(3) 若 T_1 為 *conjugate isomorphism,* 則 $T_1^{-1}: W \to V$ 亦為 *conjugate isomorphism.*

Proof.

(1) 我們僅證明 T_1 為 conjugate transformation 且 T_2 為 linear transformation 的情況, 另一情況類似, 請自行驗證. 我們需證明對任意 $\mathbf{v},\mathbf{v}' \in V$ 以及 $r,s \in \mathbb{C}$ 皆有 $T_2 \circ T_1(r\mathbf{v}+s\mathbf{v}') = \bar{r}T_2 \circ T_1(\mathbf{v}) + \bar{s}T_2 \circ T_1(\mathbf{v}')$. 事實上

$$T_2 \circ T_1(r\mathbf{v}+s\mathbf{v}') = T_2(\bar{r}T_1(\mathbf{v})+\bar{s}T_1(\mathbf{v}')) = \bar{r}T_2(T_1(\mathbf{v}))+\bar{s}T_2(T_1(\mathbf{v}')) = \bar{r}T_2 \circ T_1(\mathbf{v})+\bar{s}T_2 \circ T_1(\mathbf{v}').$$

故 $T_2 \circ T_1$ 為 conjugate transformation.

(2) 若 T_1, T_2 皆為 conjugate transformation, 我們證明對任意 $\mathbf{v},\mathbf{v}' \in V$ 以及 $r,s \in \mathbb{C}$ 皆有 $T_2 \circ T_1(r\mathbf{v}+s\mathbf{v}') = rT_2 \circ T_1(\mathbf{v}) + sT_2 \circ T_1(\mathbf{v}')$. 事實上

$$T_2 \circ T_1(r\mathbf{v}+s\mathbf{v}') = T_2(\bar{r}T_1(\mathbf{v})+\bar{s}T_1(\mathbf{v}')) = \overline{(\bar{r})}T_2(T_1(\mathbf{v}))+\overline{(\bar{s})}T_2(T_1(\mathbf{v}')) = rT_2 \circ T_1(\mathbf{v})+sT_2 \circ T_1(\mathbf{v}').$$

故 $T_2 \circ T_1 : V \to U$ 為 linear transformation.

(3) 若 T_1 為 conjugate isomorphism, 因 T_1 為 one-to-one and onto, $T_1^{-1}: W \to V$ 存在且滿足 $T_1(T_1^{-1}(\mathbf{w})) = \mathbf{w}$, $\forall \mathbf{w} \in W$. 現對於任意 $\mathbf{w},\mathbf{w}' \in W$ 以及 $r,s \in \mathbb{C}$, 我們有 $T_1(T_1^{-1}(r\mathbf{w}+s\mathbf{w}')) = r\mathbf{w}+s\mathbf{w}'$ 以及

$$T_1(\bar{r}T^{-1}(\mathbf{w})+\bar{s}T^{-1}(\mathbf{w}')) = \overline{(\bar{r})}T_1(T^{-1}(\mathbf{w}))+\overline{(\bar{s})}T_1(T^{-1}(\mathbf{w}')) = r\mathbf{w}+s\mathbf{w}',$$

故得 $T_1(T^{-1}(r\mathbf{w}+s\mathbf{w}')) = T_1(\bar{r}T^{-1}(\mathbf{w})+\bar{s}T^{-1}(\mathbf{w}'))$. 因為 T_1 為 one-to-one, 此即表示

$$T^{-1}(r\mathbf{w}+s\mathbf{w}') = \bar{r}T^{-1}(\mathbf{w})+\bar{s}T^{-1}(\mathbf{w}').$$

故得證 T_1^{-1} 亦為 conjugate isomorphism. □

現若 V 為 inner product space over F, 給定 $\mathbf{v} \in V$, 考慮以下函數 $\rho(\mathbf{v}) : V \to F$ 定義為 $\mathbf{w} \mapsto \langle \mathbf{w},\mathbf{v} \rangle$, (即 $\rho(\mathbf{v}) = \langle \cdot,\mathbf{v} \rangle$) 則 $\rho(\mathbf{v})$ 為 linear functional on V, 亦即 $\rho(\mathbf{v}) \in V^*$. 所以 ρ 給了我們一個從 V 到 V^* 的 mapping. 現對於任意 $\mathbf{v},\mathbf{v}' \in V$, 我們有

$$\rho(\mathbf{v}+\mathbf{v}')(\mathbf{w}) = \langle \mathbf{w},\mathbf{v}+\mathbf{v}' \rangle = \langle \mathbf{w},\mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{w},\mathbf{v}' \rangle = \rho(\mathbf{v})(\mathbf{w})+\rho(\mathbf{v}')(\mathbf{w}), \quad \forall \mathbf{w} \in V.$$

