in W$ 而且對任意 $\mathbf{w}_i$ 皆有 $\langle \mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}, \mathbf{w}_i \rangle = 0$. 因此由 Lemma 5.1.11 (3) 我們得 $\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}} \in S^{\perp} = \mathrm{Span}(S)^{\perp} = W^{\perp}$. 因此我們有以下的性質.

Proposition 5.1.12. 假設 V 為 *inner product space* 且 W 為 V 的 *finite dimensional subspace.* 對任意 $\mathbf{v}\in V$, 存在 $\tilde{\mathbf{v}}\in W$ 滿足以下性質.

(1) $\mathbf{v}-\tilde{\mathbf{v}}\in W^{\perp}$

(2) 對於任意 $\mathbf{w}\in W\setminus\{\tilde{\mathbf{v}}\}$, 皆有 $\|\mathbf{v}-\tilde{\mathbf{v}}\|<\|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|$.

(3) $\|\tilde{\mathbf{v}}\|\leq\|\mathbf{v}\|$.

Proof. 選定 W 的一組 orthogonal basis $S=\{\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_k\}$, 對任意 $\mathbf{v}\in V$, 利用前面所述我們有 $\mathbf{v}-\tilde{\mathbf{v}}\in W^{\perp}$. 得證 (1).

現任取 $\mathbf{w}\in W$, 由 $\tilde{\mathbf{v}}-\mathbf{w}\in W$, 我們有

$$\langle\mathbf{v}-\mathbf{w},\mathbf{v}-\mathbf{w}\rangle=\langle\mathbf{v}-\tilde{\mathbf{v}}+\tilde{\mathbf{v}}-\mathbf{w},\mathbf{v}-\tilde{\mathbf{v}}+\tilde{\mathbf{v}}-\mathbf{w}\rangle=\langle\mathbf{v}-\tilde{\mathbf{v}},\mathbf{v}-\tilde{\mathbf{v}}\rangle+\langle\tilde{\mathbf{v}}-\mathbf{w},\tilde{\mathbf{v}}-\mathbf{w}\rangle.$$

故得 $\|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|\geq\|\mathbf{v}-\tilde{\mathbf{v}}\|$ 且等號成立若且唯若 $\langle\tilde{\mathbf{v}}-\mathbf{w},\tilde{\mathbf{v}}-\mathbf{w}\rangle=0$, 即 $\mathbf{w}=\tilde{\mathbf{v}}$. 得證 (2).

最後因 $\mathbf{v}-\tilde{\mathbf{v}}\in W^{\perp}$ 且 $\tilde{\mathbf{v}}\in W$, 得

$$\langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle=\langle\mathbf{v}-\tilde{\mathbf{v}}+\tilde{\mathbf{v}},\mathbf{v}-\tilde{\mathbf{v}}+\tilde{\mathbf{v}}\rangle=\langle\mathbf{v}-\tilde{\mathbf{v}},\mathbf{v}-\tilde{\mathbf{v}}\rangle+\langle\tilde{\mathbf{v}},\tilde{\mathbf{v}}\rangle.$$

故知 $\|\tilde{\mathbf{v}}\|\leq\|\mathbf{v}\|$. 得證 (3). □

由 Proposition 5.1.12 (2) 我們知 $\tilde{\mathbf{v}}$ 是 W 中距離 $\mathbf{v}$ 最近的, 所以 $\tilde{\mathbf{v}}$ 是唯一的, 即不會因 W 的 orthogonal basis 的選取不同而有所不同. 我們通常用 $\mathrm{proj}_W(\mathbf{v})$ 來表示 $\tilde{\mathbf{v}}$ 且稱之為 the *projection* of $\mathbf{v}$ on W. 另外我們要強調即使 V 不是 finite dimensional, 只要 W 是 V 的 finite dimensional subspace, Proposition 5.1.12 仍然成立. 不過若 W 不是 finite dimensional, 則 Proposition 5.1.12 就不一定成立了.

Question 5.7. 試證明 *Proposition 5.1.12* 中 $\|\tilde{\mathbf{v}}\|=\|\mathbf{v}\|$ 的充要條件為 $\mathbf{v}\in W$.

