5.6.2. Normal operator over $\mathbb{R}$. 在 over $\mathbb{C}$ 的情況我們用到 $\mathbb{C}$ 為 algebraically closed, 由於 $\mathbb{R}[x]$ 中的 irreducible polynomial, 有可能是二次的, 因此我們需要用其他的方法處理 over $\mathbb{R}$ 的情形. 假設 V 為 over $\mathbb{R}$ 的 finite dimensional inner product space, 首先注意在此情形 $T:V\to V$ 為 normal operator 並不一定為 unitary (orthogonal) diagonalizable. 事實上由 Proposition 5.4.10 我們知道若 T 為 unitary diagonalizable, 則存在 $\lambda_1,\dots\lambda_k\in\mathbb{R}$ 且 $\pi_1,\dots,\pi_k$ 為 orthogonal projection 使得 $T=\lambda_1\pi_1+\cdots+\lambda_k\pi_k$. 此時因

$$T^*=\overline{\lambda_1}\pi_1^*+\cdots+\overline{\lambda_k}\pi_k^*=\lambda_1\pi_1+\cdots+\lambda_k\pi_k=T,$$

得知 T 必為 self-adjoint operator. 事實上我們有以下之結果.

Theorem 5.6.5. 假設 V 為 *finite dimensional inner product space over* $\mathbb{R}$ 且 $T:V\to V$ 為 *linear operator,* 則 T 為 *unitary diagonalizable* 若且唯若 T 為 *self-adjoint operator.*

Proof. 前面已知若 T 為 unitary diagonalizable 則 T 為 self-adjoint operator. 現假設 T 為 self-adjoint operator, 因 T 為 normal, 故由 Proposition 5.5.6 知 $\mu_T(x)=p_1(x)\cdots p_k(x)$, 其中 $p_1(x),\dots,p_k(x)$ 為相異的 monic irreducible polynomial in $\mathbb{R}[x]$, 且 $V=W_1\boxplus\cdots\boxplus W_k$, 其中 $W_i=\operatorname{Ker}(p_i(T))$. 我們欲說明對所有 $i=1,\dots,k$, $p_i(x)$ 皆為一次的 polynomial, 即存在 $\lambda_i\in\mathbb{R}$ 使得 $p_i(x)=x-\lambda_i$. 此即得證 $W_i=E_{\lambda_i}$ 為 λ_i 的 eigenspace, 即 $V=E_{\lambda_1}\boxplus\cdots\boxplus E_{\lambda_k}$, 故由 Proposition 5.4.10 知 T 為 unitary diagonalizable.

現任取 V 的一組 orthonormal basis 所組成的 ordered basis $\beta=(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)$. 由 $T=T^*$ 以及 Proposition 5.3.10 知 $[T]_\beta^*=[T^*]_\beta=[T]_\beta$, 亦即 $[T]_\beta$ 為 self-adjoint matrix in $M_n(\mathbb{R})$. 當然 $[T]_\beta$ 看成 $M_n(\mathbb{C})$ 的 matrix 亦為 self-adjoint, 故套用 Corollary 5.6.4(1), 我們知存在 $\gamma_1,\dots,\gamma_n\in\mathbb{R}$ 使得

$$\chi_{[T]_\beta}(x)=\chi_T(x)=(x-\gamma_1)\cdots(x-\gamma_n).$$

亦即 $\chi_T(x)$ 可以完全分解成 $\mathbb{R}[x]$ 中的一次多項式的乘積, 故由 $\mu_T(x)\mid\chi_T(x)$, 得證存在 $\lambda_i\in\mathbb{R}$ 使得 $p_i(x)=x-\lambda_i$. $\square$

我們馬上得到有關於 symmetric matrix 相對應的性質.

Corollary 5.6.6. 假設 $A\in M_n(\mathbb{R})$, 則 $A^{\mathrm{t}}=A$ 若且唯若存在 *orthogonal matrix* $P\in M_n(\mathbb{R})$ (即 $P^{-1}=P^{\mathrm{t}}$) 使得 $P^{\mathrm{t}}AP$ 為 $M_n(\mathbb{R})$ 中的 *diagonal matrix.*

接下來我們探討 over $\mathbb{R}$ 的 skew-adjoint operator.

