現由

$$T\circ T^* = (T_1+T_2)\circ(T_1-T_2) = {T_1}^{\circ 2} - T_1\circ T_2 + T_2\circ T_1 - {T_2}^{\circ 2},$$
$$T^*\circ T = (T_1-T_2)\circ(T_1+T_2) = {T_1}^{\circ 2} + T_1\circ T_2 - T_2\circ T_1 - {T_2}^{\circ 2}.$$

得 $T\circ T^* = T^*\circ T$ 若且唯若 $T_1\circ T_2 = T_2\circ T_1$. □

和 normal operator 的情況一樣, 我們來看看如何可得到更多的 self-adjoint operator.

Lemma 5.5.9. 假設 $T: V\to V$, $T_1: V\to V$ 為 *self-adjoint operator.*

(1) $T+T_1$ 亦為 *self-adjoint operator.*

(2) 若 W 為 T*-invariant,* 則 $T|_W$ 亦為 *self-adjoint operator.*

(3) 若 T 為 *isomorphism,* 則 T^{-1} 亦為 *self-adjoint operator.*

(4) 對任意 $f(x)\in\mathbb{R}[x]$, $f(T)$ 亦為 *self-adjoint operator.*

Proof. (1) 因 $(T+T_1)^* = T^*+T_1^* = T+T_1$, 故 $T+T_1$ 為 self-adjoint operator.

(2) 由 $T=T^*$ 得 W 亦為 T^*-invariant, 故由 Corollary 5.4.4, 得 $(T|_W)^* = T^*|_W = T|_W$.

(3) 由 Proposition 5.3.7(3) 知 $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1} = T^{-1}$, 故 T^{-1} 為 self-adjoint.

(4) 由 Lemma 5.4.1 知 $(f(T))^* = \overline{f}(T^*) = \overline{f}(T)$. 但 $f(x)\in\mathbb{R}[x]$, 故有 $\overline{f}(x) = f(x)$, 得證 $f(T)$ 為 self-adjoint operator. □

Question 5.23. 若 $T: V\to V$, $T_1: V\to V$ 為 *normal operator,* 是否 $T+T_1$ 亦為 *normal operator?*

Question 5.24. 假設 $T: V\to V$ 為 *self-adjoint operator* 且 $f(x)\in F[x]$. 試證明 $f(T)$ 為 *self-adjoint operator* 若且唯若 $\mu_T(x)\mid f(x)-\overline{f}(x)$.

關於 self-adjoint operator 我們有以下重要的性質.

Lemma 5.5.10. 假設 $T: V\to V$ 為 *self-adjoint operator.* 若 λ 為 T 的 *eigenvalue,* 則 $\lambda\in\mathbb{R}$.

Proof. 因 T 為 normal, 由 Corollary 5.5.5(1) 知, 若 $\mathbf{v}\in V$ 為相對於 λ 的 T 的 eigenvector, 即 $T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$, 則 $\mathbf{v}$ 亦為相對於 $\overline{\lambda}$ 的 T^* 的 eigenvector, 即 $T^*(\mathbf{v}) = \overline{\lambda}\mathbf{v}$. 但由 T 為 self-adjoint 之假設, 我們有 $T(\mathbf{v}) = T^*(\mathbf{v})$, 亦即 $\lambda\mathbf{v} = \overline{\lambda}\mathbf{v}$. 故由 $\mathbf{v}\neq\mathbf{O}_V$, 得知 $\lambda = \overline{\lambda}$, 即 $\lambda\in\mathbb{R}$. □

至於 skew-adjoint operator, 我們也有和 self-adjoint 相類似的性質. 以下因證明和 Lemma 5.5.9 相似, 我們就不再證明.

Lemma 5.5.11. 假設 $T: V\to V$, $T_1: V\to V$ 為 *skew-adjoint operator.*

(1) $T+T_1$ 亦為 *skew-adjoint operator.*

(2) 若 W 為 T*-invariant,* 則 $T|_W$ 亦為 *skew-adjoint operator.*

(3) 若 T 為 *isomorphism,* 則 T^{-1} 亦為 *skew-adjoint operator.*

Question 5.25. 假設 $T: V \to V$ 為 *skew-adjoint operator.* 是否對任意 $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, $f(T)$ 亦為 *skew-adjoint operator?*

關於 skew-adjoint operator 我們有以下重要的性質.

Lemma 5.5.12. 假設 $T: V \to V$ 為 *skew-adjoint operator.* 若 λ 為 T 的 *eigenvalue,* 則 λ 的 *real part (實部)* 為 0.

Proof. 因 T 為 normal, 由 Corollary 5.5.5(1) 知, 若 $\mathbf{v} \in V$ 為相對於 λ 的 T 的 eigenvector, 即 $T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$, 則 $\mathbf{v}$ 亦為相對於 $\overline{\lambda}$ 的 T^* 的 eigenvector, 即 $T^*(\mathbf{v}) = \overline{\lambda}\mathbf{v}$. 但由 T 為 skew-adjoint 之假設, 我們有 $T^*(\mathbf{v}) = -T(\mathbf{v})$, 亦即 $-\lambda\mathbf{v} = \overline{\lambda}\mathbf{v}$. 故由 $\mathbf{v} \neq \mathbf{O}_V$, 得知 $\lambda + \overline{\lambda} = 0$, 即 λ 之實部為 0. □

上面所提有關 normal operator, self-adjoint operator 以及 skew-adjoint operator 的性質都可以套用在相對應的 normal matrix, self-adjoint matrix 以及 skew-adjoint matrix. 例如任意的 $n \times n$ matrix 都可以唯一寫成一個 self-adjoint matrix 和一個 skew-adjoint matrix 之和. 這些請大家自行轉換, 我們就不再贅述了.