現對於任意 $\mathbf{v}\in V$, 我們可寫成 $\mathbf{v}=\mathbf{v}-\mathrm{proj}_W(\mathbf{v})+\mathrm{proj}_W(\mathbf{v})$. 由於 $\mathbf{v}-\mathrm{proj}_W(\mathbf{v})\in W^{\perp}$ 且 $\mathrm{proj}_W(\mathbf{v})\in W$, 我們得 $V=W+W^{\perp}$. 又由 Lemma 5.1.11 (4), $W\cap W^{\perp}=\{\mathbf{O}_V\}$, 我們得證以下定理.

Theorem 5.1.13. 令 V 為 *inner product space* 且 W 為 V 的 *finite dimensional subspace.* 則

$$V=W\oplus W^{\perp}.$$

特別的當 V 本身是 finite dimensional, 任何的 subspace 也是 finite dimensional, 所以 Theorem 5.1.13 對於 V 的任意的 subspace 皆成立. 現若考慮 $W^{\perp}$ 這個 subspace, 我們有 $V=W^{\perp}\oplus(W^{\perp})^{\perp}$. 我們自然會問是否 $W=(W^{\perp})^{\perp}$?

Corollary 5.1.14. 令 V 為 *inner product space* 且 W 為 V 的 *finite dimensional subspace.* 則

$$(W^{\perp})^{\perp}=W.$$

Proof. 若 $\mathbf{w} \in W$, 則對任意 $\mathbf{v} \in W^{\perp}$, 因 $\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = 0$, 得 $\mathbf{w} \in (W^{\perp})^{\perp}$. 得證 $W \subseteq (W^{\perp})^{\perp}$. 另一方面若 $\mathbf{v} \in (W^{\perp})^{\perp}$, 首先利用 Theorem 5.1.13, 我們可將 $\mathbf{v}$ 寫成 $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{w}'$, 其中 $\mathbf{w} \in W$ 且 $\mathbf{w}' \in W^{\perp}$. 由於 $\mathbf{v} \in (W^{\perp})^{\perp}$, 我們有 $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}' \rangle = 0$, 故得

$$0 = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}' \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{w}' \rangle + \langle \mathbf{w}', \mathbf{w}' \rangle = \langle \mathbf{w}', \mathbf{w}' \rangle.$$

此即表示 $\mathbf{w}' = \mathbf{O}_V$, 故知 $\mathbf{v} = \mathbf{w} \in W$, 即證得 $(W^{\perp})^{\perp} \subseteq W$. □

Question 5.8. 試證明對於一般 *inner product space* 的 *subspace* W *(*不需假設 *finite dimensional)* 皆有 $W^{\perp} = \left((W^{\perp})^{\perp}\right)^{\perp}$.

Question 5.9. 設 V 為 *finite dimensional inner product space,* S 為 V 的 *subset.* 試問 $(S^{\perp})^{\perp}$ 會是甚麼? 又若 W_1, W_2 為 V 的 *subspace,* 試證 $(W_1 \cap W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} + W_2^{\perp}$

對於 V 的兩個 subsets S, S', 若對於任意 $\mathbf{v} \in S, \mathbf{v}' \in S'$ 皆有 $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}' \rangle = 0$, 則用 $S \perp S'$ 來表示. 特別的, 若 W, W' 為 V 的 subspaces 且 $W \perp W'$, 則 $W' \subseteq W^{\perp}$, 故利用 Lemma 5.1.11 可得 $W \cap W' = \{\mathbf{O}_V\}$. 現若 $W_1, \ldots, W_k$ 為 V 的 subspaces 滿足 $V = W_1 + \cdots + W_k$, 且對於任意 $i \neq j$, 皆有 $W_i \perp W_j$, 則 V 為 $W_1, \ldots, W_k$ 的 direct sum. 我們特別稱此為 V 的一種 *orthogonal direct sum* 且將這種 direct sum 用

$$V = W_1 \boxplus \cdots \boxplus W_k$$

來表示. 例如當 W 為 V 的 finite dimensional subspace, Theorem 5.1.13 告訴我們

$$V = W \boxplus W^{\perp}.$$

5.2. Dual Spaces

Dual space 的概念和 inner product space 的概念有許多相關性, 而且有許多 inner product space 的性質用 dual space 來描述較為清楚. 所以在這一節中我們特別介紹 dual space.