Lemma 5.6.7. 假設 V 為 *finite dimensional inner product space over* $\mathbb{R}$ 且 $T:V\to V$ 為 *linear operator,* 則 T 為 *skew-adjoint* 若且唯若對任意 $\mathbf{v}\in V$ 皆有 $\langle T(\mathbf{v}),\mathbf{v}\rangle=0.$

Proof. 首先強調 over $\mathbb{R}$ 的 inner product 有對稱性, 即 $\langle\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle=\langle\mathbf{w},\mathbf{v}\rangle,\forall\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$. 現假設 $T^*=-T$, 則對任意 $\mathbf{v}\in V$ 皆有

$$\langle T(\mathbf{v}),\mathbf{v}\rangle=\langle\mathbf{v},T^*(\mathbf{v})\rangle=\langle\mathbf{v},-T(\mathbf{v})\rangle=-\langle T(\mathbf{v}),\mathbf{v}\rangle,$$

得證 $\langle T(\mathbf{v}),\mathbf{v}\rangle=0.$

反之, 若對任意 $\mathbf{v}\in V$ 皆有 $\langle T(\mathbf{v}),\mathbf{v}\rangle=0$, 則對任意 $\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$, 我們有

$$0=\langle T(\mathbf{v}+\mathbf{w}),\mathbf{v}+\mathbf{w}\rangle=\langle T(\mathbf{v}),\mathbf{w}\rangle+\langle T(\mathbf{w}),\mathbf{v}\rangle.$$

得知對任意 $\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$ 皆有

$$\langle T(\mathbf{v}),\mathbf{w}\rangle=-\langle T(\mathbf{w}),\mathbf{v}\rangle=\langle \mathbf{v},-T(\mathbf{w})\rangle,$$

利用 adjoint 的唯一性 (Theorem 5.3.5) 得證 $T^*=-T$. □

當 T 為 skew-adjoint, 假設 $x-\lambda\in\mathbb{R}[x]$ 是 $\mu_T(x)$ 的一次因式, 即 $\lambda\in\mathbb{R}$ 為 T 的一個 eigenvalue. 令 $\mathbf{v}\in V$ 為相對於 λ 的 eigenvector, 即 $T(\mathbf{v})=\lambda\mathbf{v}$. 由 Lemma 5.6.7 知 $0=\langle T(\mathbf{v}),\mathbf{v}\rangle=\langle\lambda\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle=\lambda\langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle$. 由於 $\mathbf{v}\neq\mathbf{O}_V$, 得知 $\lambda=0$. 也就是說 x 是 $\mu_T(x)$ 唯一可能的實係數一次因式. 事實上我們有以下結果.

Corollary 5.6.8. 假設 V 為 *finite dimensional inner product space over* $\mathbb{R}$ 且 $T:V\to V$ 為 *nonzero skew-adjoint operator.* 若 T 為 *isomorphism,* 則存在 $b_1,\ldots,b_k\in\mathbb{R}$ 皆相異且不為 0 使得 $\mu_T(x)=(x^2+b_1^2)\cdots(x^2+b_k^2)$. 若 T 不是 *isomorphism,* 則存在 $b_1,\ldots,b_k\in\mathbb{R}$ 皆相異且不為 0 使得 $\mu_T(x)=x(x^2+b_1^2)\cdots(x^2+b_k^2)$.

Proof. 我們已知 $\mu_T(x)$ 在 $\mathbb{R}[x]$ 中可能的一次因式為 x. 現在考慮 $\mu_T(x)$ 在 $\mathbb{R}[x]$ 中可能的二次質因式. 假設 $x^2+rx+s\in\mathbb{R}[x]$, 為 $\mu_T(x)$ 的一個二次質因式. 則由 cyclic decomposition theorem 知存在 $\mathbf{v}\in V$ 滿足 $\mu_{\mathbf{v}}(x)=x^2+rx+s$. 由 Lemma 5.6.7, 我們知 $\langle T^{\circ 2}(\mathbf{v}),T(\mathbf{v})\rangle=0$. 又 $T^{\circ 2}(\mathbf{v})=-rT(\mathbf{v})-s\mathbf{v}$, 故得

$$0=\langle -rT(\mathbf{v})-s\mathbf{v},T(\mathbf{v})\rangle=-r\langle T(\mathbf{v}),T(\mathbf{v})\rangle-s\langle\mathbf{v},T(\mathbf{v})\rangle=-r\langle T(\mathbf{v}),T(\mathbf{v})\rangle.$$

然而 $T(\mathbf{v})\neq 0$ (否則 $\mu_{\mathbf{v}}(x)\mid x$), 故得 $r=0$. 而又若 $s\leq 0$, 則 x^2+s 不為 irreducible polynomial, 故知 $s>0$. 得知 $\mu_T(x)$ 唯一可能的二次質因式為 x^2+b^2 其中 $b\neq 0$ 這樣的形式.