得知 $\rho(\mathbf{v}+\mathbf{v}') = \rho(\mathbf{v})+\rho(\mathbf{v}')$ in V^*. 另外若 $r \in F$, 則

$$\rho(r\mathbf{v})(\mathbf{w}) = \langle \mathbf{w},r\mathbf{v} \rangle = \bar{r}\langle \mathbf{w},\mathbf{v} \rangle = \bar{r}\rho(\mathbf{v})(\mathbf{w}), \quad \forall \mathbf{w} \in V.$$

得知 $\rho(r\mathbf{v}) = \bar{r}\rho(\mathbf{v})$ in V^*. 我們有以下的定理.

Proposition 5.2.10. 設 V 為 *finite dimensional inner product space.* 考慮 $\rho : V \to V^*$ 定義為 $\rho(\mathbf{v}) = \langle \cdot,\mathbf{v} \rangle$, 則 ρ 為 *conjugate isomorphism.*

Proof. 我們已知 ρ 為 conjugate transformation, 所以僅要證明 ρ 為 one-to-one and onto.

首先證明 ρ 為 one-to-one. 假設 $\mathbf{v},\mathbf{v}' \in V$ 滿足 $\rho(\mathbf{v}) = \rho(\mathbf{v}')$, 此即表示 $\langle \mathbf{w},\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{w},\mathbf{v}' \rangle$, $\forall \mathbf{w} \in V$. 然而 Corollary 5.1.5 告訴我們此即表示 $\mathbf{v} = \mathbf{v}'$, 得證 ρ 為 one-to-one.

至於 ρ 是 onto, 我們首先選定 V 的一組 orthonormal basis $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\}$. 對任意 $f\in V^*$, 考慮 $\mathbf{v}=\overline{f(\mathbf{v}_1)}\mathbf{v}_1+\cdots+\overline{f(\mathbf{v}_n)}\mathbf{v}_n$. 則

$$\rho(\mathbf{v})(\mathbf{v}_i)=\langle\mathbf{v}_i,\overline{f(\mathbf{v}_1)}\mathbf{v}_1+\cdots+\overline{f(\mathbf{v}_n)}\mathbf{v}_n\rangle=\langle\mathbf{v}_i,\overline{f(\mathbf{v}_i)}\mathbf{v}_i\rangle=f(\mathbf{v}_i),\quad\forall i\in\{1,\ldots,n\}.$$

也就是說 f 和 $\rho(\mathbf{v})$ 在 $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ 這一組 basis 的取值皆相同, 亦即 $f=\rho(\mathbf{v})$. 得證 ρ 為 onto. $\square$

注意因為 ρ 為 conjugate isomorphism, 由 Lemma 5.2.9 知 $\rho^{-1}:V^*\to V$ 亦為 conjugate isomorphism.

Question 5.14. 在 *Proposition 5.2.10* 中可以利用 $\rho:V\to V^*$ 為 *one-to-one* 以及 $\dim(V)=\dim(V^*)$ 來說明 $\rho:V\to V^*$ 為 *onto* 嗎?

Example 5.2.11. 考慮 $\mathbb{R}^n$ 上的 standard inner product, 令 $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ 為 $\mathbb{R}^n$ 的 standard basis. 若 $\mathbf{v}=x_1\mathbf{e}_1+\cdots+x_n\mathbf{e}_n\in\mathbb{R}^n$, 則 $\rho(\mathbf{v})(\mathbf{e}_i)=\langle\mathbf{e}_i,\mathbf{v}\rangle=x_i$. 也就是說若令 $\rho(\mathbf{v})=f\in(\mathbb{R}^n)^*$, 則 $f(\mathbf{e}_i)=x_i$, $\forall i\in\{1,\ldots,n\}$. 反過來, 若 $f\in(\mathbb{R}^n)^*$, 則 $\rho^{-1}(f)=f(\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1+\cdots+f(\mathbf{e}_n)\mathbf{e}_n$.

