(1) $\mathrm{Ker}(T^*) = \mathrm{Im}(T)^\perp$ 且 $\mathrm{Im}(T^*) = \mathrm{Ker}(T)^\perp$.

(2) *$T$ is one-to-one 若且唯若 $T^*$ is onto. $T$ is onto 若且唯若 $T^*$ is one-to-one.*

(3) $\mathrm{Ker}(T^* \circ T) = \mathrm{Ker}(T)$ 且 $\mathrm{Ker}(T \circ T^*) = \mathrm{Ker}(T^*)$.

(4) $\mathrm{Im}(T^* \circ T) = \mathrm{Im}(T^*)$ 且 $\mathrm{Im}(T \circ T^*) = \mathrm{Im}(T)$.

**Proof.**

(1) 設 $\mathbf{w} \in \mathrm{Ker}(T^*)$, 即 $T^*(\mathbf{w}) = \mathbf{O}_V$, 此時對任意 $\mathbf{v} \in V$, 我們有

$$\langle T(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, T^*(\mathbf{w}) \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{O}_V \rangle = 0,$$

得證 $\mathbf{w} \in \mathrm{Im}(T)^\perp$. 反之, 若 $\mathbf{w} \in \mathrm{Im}(T)^\perp$, 則對任意 $\mathbf{v} \in V$ 皆有 $0 = \langle T(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, T^*(\mathbf{w}) \rangle$. 故由 Lemma 5.1.4 得證 $\mathbf{w} \in \mathrm{Ker}(T^*)$. 另一方面, 若 $\mathbf{v} \in \mathrm{Im}(T^*)$, 表示存在 $\mathbf{w} \in W$ 使得 $\mathbf{v} = T^*(\mathbf{w})$. 故對任意 $\mathbf{v}' \in \mathrm{Ker}(T)$, 皆有 $\langle \mathbf{v}', \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}', T^*(\mathbf{w}) \rangle = \langle T(\mathbf{v}'), \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{O}_W, \mathbf{w} \rangle = 0$, 即 $\mathbf{v} \in \mathrm{Ker}(T)^\perp$. 得證 $\mathrm{Im}(T^*) \subseteq \mathrm{Ker}(T)^\perp$. 最後利用 $\mathrm{Ker}(T^*) = \mathrm{Im}(T)^\perp$ 得

$$\begin{aligned} \dim(\mathrm{Im}(T^*)) &= \dim(W) - \dim(\mathrm{Ker}(T^*)) = \dim(W) - \dim(\mathrm{Im}(T)^\perp) \\ &= \dim(W) - (\dim(W) - \dim(\mathrm{Im}(T))) = \dim(\mathrm{Im}(T)) \end{aligned}$$

又因 $\dim(\mathrm{Ker}(T)^\perp) = \dim(V) - \dim(\mathrm{Ker}(T)) = \dim(\mathrm{Im}(T))$ 得 $\dim(\mathrm{Im}(T^*)) = \dim(\mathrm{Ker}(T)^\perp)$ 故得證 $\mathrm{Im}(T^*) = \mathrm{Ker}(T)^\perp$.

(2) 若 $T$ is one-to-one, 則 $\mathrm{Ker}(T) = \{\mathbf{O}_V\}$. 故由 (1) 知 $\mathrm{Im}(T^*) = \mathrm{Ker}(T)^\perp = \{\mathbf{O}_V\}^\perp = V$, 得證 $T^*$ 為 onto. 反之, 若 $T^*$ 為 onto, 得 $\mathrm{Ker}(T)^\perp = V$, 由 Corollary 5.1.14 知

$$\mathrm{Ker}(T) = (\mathrm{Ker}(T)^\perp)^\perp = V^\perp = \{\mathbf{O}_V\}.$$

得證 $T$ 為 one-to-one. 利用此結果將 $T$ 用 $T^*$ 取代, 得知 $T^*$ 為 one-to-one 若且唯若 $(T^*)^* = T$ 為 onto.

(3) 很明顯我們有 $\mathrm{Ker}(T) \subseteq \mathrm{Ker}(T^* \circ T)$. 現若 $\mathbf{v} \in \mathrm{Ker}(T^* \circ T)$, 則

$$\langle T(\mathbf{v}), T(\mathbf{v}) \rangle = \langle \mathbf{v}, T^*(T(\mathbf{v})) \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{O}_V \rangle = 0.$$

得證 $T(\mathbf{v}) = \mathbf{O}_W$, 即 $\mathbf{v} \in \mathrm{Ker}(T)$. 利用此結果將 $T$ 用 $T^*$ 取代, 再利用 $(T^*)^*$ 得 $\mathrm{Ker}(T \circ T^*) = \mathrm{Ker}(T^*)$.