Definition 5.2.1. 假設 V 是一個 vector space over F, 若 $f : V \to F$ 為一個 F-linear transformation, 則稱 f 為一個 *linear functional* on V. 所有的 linear functional on V 形成一個 vector space over F, 我們稱之為 V 的 *dual space*, 用 V^* 來表示.

Question 5.10. 考慮 $n \times n$ 矩陣的 *determinant* 函數 $\det : M_n(F) \to F$ 以及 *trace* 函數 $\mathrm{tr} : M_n(F) \to F$. 哪一個是 *linear functional on* $M_n(F)$*?*

回顧一下給定 V 的一組 basis, $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ 任意選取 $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n \in W$, 我們可找到唯一的 linear transformation $T : V \to W$ 滿足 $T(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$, $\forall i = 1, \ldots, n$. 現對於任意 $i = 1, \ldots, n$ 我們考慮 $\mathbf{v}_i^* : V \to F$ 為唯一的 linear function on V, 滿足

$$\mathbf{v}_i^*(\mathbf{v}_j) = \begin{cases} 1, & \text{if } j = i; \\ 0, & \text{if } j \neq i. \end{cases}$$

我們有以下性質.

Theorem 5.2.2. 假設 $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ 為 V 的一組 *basis,* 則 $\{\mathbf{v}_1^*,\ldots,\mathbf{v}_n^*\}$ 為 V^* 的一組 *basis.* 特別的, 我們有 $\dim(V)=\dim(V^*)$.

Proof. 首先證明 $\mathrm{Span}(\{\mathbf{v}_1^*,\ldots,\mathbf{v}_n^*\})=V^*$. 也就是說對於任意 $f\in V^*$, 皆存在 $c_1,\ldots,c_n\in F$ 滿足 $f=c_1\mathbf{v}_1^*+\cdots+c_n\mathbf{v}_n^*$. 由前述 linear transformation 可以由 basis 所唯一確定的性質, 我們僅要找到 $c_1,\ldots,c_n\in F$ 使得 f 和 $c_1\mathbf{v}_1^*+\cdots+c_n\mathbf{v}_n^*$ 在每一個 $\mathbf{v}_i$ 的取值皆相同. 然而對每個 $\mathbf{v}_i$, 我們有

$$(c_1\mathbf{v}_1^*+\cdots+c_n\mathbf{v}_n^*)(\mathbf{v}_i)=c_1\mathbf{v}_1^*(\mathbf{v}_i)+\cdots+c_n\mathbf{v}_n^*(\mathbf{v}_i)=c_i\mathbf{v}_i^*(\mathbf{v}_i)=c_i. \tag{5.3}$$

所以若令 $c_i=f(\mathbf{v}_i)$, 便可得 $f=c_1\mathbf{v}_1^*+\cdots+c_n\mathbf{v}_n^*$.

接著證明 $\{\mathbf{v}_1^*,\ldots,\mathbf{v}_n^*\}$ 為 linearly independent. 假設 $c_1\mathbf{v}_1^*+\cdots+c_n\mathbf{v}_n^*=\mathbf{O}$ 為 zero mapping. 亦即對任意 $\mathbf{v}_i$, 皆有 $(c_1\mathbf{v}_1^*+\cdots+c_n\mathbf{v}_n^*)(\mathbf{v}_i)=0$, 故由式子 (5.3) 得知 $c_i=0$, $\forall i=1,\ldots,n$. □

給定 V 的一組 basis $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\}$, 我們稱 $\{\mathbf{v}_1^*,\ldots,\mathbf{v}_n^*\}$ 為對應 $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ 的 *dual basis.*

Question 5.11. 假設 $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ 為 V 的一組 *basis,* 對於 $\mathbf{v}\in V$, $\mathbf{v}_i^*(\mathbf{v})$ 為何?