考慮 $\mathbb{C}^n$ 上的 standard inner product, 令 $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ 為 $\mathbb{C}^n$ 的 standard basis. 若 $\mathbf{v}=z_1\mathbf{e}_1+\cdots+z_n\mathbf{e}_n\in\mathbb{C}^n$, 則 $\rho(\mathbf{v})(\mathbf{e}_i)=\langle\mathbf{e}_i,\mathbf{v}\rangle=\overline{z_i}$. 也就是說若令 $\rho(\mathbf{v})=f\in(\mathbb{C}^n)^*$, 則 $f(\mathbf{e}_i)=\overline{z_i}$, $\forall i\in\{1,\ldots,n\}$. 反過來, 若 $f\in(\mathbb{C}^n)^*$, 則 $\rho^{-1}(f)=\overline{f(\mathbf{e}_1)}\mathbf{e}_1+\cdots+\overline{f(\mathbf{e}_n)}\mathbf{e}_n$.

5.3. Transpose and Adjoint

雖然以後我們關心的是 linear operator, 不過有關於 transpose 和 adjoint 的性質, 用一般的 linear transformation 較容易看出. 所以這一節中我們考慮的是一般的 linear transformation. 給定一個 linear transformation $T:V\to W$, 在 dual spaces W^*,V^* 上我們可以定義 T 的 transpose, 而若 V,W 為 inner product space, 我們也可以定義 T 的 adjoint. 我們將探討 transpose 和 adjoint 之間的關係.

5.3.1. The Transpose of a Linear Transformation. 首先我們探討一個 linear transformation $T:V\to W$ 的 transpose, 其中 V,W 皆為 vector space over F. 再次強調有關 T 的 transpose 不需假設 V,W 為 inner product space 而且也不需假設為 finite dimensional. 現對於任意 $f\in W^*$, 由於 T,f 皆為 linear transformation, 所以 $f\circ T:V\to F$ 亦為 linear transformation. 也就是說 $f\circ T\in V^*$. 所以我們可定義一個 mapping $T^{\mathrm{t}}:W^*\to V^*$, 其定義為 $T^{\mathrm{t}}(f)=f\circ T$, $\forall f\in W^*$. 依此定義, 對於任意 $f,g\in W^*$, $r,s\in F$ 我們有

$$T^{\mathrm{t}}(rf+sg)=(rf+sg)\circ T=r(f\circ T)+s(g\circ T)=rT^{\mathrm{t}}(f)+sT^{\mathrm{t}}(g),$$

故知 $T^{\mathrm{t}}:W^*\to V^*$ 為 linear transformation. 我們稱 T^{t} 為 T 的 *transpose*. 依定義 T 和 T^{t} 的關係為, 對任意 $\mathbf{v}\in V$, $f\in W^*$ 我們有

$$f(T(\mathbf{v}))=T^t(f)(\mathbf{v}).$$

我們要了解一個 Linear transformation $T:V\to W$ 和 T 的 transpose $T^{\mathrm{t}}:W^*\to V^*$ 分別對應到 V,W 的 ordered basis 及其 dual basis 的 representative matrix 之間的關係.

Proposition 5.3.1. 令 $\beta = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n), \gamma = (\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m)$ 分別為 V, W 的 *ordered basis* 且令 $\beta^* = (\mathbf{v}_1^*, \ldots, \mathbf{v}_n^*), \gamma^* = (\mathbf{w}_1^*, \ldots, \mathbf{w}_m^*)$ 分別為相對應的 *dual basis* 所組成 V^*, W^* 的 *ordered basis.* 給定一個 *Linear transformation* $T : V \to W$, 我們有

$$_{\beta^*}[T^{\mathrm{t}}]_{\gamma^*} = {}_{\gamma}[T]_{\beta}^{\mathrm{t}}.$$

Proof. 因為 $T^{\mathrm{t}}(\mathbf{w}_i^*) = \mathbf{w}_i^* \circ T \in V^*$, 若 $\mathbf{w}_i^* \circ T = c_{1,i}\mathbf{v}_1^* + \cdots + c_{n,i}\mathbf{v}_n^*$, 則依定義

$$c_{j,i} = \mathbf{w}_i^* \circ T(\mathbf{v}_j) = \mathbf{w}_i^*(T(\mathbf{v}_j)).$$

