

以下結果告訴我們一個 linear transformation 其 kernel 和 image 和其 transpose 的 kernel 與 image 之間的關係. 這個結果對任意的 vector space 皆成立, 不過我們僅探討 finite dimensional 的情形.

Proposition 5.3.3. 假設 V, W 皆為 finite dimensional vector space, $T: V \rightarrow W$ 為 linear transformation, $T^t: W^* \rightarrow V^*$ 為其 transpose. 則

$$\text{Ker}(T^t) = \text{Im}(T)^0, \quad \text{Im}(T^t) = \text{Ker}(T)^0.$$

Proof. 假設 $f \in \text{Ker}(T^t)$, 即 $T^t(f) = f \circ T = \mathbf{0}$ in V^* . 這表示對任意 $\mathbf{v} \in V$, 皆有 $T^t(f)(\mathbf{v}) = f(T(\mathbf{v})) = 0$. 得 $f \in \{T(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in V\}^0 = \text{Im}(T)^0$. 反之, 若 $f \in \text{Im}(T)^0$, 表示對任意 $\mathbf{v} \in V$, 皆有 $f(T(\mathbf{v})) = 0$, 亦即 $T^t(f) = \mathbf{0}$ in V^* , 得證 $f \in \text{Ker}(T^t)$.

另一方面, 假設 $f \in \text{Im}(T^t)$, 即存在 $g \in W^*$ 使得 $f = T^t(g) = g \circ T$. 故對任意 $\mathbf{v} \in \text{Ker}(T)$, 我們有 $f(\mathbf{v}) = g(T(\mathbf{v})) = g(\mathbf{0}_W) = 0$. 也就是說 $f \in \text{Ker}(T)^0$, 得證 $\text{Im}(T^t) \subseteq \text{Ker}(T)^0$. 現因 $T^t: W^* \rightarrow V^*$ 為 linear transformation, 利用 Theorem 5.2.2 我們有

$$\dim(\text{Im}(T^t)) = \dim(W^*) - \dim(\text{Ker}(T^t)) = \dim(W) - \dim(\text{Ker}(T^t)).$$

再由 $\text{Ker}(T^t) = \text{Im}(T)^0$ 以及 Proposition 5.2.6 知

$$\dim(\text{Ker}(T^t)) = \dim(\text{Im}(T)^0) = \dim(W) - \dim(\text{Im}(T)),$$

故得

$$\dim(\text{Im}(T^t)) = \dim(\text{Im}(T)).$$

而因 $T: V \rightarrow W$ 為 linear transformation, 故知 $\dim(\text{Ker}(T)) = \dim(V) - \dim(\text{Im}(T))$, 再由 Proposition 5.2.6 知

$$\dim(\text{Ker}(T)^0) = \dim(V) - \dim(\text{Ker}(T)) = \dim(\text{Im}(T)).$$

故得 $\dim(\text{Im}(T^t)) = \dim(\text{Ker}(T)^0)$, 得證 $\text{Im}(T^t) = \text{Ker}(T)^0$. $\square$

Question 5.15. 在 Proposition 5.3.3 的證明中我們知道 $\dim(\text{Im}(T^t)) = \dim(\text{Im}(T))$. 是否 $\dim(\text{Ker}(T^t)) = \dim(\text{Ker}(T))$?

既然 $T^t: W^* \rightarrow V^*$ 也是 linear transformation, 我們自然也會去考慮 T^t 的 transpose, 也就是 $(T^t)^t: (V^*)^* \rightarrow (W^*)^*$. 回顧一下當 V 為 finite dimensional, 我們有一個 isomorphism $\tau_V: V \rightarrow (V^*)^*$, 定義為對任意 $\mathbf{v} \in V$, $\tau_V(\mathbf{v}) = \hat{\mathbf{v}}$ 其中 $\hat{\mathbf{v}}(f) = f(\mathbf{v})$, $\forall f \in V^*$. 我們有以下的圖示:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{T} & W \\ \downarrow \tau_V & & \downarrow \tau_W \\ (V^*)^* & \xrightarrow{(T^t)^t} & (W^*)^* \end{array}$$

現對於任意 $\mathbf{v} \in V$, 我們有 $(T^t)^t(\tau_V(\mathbf{v})) = \hat{\mathbf{v}} \circ T^t \in (W^*)^*$. 也就是說對於任意 $f \in W^*$, 我們有

$$(T^t)^t(\tau_V(\mathbf{v}))(f) = \hat{\mathbf{v}} \circ T^t(f) = \hat{\mathbf{v}}(f \circ T) = f \circ T(\mathbf{v}) = f(T(\mathbf{v})).$$