既然 V^* 亦為 F-space, 我們自然會問 V^* 的 dual space 為何? 即 $(V^*)^*$ (稱為 V 的 *double dual space*). 依定義 $(V^*)^*$ 中的元素為 linear functional on V^*. 也就是說若 $\sigma\in(V^*)^*$, 則 $\sigma:V^*\to F$ 為一個 linear transformation 將任意的 $f\in V^*$ 送到一個 F 值. 特別的, 若 $\mathbf{v}\in V$, 我們可以考慮 $\hat{\mathbf{v}}:V^*\to F$ 其定義為對任意 $f\in V^*$, $\hat{\mathbf{v}}(f)=f(\mathbf{v})$. 要說明 $\hat{\mathbf{v}}\in(V^*)^*$, 我們必須說明 $\hat{\mathbf{v}}$ 為 linear functional, 即對於任意 $f,g\in V^*$ 以及 $r,s\in F$, 我們有

$$\hat{\mathbf{v}}(rf+sg)=(rf+sg)(\mathbf{v})=rf(\mathbf{v})+sg(\mathbf{v})=r\hat{\mathbf{v}}(f)+s\hat{\mathbf{v}}(g).$$

Theorem 5.2.2 告訴我們當 V 是 finite dimensional 時, $\dim(V)=\dim(V^*)$, 所以亦得 $\dim(V^*)=\dim((V^*)^*)$. 也就是說 $\dim(V)=\dim((V^*)^*)$. 當然此時 V 和 $(V^*)^*$ 為 isomorphic, 事實上我們可以利用 $\hat{\mathbf{v}}$ 建構出 V 和 $(V^*)^*$ 間的一個重要 isomorphism, 我們稱為 V 和 $(V^*)^*$ 的 *canonical map*

Proposition 5.2.3. 考慮 $\tau:V\to(V^*)^*$ 定義為 $\tau(\mathbf{v})=\hat{\mathbf{v}}$, $\forall\mathbf{v}\in V$. 則 τ 為一個 *one-to-one* 的 *linear transformation.* 特別當 V 為 *finite dimensional* 時, τ 為一個 *isomorphism.*

Proof. 首先證明 τ 為 linear transformation. 這是因為對任意 $\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$ 以及 $r,s\in F$ 我們有

$$\tau(r\mathbf{v}+s\mathbf{w})(f)=f(r\mathbf{v}+s\mathbf{w})=rf(\mathbf{v})+sf(\mathbf{w})=(r\tau(\mathbf{v})+s\tau(\mathbf{w}))(f),\quad\forall f\in V^*,$$

此即表示 $\tau(r\mathbf{v}+s\mathbf{w})$ 和 $r\tau(\mathbf{v})+s\tau(\mathbf{w})$ 為定義在 V^* 上的同樣函數, 故知 $\tau(r\mathbf{v}+s\mathbf{w})=r\tau(\mathbf{v})+s\tau(\mathbf{w})$.

接著證明 τ 為 one-to-one, 即證明 $\mathrm{Ker}(\tau)=\mathbf{O}_V$. 現假設 $\mathbf{v}\in\mathrm{Ker}(\tau)$, 即 $\tau(\mathbf{v})=\hat{\mathbf{v}}$ 為定義在 V^* 上的 zero mapping. 亦即對任意 $f\in V^*$ 皆有 $0=\hat{\mathbf{v}}(f)=f(\mathbf{v})$. 然而若 $\mathbf{v}\neq\mathbf{O}_V$, 我們一定可以找到 $f\in V^*$ 使得 $f(\mathbf{v})\neq 0$. 由此矛盾得證 $\mathbf{v}=\mathbf{O}_V$.

最後若 V 為 finite dimensional, 由 $\tau : V \to (V^*)^*$ 為 one-to-one 以及 $\dim(V) = \dim((V^*)^*)$, 得證 τ 為 onto, 亦即 τ 為 isomorphism. □

在 dual space 中有一個和 orthogonal complement 類似的概念, 我們介紹如下.

Definition 5.2.4. 假設 V 為 vector space, S 為 V 的一個 nonempty subset. 令

$$S^0 = \{f \in V^* \mid f(\mathbf{v}) = 0, \forall \mathbf{v} \in S\}.$$

我們稱 S^0 為 the *annihilator* of S.

Question 5.12. 什麼是 $\{\mathbf{O}_V\}^0$? 什麼是 V^0?

關於 S^0 我們有以下幾個類似 Lemma 5.1.11 的性質.