故若 $T(\mathbf{v}_j) = d_{1,j}\mathbf{w}_1 + \cdots + d_{m,j}\mathbf{w}_m$, 則 $c_{j,i} = d_{i,j}$. 然而此處 $c_{j,i}$ 為 $_{\beta^*}[T^{\mathrm{t}}]_{\gamma^*}$ 的 (j,i)-th entry, 而 $d_{i,j}$ 為 $_{\gamma}[T]_{\beta}$ 的 (i,j)-th entry, 得證 $_{\beta^*}[T^{\mathrm{t}}]_{\gamma^*} = {}_{\gamma}[T]_{\beta}^{\mathrm{t}}$. □

接下來我們列出 transpose 的基本性質.

Proposition 5.3.2. 設 V, W, U 皆為 *vector space over* F.

(1) 若 $r, s \in F$ 且 $T_1 : V \to W$, $T_2 : V \to W$ 皆為 *linear transformations,* 則

$$(rT_1 + sT_2)^{\mathrm{t}} = rT_1^{\mathrm{t}} + sT_2^{\mathrm{t}}.$$

(2) 若 $T_1 : V \to W$, $T_2 : W \to U$ 皆為 *linear transformations,* 則

$$(T_2 \circ T_1)^{\mathrm{t}} = T_1^{\mathrm{t}} \circ T_2^{\mathrm{t}}.$$

(3) $(\mathrm{id}_V)^{\mathrm{t}} = \mathrm{id}_{V^*}$, 特別地, 若 $T : V \to W$ 為 *isomorphism,* 則 $T^{\mathrm{t}} : W^* \to V^*$ 亦為 *isomorphism* 且

$$(T^{\mathrm{t}})^{-1} = (T^{-1})^{\mathrm{t}}.$$

Proof.

(1) 對於任意 $f \in W^*$, 因為 f 為 linear, 我們有

$$(rT_1 + sT_2)^{\mathrm{t}}(f) = f \circ (rT_1 + sT_2) = r(f \circ T_1) + s(f \circ T_2) = rT_1^{\mathrm{t}}(f) + sT_2^{\mathrm{t}}(f) = (rT_1^{\mathrm{t}} + sT_2^{\mathrm{t}})(f).$$

得證 $(rT_1 + sT_2)^{\mathrm{t}} = rT_1^{\mathrm{t}} + sT_2^{\mathrm{t}}$.

(2) 因為 $T_2 \circ T_1$ 為從 V 到 U 的 linear transformation, 所以 $(T_2 \circ T_1)^{\mathrm{t}}$ 為從 U^* 到 V^* 的 linear transformation. 現對任意 $f \in U^*$, 我們有

$$(T_2 \circ T_1)^{\mathrm{t}}(f) = f \circ (T_2 \circ T_1) = (f \circ T_2) \circ T_1 = T_1^{\mathrm{t}}(f \circ T_2) = T_1^{\mathrm{t}}(T_2^{\mathrm{t}}(f)) = T_1^{\mathrm{t}} \circ T_2^{\mathrm{t}}(f).$$

得證 $(T_2 \circ T_1)^{\mathrm{t}} = T_1^{\mathrm{t}} \circ T_2^{\mathrm{t}}$.

(3) 對於任意 $f \in V^*$, 我們有 $(\mathrm{id}_V)^{\mathrm{t}}(f) = f \circ \mathrm{id}_V = f$, 所以 $(\mathrm{id}_V)^{\mathrm{t}} = \mathrm{id}_{V^*}$. 現若 $T : V \to W$ 為 isomorphism, 我們有 $T^{-1} \circ T = \mathrm{id}_V$ 且 $T \circ T^{-1} = \mathrm{id}_W$. 故由 (2) 得

$$\mathrm{id}_{V^*} = (\mathrm{id}_V)^{\mathrm{t}} = T^{\mathrm{t}} \circ (T^{-1})^{\mathrm{t}}, \quad \mathrm{id}_{W^*} = (\mathrm{id}_W)^{\mathrm{t}} = (T^{-1})^{\mathrm{t}} \circ T^{\mathrm{t}},$$

得證 T^{t} 為 isomorphism 且 $(T^{\mathrm{t}})^{-1} = (T^{-1})^{\mathrm{t}}$. □