另一方面 $T(\mathbf{v}) \in W$, 所以 $\tau_W(T(\mathbf{v})) = \widehat{T(\mathbf{v})} \in (W^*)^*$. 也就是說對於任意 $f \in W^*$, 我們有

$$\tau_W(T(\mathbf{v}))(f) = \widehat{T(\mathbf{v})}(f) = f(T(\mathbf{v})).$$

得證 $(T^t)^t(\tau_V(\mathbf{v})) = \tau_W(T(\mathbf{v})), \forall \mathbf{v} \in V$, 亦即

$$(T^t)^t \circ \tau_V = \tau_W \circ T.$$

我們證明了上面那個圖示為一個 *commutative diagram*. 再加上 τ_V 為 isomorphism, 故 $\tau_V^{-1}: (V^*)^* \rightarrow V$ 存在 (亦為 isomorphism). 我們有以下之結果.

Proposition 5.3.4. 假設 V, W 皆為 *finite dimensional vector space*, $T: V \rightarrow W$ 為 *linear transformation*. 令 τ_V 以及 τ_W 分別為 $V, (V^*)^*$ 以及 $W, (W^*)^*$ 之間的 *canonical map*. 則

$$(T^t)^t = \tau_W \circ T \circ \tau_V^{-1}.$$

由 Proposition 5.3.1, 我們可將一個 linear transformation 的 transpose 和一個 matrix 的 transpose 相連結. 我們可以將 Proposition 5.3.2, 5.3.3, 5.3.4 換成有關 matrix 的 transpose 的性質.

Question 5.16. 令 $\beta = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n), \gamma = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m)$ 分別為 V, W 的 *ordered basis* 且令 $\hat{\beta} = (\hat{\mathbf{v}}_1, \dots, \hat{\mathbf{v}}_n), \hat{\gamma} = (\hat{\mathbf{w}}_1, \dots, \hat{\mathbf{w}}_m)$ 分別為 $(V^*)^*, (W^*)^*$ 的 *ordered basis*, 其中 $\hat{\mathbf{v}}_i = \tau_V(\mathbf{v}_i), \hat{\mathbf{w}}_j = \tau_W(\mathbf{w}_j)$ ($\tau_V: V \rightarrow (V^*)^*, \tau_W: W \rightarrow (W^*)^*$ 為 *canonical maps*.) 請利用 Proposition 5.3.4, 5.3.1 證明

$$(\gamma[T]_{\beta}^t)^t = \hat{\gamma}[(T^t)^t]_{\hat{\beta}} = \gamma[T]_{\beta}.$$

5.3.2. The Adjoint of a Linear Transformation. 接下來我們要探討的是一個 linear transformation $T: V \rightarrow W$ 的 adjoint. 首先強調 adjoint 的定義是需要 V, W 皆為 finite dimensional inner product spaces. 回顧一下, 在此時我們有 $\rho_V: V \rightarrow V^*, \rho_W: W \rightarrow W^*$ 定義為 $\rho_V(\mathbf{v}) = \langle \cdot, \mathbf{v} \rangle, \forall \mathbf{v} \in V$ 以及 $\rho_W(\mathbf{w}) = \langle \cdot, \mathbf{w} \rangle, \forall \mathbf{w} \in W$ 且 ρ_V, ρ_W 皆為 conjugate isomorphism. 我們定義 T 的 *adjoint* $T^*: W \rightarrow V$ 為

$$T^* = \rho_V^{-1} \circ T^t \circ \rho_W.$$

換言之對任意 $\mathbf{w} \in W$, 我們有

$$T^*(\mathbf{w}) = \rho_V^{-1} \circ \rho_W(\mathbf{w}) \circ T = \rho_V^{-1}(\langle T(\cdot), \mathbf{w} \rangle).$$

由 Lemma 5.2.9 (1) 我們知 $T^t \circ \rho_W: W \rightarrow V^*$ 為 conjugate transformation, 故再由 Lemma 5.2.9 (2) 得 $T^*: W \rightarrow V$ 為 linear transformation. 我們有以下的 commutative diagram.

$$\begin{array}{ccc} V & \xleftarrow{T^*} & W \\ \downarrow \rho_V & & \downarrow \rho_W \\ V^* & \xleftarrow{T^t} & W^* \end{array}$$