(4) 很明顯我們有 $\mathrm{Im}(T^* \circ T) \subseteq \mathrm{Im}(T^*)$. 然而由 (3) 我們有

$$\dim(\mathrm{Im}(T^* \circ T)) = \dim(V) - \dim(\mathrm{Ker}(T^* \circ T)) = \dim(V) - \dim(\mathrm{Ker}(T)) = \dim(\mathrm{Ker}(T)^\perp),$$

再由 (1) $\mathrm{Im}(T^*) = \mathrm{Ker}(T)^\perp$ 得知 $\dim(\mathrm{Im}(T^* \circ T)) = \dim(\mathrm{Im}(T^*))$, 證得 $\mathrm{Im}(T^* \circ T) = \mathrm{Im}(T^*)$. 利用此結果將 $T$ 用 $T^*$ 取代, 得證 $\mathrm{Im}(T \circ T^*) = \mathrm{Im}(T)$. □

**Question 5.18.** 試證明 $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Im}(T^*)^\perp$ 且 $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Ker}(T^*)^\perp$.

對於 $T : V \to W$ 和它的 adjoint $T^* : W \to V$ 的 representative matrix 當然有一定的關係, 由於 adjoint 和 inner product 有關, 所以 $V, W$ 所選的 ordered basis 應也要和 inner product 有關. 事實上若分別取 $V$ 和 $W$ 的 orthonormal basis 所組成的 ordered basis $\beta = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$

和 $\gamma=(\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_m)$, 且 $T(\mathbf{v}_i)=c_{1,i}\mathbf{w}_1+\cdots+c_{m,i}\mathbf{w}_m$, 則依定義 ${}_\gamma[T]_\beta$ 的 $(j,i)$-th entry 為 $c_{j,i}$. 然而因 $\{\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_m\}$ 為 $W$ 的 orthonormal basis, 我們有 $c_{j,i}=\langle T(\mathbf{v}_i),\mathbf{w}_j\rangle=\langle \mathbf{v}_i,T^*(\mathbf{w}_j)\rangle$. 另一方面若 $T^*(\mathbf{w}_j)=d_{1,j}\mathbf{v}_1+\cdots+d_{n,j}\mathbf{v}_n$, 則 ${}_\beta[T^*]_\gamma$ 的 $(i,j)$-th entry 為

$$d_{i,j}=\langle T^*(\mathbf{w}_j),\mathbf{v}_i\rangle=\overline{\langle \mathbf{v}_i,T^*\mathbf{w}_j\rangle}=\overline{c_{j,i}}.$$

也就是說 ${}_\beta[T^*]_\gamma$ 是將 ${}_\gamma[T]_\beta$ 先取 transpose 再將每個 entry 取其 conjugate 而得. 我們有以下的定義.

**Definition 5.3.9.** 假設 $A\in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ 且 $B\in M_{n\times m}(\mathbb{C})$. 對所有 $1\leq i\leq n$, $1\leq j\leq m$, 令 $a_{j,i}$ 為 $A$ 的 $(j,i)$-th entry 且 $b_{i,j}$ 為 $B$ 的 $(i,j)$-th entry. 若 $b_{i,j}=\overline{a_{j,i}}$, $\forall i\in\{1,\ldots,n\}, j\in\{1,\ldots,m\}$, 則稱 $B$ 為 $A$ 的 *adjoint* 且以 $A^*$ 來表示.

要注意, 依此定義 $(A^*)^*=A$, 且若 $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, 則 $A^*=A^{\mathrm{t}}$. 又依此定義, 我們有以下之結果.

**Proposition 5.3.10.** 假設 $V,W$ 為 *finite dimensional inner product space,* 且分別選取 $V$ 和 $W$ 的 *orthonormal basis* 所組成的 *ordered basis* $\beta=(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)$ 和 $\gamma=(\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_m)$. 若 $T:V\to W$ 為 *linear transformation* 且 $T^*:W\to V$ 為 $T$ 的 *adjoint,* 則

$${}_\beta[T^*]_\gamma=({}_\gamma[T]_\beta)^*.$$

由 Proposition 5.3.10, 我們可將一個 linear transformation 的 adjoint 和一個 matrix 的 adjoint 相連結. 我們可以將 Proposition 5.3.7, 5.3.8 換成有關 matrix 的 adjoint 的性質.

另外要注意的是在 Theorem 5.3.5 中我們強調一個 linear transformation 的 adjoint 是唯一的, 這是在給定一個 inner product 的條件之下. 在不同的 inner product 之下, 一個 linear transformation 會有不同的 adjoint, 我們看以下的例子.