5.6. The Spectral Theorem

這一節中我們將 over $\mathbb{C}$ 和 over $\mathbb{R}$ 的情況分開討論, 進而推導出 normal operator 的 spectral theorem.

5.6.1. Normal Operator over $\mathbb{C}$. 首先我們考慮 V 為 finite dimensional inner product space over $\mathbb{C}$ 且 $T: V \to V$ 為 normal operator 的情形. 此時因 $\mathbb{C}$ 為 algebraically closed, 我們可以將 T 的 minimal polynomial 完全分解. 亦即存在 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ 以及 $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$ 使得 $\mu_T(x) = (x-\lambda_1)^{m_1} \cdots (x-\lambda_k)^{m_k}$. 依此, 利用 Proposition 5.5.6 我們可以得到 over $\mathbb{C}$ 的 normal operator 的 spectral theorem.

Theorem 5.6.1 (Spectral Theorem: complex case)**.** 假設 V 為 *finite dimensional inner product space over* $\mathbb{C}$ 且 $T: V \to V$ 為 *linear operator.* 則 T 為 *unitary diagonalizable* 若且唯若 T 為 *normal operator.*

Proof. 由 Proposition 5.4.10 我們知道若 T 為 unitary diagonalizable 則 T 為 normal operator.

現假設 T 為 normal operator 由 Proposition 5.5.6, 得 $\mu_T(x) = (x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_k)$, 其中 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ 為相異, 且 $V = W_1 \boxplus \cdots \boxplus W_k$, 其中 $W_i = \mathrm{Ker}((T - \lambda_i \mathrm{id}_V)) = E_{\lambda_i}$ 為 λ_i 的 eigenspace, 得

$$V = E_{\lambda_1} \boxplus \cdots \boxplus E_{\lambda_k},$$

故由 Proposition 5.4.10 知 T 為 unitary diagonalizable. □

考慮 $\mathbb{C}^n$ 上的 standard inner product, 利用 Theorem 5.6.1, 我們馬上得到矩陣形式的 spectral theorem.

Corollary 5.6.2. 假設 $A \in M_n(\mathbb{C})$. 則 A 為 *normal matrix* (即 $AA^* = A^*A$) 若且唯若存在 *unitary matrix* $P \in M_n(\mathbb{C})$ (即 $P^{-1} = P^*$) 使得 P^*AP 為 *diagonal matrix.*

我們馬上得到有關 self-adjoint operator 以及 skew-adjoint operator 的 spectral theorem.

Corollary 5.6.3. 假設 V 為 *finite dimensional inner product space over* $\mathbb{C}$ 且 $T : V \to V$ 為 *linear operator.* 我們有以下性質.

(1) T 為 *self-adjoint operator* 若且唯若 T 為 *unitary diagonalizable* 且 T 的 *eigenvalue* 皆為實數.

(2) T 為 *skew-adjoint operator* 若且唯若 T 為 *unitary diagonalizable* 且 T 的 *eigenvalue* 的實部為 0.

Proof. 利用 Theorem 5.6.1, Lemma 5.5.10 我們得若 T 為 self-adjoint operator 則 T 為 unitary diagonalizable 且 T 的 eigenvalue 皆為實數. 反之若 T 為 unitary diagonalizable 且 T 的 eigenvalue 皆為實數, 則由 Proposition 5.4.10 知存在 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ 以及 orthogonal projections π_i 使得 $T = \lambda_1\pi_1 + \cdots + \lambda_k\pi_k$. 此時 $T^* = \lambda_1\pi_1^* + \cdots + \lambda_k\pi_k^*$ 且因 $\pi_i^* = \pi_i$, 得證 $T^* = T$. 同理可證得 skew-adjoint 的情形, 在此略過. $\square$

Question 5.26. 若 $T : V \to V$ 為 *self-adjoint,* 則 $\chi_T(x), \mu_T(x)$ 為何種形式? 若 $T : V \to V$ 為 *skew-adjoint,* 則 $\chi_T(x), \mu_T(x)$ 為何種形式?

同樣的我們也有 self-adjoint matrix 和 skew-adjoint 相對應的結果.

Corollary 5.6.4. 假設 $A \in M_n(\mathbb{C})$. 我們有以下性質.

(1) $A^* = A$ 若且唯若存在 *unitary matrix* $P \in M_n(\mathbb{C})$ 使得

$$P^*AP = \begin{pmatrix} \gamma_1 & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & \gamma_n \end{pmatrix},$$

其中 $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \mathbb{R}$.

(2) $A^* = -A$ 若且唯若存在 *unitary matrix* $P \in M_n(\mathbb{C})$ 使得

$$P^*AP = \begin{pmatrix} \gamma_1 & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & \gamma_n \end{pmatrix},$$

其中 $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ 的實部為 0.

注意 Corollary 5.6.4 中 $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ 不必相異. 另外在 skew-adjoint 的情形 γ_i 的實部為 0 一般稱為 purely imaginary number (純虛數), 不過這裡 γ_i 有可能為 0.