Lemma 5.2.5. 假設 V 為 *vector space over* F.

(1) 若 S 為 V 的 *nonempty subset,* 則 S^0 為 V^* 的 *subspace.*

(2) 若 S_1, S_2 為 V 的 *nonempty subsets* 滿足 $S_1 \subseteq S_2$, 則 $S_2^0 \subseteq S_1^0$.

(3) 若 S 為 V 的 *nonempty subset,* 則 $S^0 = \mathrm{Span}(S)^0$.

Proof.

(1) 首先依定義 V^* 中的 zero mapping $\mathbf{O}$ 在 S^0. 又若 $f, g \in S^0$, 則對於任意 $r, s \in F$ 皆有 $rf + sg(\mathbf{v}) = rf(\mathbf{v}) + sg(\mathbf{v}) = 0$, $\forall \mathbf{v} \in S$. 亦即 $rf + sg \in S^0$. 得證 S^0 為 V^* 的 subspace.

(2) 若 $f \in S_2^0$, 表示對任意 $\mathbf{w} \in S_2$ 皆有 $f(\mathbf{w}) = 0$. 故對任意 $\mathbf{w} \in S_1$ 因 $S_1 \subseteq S_2$, 知 $\mathbf{w} \in S_2$, 得證 $f \in S_1^0$, 即 $S_2^0 \subseteq S_1^0$.

(3) 因 $S \subseteq \mathrm{Span}(S)$, 故由 (2) 知 $\mathrm{Span}(S)^0 \subseteq S^0$. 另一方面, 若 $f \in S^0$, 則對任意 $\mathbf{w} \in \mathrm{Span}(S)$, 因存在 $c_1, \ldots, c_n \in F$ 以及 $\mathbf{w}_1 \ldots, \mathbf{w}_n \in S$ 使得 $\mathbf{w} = c_1\mathbf{w}_1 + \cdots + c_n\mathbf{w}_n$, 我們有 $f(\mathbf{w}) = c_1 f(\mathbf{w}_1) + \cdots + c_n f(\mathbf{w}_n) = 0$. 亦即 $f \in \mathrm{Span}(S)^0$, 得證 $S^0 \subseteq \mathrm{Span}(S)^0$, 故 $S^0 = \mathrm{Span}(S)^0$.

□

當 V 是 finite dimensional inner product space, 若 W 為 V 的 subspace, 則 Theorem 5.1.13 告訴我們 $\dim(W^\perp) = \dim(V) - \dim(W)$. 關於 annihilator 我們也有相同的性質.

Proposition 5.2.6. 假設 $V = W \oplus U$. 則存在一個 *isomorphism* $\phi : U^* \to W^0$. 特別當 V 為 *finite dimensional,* 則對任意的 *subspace* W 皆有 $\dim(W^0) = \dim(V) - \dim(W)$.

Proof. 由 direct sum 的性質, 對任意 $\mathbf{v} \in V$, 存在唯一的 $\mathbf{w} \in W, \mathbf{u} \in U$ 使得 $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{u}$. 故對任意 $f \in U^*$, 我們定義 $\phi(f) : V \to F$ 為 $\phi(f)(\mathbf{w} + \mathbf{u}) = f(\mathbf{u})$. 因 f 是 linear functional 很容易檢查 $\phi(f)$ 亦為 linear functional, 亦即 $\phi(f) \in V^*$. 另依此定義對於所有 $\mathbf{w} \in W$, 因 $\mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{O}_U$, 故得 $\phi(f)(\mathbf{w}) = f(\mathbf{O}_U) = 0$, 亦即 $\phi(f) \in W^0$. 所以 $\phi : U^* \to W^0$ 是一個

well-defined 的 function. 很容易驗證 ϕ 為 linear transformation. 又若 $f,g \in U^*$ 且 $f \neq g$, 表示存在 $\mathbf{u} \in U$ 使得 $f(\mathbf{u}) \neq g(\mathbf{u})$, 因此 $\phi(f)(\mathbf{u}) \neq \phi(g)(\mathbf{u})$, 得證 $\phi(f) \neq \phi(g)$, 亦即 ϕ 為 one-to-one. 至於 ϕ 是 onto 的原因是因為對任意 $f \in W^0$, 我們皆有 $f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{w}+\mathbf{u}) = f(\mathbf{u})$, 其中 $\mathbf{w} \in W, \mathbf{u} \in U$ 滿足 $\mathbf{v} = \mathbf{w}+\mathbf{u}$. 所以若考慮 $f|_U \in U^*$, 我們有 $\phi(f|_U) = f$, 得證 ϕ 為 onto.