Theorem 5.3.5. 假設 V, W 皆為 *finite dimensional inner product space*, $T: V \rightarrow W$ 為 *linear transformation*. 則 T 的 *transpose* $T^*: W \rightarrow V$, 為唯一的 *linear transformation* 滿足

$$\langle T(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, T^*(\mathbf{w}) \rangle, \forall \mathbf{v} \in V, \mathbf{w} \in W.$$

Proof. 我們已知 T^* 為 *linear transformation*. 現對任意 $\mathbf{w} \in W$, 我們有 $\rho_V(T^*(\mathbf{w})) \in V^*$ 滿足對任意 $\mathbf{v} \in V$, 皆有 $\rho_V(T^*(\mathbf{w}))(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, T^*(\mathbf{w}) \rangle$. 另一方面 $\rho_V(T^*(\mathbf{w})) = T^t \circ \rho_W(\mathbf{w})$, 而對任意 $\mathbf{v} \in V$, 皆有 $T^t \circ \rho_W(\mathbf{w})(\mathbf{v}) = \langle T(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle$. 得證 $\langle T(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, T^*(\mathbf{w}) \rangle$

至於唯一性, 假設 $T': W \rightarrow V$ 亦滿足 $\langle T(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, T'(\mathbf{w}) \rangle, \forall \mathbf{v} \in V, \mathbf{w} \in W$, 則知對任意 $\mathbf{v} \in V, \mathbf{w} \in W$ 皆有 $\langle \mathbf{v}, T^*(\mathbf{w}) \rangle = \langle \mathbf{v}, T'(\mathbf{w}) \rangle$. 由 Corollary 5.1.5 知 $T^*(\mathbf{w}) = T'(\mathbf{w}), \forall \mathbf{w} \in W$, 得證 $T' = T^*$. $\square$

要注意 Theorem 5.3.5 中左式的 *inner product* 是 W 的 *inner product*, 右式為 V 的 *inner product*. 當一個 *linear transformation* $T: V \rightarrow W$ 保持 *inner product*, 亦即

$$\langle T(\mathbf{v}), T(\mathbf{v}') \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}' \rangle, \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V.$$

我們很自然有 T 為 *one-to-one*. 這是因為若 $\mathbf{v} \in \text{Ker}(T)$, 則 $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \langle T(\mathbf{v}), T(\mathbf{v}) \rangle = 0$, 得證 $\mathbf{v} = \mathbf{0}_V$. 故若 $\dim(W) = \dim(V)$, 則 T 為 *isomorphism*, 我們稱這樣的 *isomorphism* 為 *inner product isomorphism*. 此時 *linear transformation* $T^{-1}: W \rightarrow V$ 也會是 *inner product isomorphism*. 這是因為

$$\langle T^{-1}(\mathbf{w}), T^{-1}(\mathbf{w}') \rangle = \langle T(T^{-1}(\mathbf{w})), T(T^{-1}(\mathbf{w}')) \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{w}' \rangle, \quad \forall \mathbf{w}, \mathbf{w}' \in W.$$

我們有以下判斷 *inner product isomorphism* 的方法.

Corollary 5.3.6. 假設 V, W 為 *finite dimensional inner product spaces*, $T: V \rightarrow W$ 為 *linear transformation* 且 $T^*: W \rightarrow V$ 為其 *adjoint*. 則以下敘述為等價的 (*equivalent*).

- (1) T 為 *inner product isomorphism*.
- (2) T 為 *isomorphism* 且 $T^{-1} = T^*$.

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2): 對於任意 $\mathbf{v} \in V, \mathbf{w} \in W$, 我們有

$$\langle T(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle = \langle T(\mathbf{v}), T(T^{-1}(\mathbf{w})) \rangle = \langle \mathbf{v}, T^{-1}(\mathbf{w}) \rangle.$$

故利用 Theorem 5.3.5 有關 *adjoint* 的唯一性得證 $T^{-1} = T^*$.

(2) $\Rightarrow$ (1): 對於任意 $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V$, 皆有

$$\langle T(\mathbf{v}), T(\mathbf{v}') \rangle = \langle \mathbf{v}, T^*(T(\mathbf{v}')) \rangle = \langle \mathbf{v}, T^{-1}(T(\mathbf{v}')) \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}' \rangle.$$

故 T 為 *inner product isomorphism*. $\square$

接下來我們列出 *adjoint* 的基本性質.

Proposition 5.3.7. 設 V, W, U 皆為 *finite dimensional inner product space over F* .