**Example 5.3.11.** 考慮 $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 定義為

$$T(x_1,x_2,x_3)=(4x_1+x_2+2x_3,4x_1+4x_2+4x_3,2x_1+x_2+4x_3).$$

考慮 $\mathbb{R}^3$ 上兩個 inner products $\langle\,,\rangle$ 以及 $\langle\langle\,,\rangle\rangle$, 其中 $\langle\,,\rangle$ 為 standard inner product, 即

$$\langle(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3.$$

而 $\langle\langle\,,\rangle\rangle$ 的定義為

$$\langle\langle(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle\rangle=x_1y_1+\frac{1}{4}x_2y_2+x_3y_3.$$

若考慮 $\mathbb{R}^3$ 為 standard inner product space, 則 $\varepsilon=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ 為 $\mathbb{R}^3$ 的一組 ordered orthonormal basis. 此時 $[T]_\varepsilon=\begin{pmatrix}4&1&2\\4&4&4\\2&1&4\end{pmatrix}$, 故由 Proposition 5.3.10 得 $[T^*]_\varepsilon=\begin{pmatrix}4&4&2\\1&4&1\\2&4&4\end{pmatrix}$, 即此時 $T^*(x_1,x_2,x_3)=(4x_1+4x_2+2x_3,x_1+4x_2+x_3,2x_1+4x_2+4x_3)$.

若考慮 $\mathbb{R}^3$ 為以 $\langle\langle\, ,\,\rangle\rangle$ 為 inner product 的 inner product space, 則可取

$$\beta = \{(1,0,0),(0,2,0),(0,0,1)\}$$

為 $\mathbb{R}^3$ 的一組 ordered orthonormal basis. 此時 $[T]_\beta = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, 由 Proposition 5.3.10 得 $[T^*]_\beta = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, 故知此時 $T^* = T$, 即

$$T^*(x_1,x_2,x_3) = (4x_1+x_2+2x_3, 4x_1+4x_2+4x_3, 2x_1+x_2+4x_3).$$

## 5.4. The Adjoint of Linear Operators

這一節中我們特別要探討一個 linear operator $T: V \to V$ 的 adjoint. 我們也會探討一些特別的 operator 的 adjoint. 所以本節中的 vector space $V$ 永遠是一個 finite dimensional inner product space over $F$, 其中 $F = \mathbb{C}$ 或 $F = \mathbb{R}$.

當 $T: V \to V$ 為 linear operator, 則其 adjoint $T^*: V \to V$ 亦為 linear operator. 所以對任意 $f(x) \in F[x]$, $f(T^*)$ 亦有定義且為 linear operator. 我們對任意 $f(x) \in F[x]$, $f(T)$ 的 adjoint 為何有興趣. 首先若 $f(x) = c_n x^n + \cdots + c_1 x + c_0$, 我們定義 $\overline{f}(x) = \overline{c_n} x^n + \cdots + \overline{c_1} x + \overline{c_0}$, 則有以下結果.

**Lemma 5.4.1.** 若 $T: V \to V$ 為 *linear operator,* 則對任意 $f(x) \in F[x]$ 皆有

$$(f(T))^* = \overline{f}(T^*).$$

**Proof.** 首先由 Proposition 5.3.7(2) 知 $(T^{\circ n})^* = (T^*)^{\circ n}$. 故若 $f(x) = c_n x^n + \cdots + c_1 x + c_0$, 則再由 Proposition 5.3.7(1)(3) 得證

$$\begin{aligned}(f(T))^* &= (c_n T^{\circ n} + \cdots + c_1 T + c_0 \mathrm{id}_V)^* = \overline{c_n}\,(T^{\circ n})^* + \cdots + \overline{c_1}\,T^* + \overline{c_0}\,\mathrm{id}_V^* \\ &= \overline{c_n}\,(T^*)^{\circ n} + \cdots + \overline{c_1}\,T^* + \overline{c_0}\,\mathrm{id}_V = \overline{f}(T^*).\end{aligned}$$

□

由 Proposition 5.3.10 以及 Lemma 5.4.1, 我們馬上可以得到 $T$ 和 $T^*$ 的 characteristic polynomials $\chi_T(x)$ 和 $\chi_{T^*}(x)$ 之間的關係, 以及它們的 minimal polynomials $\mu_T(x)$ 和 $\mu_{T^*}(x)$ 之間的關係.

**Lemma 5.4.2.** 若 $T: V \to V$ 為 *linear operator,* 則

$$\chi_{T^*}(x) = \overline{\chi_T}(x) \quad \textit{and} \quad \mu_{T^*}(x) = \overline{\mu_T}(x).$$

**Proof.** 由於 characteristic polynomial 與 ordered basis 的選取無關, 所以我們特別選取 $V$ 的一組 orthonormal basis 所組成的 ordered basis $\beta$. 由 Proposition 5.3.10 知 $[T^*]_\beta = ([T]_\beta)^*$, 故得 $\chi_{T^*}(x) = \overline{\chi_T}(x)$.