現若 V 為 finite dimensional, 對於任意 subspace W, 我們都可將 W 的一組 basis $\{\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_k\}$ 擴大成 V 的一組 basis $\{\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_k,\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_l\}$. 所以我們有 $V = W \oplus U$, 其中 $U = \mathrm{Span}(\{\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_l\})$. 由 Theorem 5.2.2 以及套用上面的結果, 我們有

$$\dim(W^0) = \dim(U^*) = \dim(U) = \dim(V) - \dim(W).$$

□

Question 5.13. 試證明若 W_1, W_2 為 V 的 *subspaces,* 則 $(W_1+W_2)^0 = W_1^0 \cap W_2^0$. 又若 V 為 *finite dimensional,* 則 $(W_1 \cap W_2)^0 = W_1^0 + W_2^0$.

既然 W^0 為 V^* 的 subspace, 我們也可以問 W^0 的 annihilator, 即 $(W^0)^0$. 我們有如以下類似 Corollary 5.1.14 的性質.

Corollary 5.2.7. 假設 V 是一個 *finite dimensional vector space,* 且 W 為 V 的 *subspace.* 考慮 *canonical map* $\tau : V \to (V^*)^*$ 定義為 $\tau(\mathbf{v}) = \hat{\mathbf{v}}$, $\forall \mathbf{v} \in V$, 則 $\tau(W) = (W^0)^0$.

Proof. 設 $\mathbf{w} \in W$, 則對於任意 $f \in W^0$, 我們有 $\hat{\mathbf{w}}(f) = f(\mathbf{w}) = 0$, 亦即 $\tau(\mathbf{w}) = \hat{\mathbf{w}} \in (W^0)^0$. 得知 $\tau(W) \subseteq (W^0)^0$. 由 Proposition 5.2.3, 我們知道 $\tau : V \to (V^*)^*$ 為 one-to-one, 故 $\dim(\tau(W)) = \dim(W)$. 另一方面 Proposition 5.2.6 告訴我們

$$\dim((W^0)^0) = \dim(V^*) - \dim(W^0) = \dim(V) - (\dim(V) - \dim(W)) = \dim(W).$$

故知 $\dim(\tau(W)) = \dim((W^0)^0)$, 得證 $\tau(W) = (W^0)^0$. □

最後我們來探討 dual space 和 inner product space 間的關係. 首先我們需要以下的定義.

Definition 5.2.8. 令 V, W 為 vector spaces over F, 其中 F 為 $\mathbb{C}$ 或 $\mathbb{R}$. 若 $T : V \to W$ 符合對所有 $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V$, $r \in F$ 皆有 $T(\mathbf{v}+\mathbf{v}') = T(\mathbf{v}) + T(\mathbf{v}')$ 以及 $T(r\mathbf{v}) = \overline{r}T(\mathbf{v})$, 則稱 T 為一個 *conjugate transformation.* 又若 T 是 one-to-one and onto, 則稱之為 *conjugate isomorphism.*

注意當 $F = \mathbb{R}$ 時, conjugate transformation 就是 linear transformation. 其實當 $F = \mathbb{C}$ 時 conjugate transformation 和 linear transformation 有許多相似之處, 我們介紹幾個有關 conjugate transformation 的性質.

Lemma 5.2.9. 假設 V, W, U 皆為 *vector spaces over* $\mathbb{C}$. $T_1 : V \to W$, $T_2 : W \to U$.

(1) 若 T_1, T_2 中有一個是 *linear transformation* 另一個是 *conjugate transformation,* 則 $T_2 \circ T_1 : V \to U$ 為 *conjugate transformation.*

(2) 若 T_1, T_2 皆為 *conjugate transformation,* 則 $T_2 \circ T_1 : V \to U$ 為 *linear transformation.*