(1) 若 $r, s \in F$ 且 $T_1 : V \rightarrow W, T_2 : V \rightarrow W$ 皆為 *linear transformations*, 則

$$(rT_1 + sT_2)^* = \bar{r}T_1^* + \bar{s}T_2^*.$$

(2) 若 $T_1 : V \rightarrow W, T_2 : W \rightarrow U$ 皆為 *linear transformations*, 則

$$(T_2 \circ T_1)^* = T_1^* \circ T_2^*.$$

(3) $\text{id}_V^* = \text{id}_V$, 特別地, 若 $T : V \rightarrow W$ 為 *isomorphism*, 則 $T^* : W \rightarrow V$ 亦為 *isomorphism* 且

$$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*.$$

(4) 若 $T : V \rightarrow W$ 為 *linear transformation*, 則

$$(T^*)^* = T.$$

Proof.

(1) 對於任意 $\mathbf{v} \in V, \mathbf{w} \in W$, 利用 inner product 的性質我們有

$$\langle (rT_1 + sT_2)(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle = r\langle T_1(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle + s\langle T_2(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle = r\langle \mathbf{v}, T_1^*(\mathbf{w}) \rangle + s\langle \mathbf{v}, T_2^*(\mathbf{w}) \rangle = \langle \mathbf{v}, (\bar{r}T_1^* + \bar{s}T_2^*)(\mathbf{w}) \rangle.$$

故由 adjoint 的唯一性得證 $(rT_1 + sT_2)^* = \bar{r}T_1^* + \bar{s}T_2^*$.

(2) 因為 $T_2 \circ T_1$ 為從 V 到 U 的 *linear transformation*, 所以 $(T_2 \circ T_1)^*$ 為從 U 到 V 的 *linear transformation*. 現對任意 $\mathbf{v} \in V, \mathbf{u} \in U$, 我們有

$$\langle (T_2 \circ T_1)(\mathbf{v}), \mathbf{u} \rangle = \langle T_2(T_1(\mathbf{v})), \mathbf{u} \rangle = \langle T_1(\mathbf{v}), T_2^*(\mathbf{u}) \rangle = \langle \mathbf{v}, T_1^*(T_2^*(\mathbf{u})) \rangle = \langle \mathbf{v}, T_1^* \circ T_2^*(\mathbf{u}) \rangle.$$

故由 adjoint 的唯一性得證 $(T_2 \circ T_1)^* = T_1^* \circ T_2^*$.

(3) 對於任意 $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V$, 我們有 $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}' \rangle = \langle \text{id}_V(\mathbf{v}), \mathbf{v}' \rangle = \langle \mathbf{v}, \text{id}_V^*(\mathbf{v}') \rangle$, 所以利用 Corollary 5.1.5 得證 $\text{id}_V^*(\mathbf{v}') = \mathbf{v}', \forall \mathbf{v}' \in V$. 亦即 $\text{id}_V^* = \text{id}_V$. 現若 $T : V \rightarrow W$ 為 *isomorphism*, 我們有 $T^{-1} \circ T = \text{id}_V$ 且 $T \circ T^{-1} = \text{id}_W$. 故由 (2) 得

$$\text{id}_V = \text{id}_V^* = T^* \circ (T^{-1})^*, \quad \text{id}_W = \text{id}_W^* = (T^{-1})^* \circ T^*,$$

得證 T^* 為 *isomorphism* 且 $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

(4) 因 $T^* : W \rightarrow V$ 為 *linear transformation*, 對任意 $\mathbf{v} \in V, \mathbf{w} \in W$ 我們有

$$\langle T^*(\mathbf{w}), \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{w}, (T^*)^*(\mathbf{v}) \rangle.$$

另一方面

$$\langle \mathbf{w}, T(\mathbf{v}) \rangle = \overline{\langle T(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle} = \overline{\langle \mathbf{v}, T^*(\mathbf{w}) \rangle} = \langle T^*(\mathbf{w}), \mathbf{v} \rangle,$$

我們得知 $(T^*)^*(\mathbf{v}) = T(\mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in V$. 得證 $(T^*)^* = T$. □

Question 5.17. 試利用 *adjoint* 的定義證明 Proposition 5.3.7.

接下來, 我們來看一個 *linear transformation* 和其 *adjoint* 它們的 *kernel* 和 *image* 之間的關係.

Proposition 5.3.8. 假設 V, W 為 *finite dimensional inner product spaces*, $T : V \rightarrow W$ 為 *linear transformation* 且 $T^* : W \rightarrow V$ 為其 *adjoint*. 則