現若 T 為 isomorphism, 即 $\mathrm{Ker}(T)=\{\mathbf{O}_V\}$, 得知 x 不可能為 $\mu_T(x)$ 的因式. 故 $\mu_T(x)$ 只有二次的質因式, 又由 Proposition 5.5.6 知 $\mu_T(x)$ 的質因式不會重複出現, 證得存在 $b_1,\ldots,b_k\in\mathbb{R}$ 皆相異且不為 0 使得 $\mu_T(x)=(x^2+b_1^2)\cdots(x^2+b_k^2)$. 而若 T 不是 isomorphism, 即 $\dim(\mathrm{Ker}(T))>0$, 得知 x 必為 $\mu_T(x)$ 的因式, 證得存在 $b_1,\ldots,b_k\in\mathbb{R}$ 皆相異且不為 0 使得 $\mu_T(x)=x(x^2+b_1^2)\cdots(x^2+b_k^2)$. □

若 T 為 skew-adjoint operator 且 $p(x)$ 是 $\mu_T(x)$ 的質因式, 令 $W=\mathrm{Ker}(p(T))$ 由 primary decomposition theorem, 我們需要了解 $T|_W$. 當 $p(x)=x$ 時, $W=\mathrm{Ker}(T)$ 此時 $T|_W$ 為 zero mapping. 故僅要考慮 $p(x)=x^2+b^2$, $b\neq 0$ 的情形. 此時 $W=\mathrm{Ker}(T^{\circ 2}+b^2\mathrm{id}_V)$, 為 T-invariant, 故由 Lemma 5.5.11(2), $T|_W$ 亦為 skew-adjoint. 又此時 $\mu_{T|_W}(x)=x^2+b^2$, 所以我們僅要考慮以下之情形.

Lemma 5.6.9. 假設 V 為 *finite dimensional inner product space over* $\mathbb{R}$ 且 $T:V\to V$ 為 *skew-adjoint operator.* 假設 $\mu_T(x)=x^2+b^2$ 其中 $b\neq 0$, 則存在 V 的一組 *ordered* *orthonormal basis* β 使得 $[T]_\beta$ 為以下的 *block diagonal matrix*

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} M & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & M \end{pmatrix}, \text{ 其中 } M = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.4}$$

Proof. 任取 $\mathbf{v} \in V$ 且 $\|\mathbf{v}\| = 1$. 因 $T^{\circ 2} + b^2 \mathrm{id}_V = \mathbf{O}$, 我們有 $T(T(\mathbf{v})) = -b^2\mathbf{v}$. 考慮 T-cyclic subspace $W = \mathrm{Span}(\{\mathbf{v}, T(\mathbf{v})\})$. 因

$$\|T(\mathbf{v})\|^2 = \langle T(\mathbf{v}), T(\mathbf{v})\rangle = \langle \mathbf{v}, T^*(T(\mathbf{v}))\rangle = \langle \mathbf{v}, -T(T(\mathbf{v}))\rangle = \langle \mathbf{v}, b^2\mathbf{v}\rangle = b^2.$$

令 $\mathbf{v}' = \frac{1}{b}T(\mathbf{v})$. 由 Lemma 5.6.7 知 $\langle \mathbf{v}', \mathbf{v}\rangle = \frac{1}{b}\langle T(\mathbf{v}), \mathbf{v}\rangle = 0$. 故 $\beta_1 = (\mathbf{v}, \mathbf{v}')$ 為 W 的一個 ordered orthonormal basis. 因

$$T(\mathbf{v}) = b\mathbf{v}', T(\mathbf{v}') = \frac{1}{b}T(T(\mathbf{v})) = -b\mathbf{v},$$

我們得

$$[T|_W]_{\beta_1} = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}.$$

現考慮 $V = W \boxplus W^\perp$. 因 W 為 T-invariant, 由 Lemma 5.4.3 知 $W^\perp$ 為 T^*-invariant. 但 $T^* = -T$, 故知 $W^\perp$ 亦為 T-invariant. 再由 Lemma 5.5.11 知 $T|_{W^\perp}$ 亦為 skew-adjoint. 現因 $\mu_{T|_{W^\perp}}(x) \mid \mu_T(x)$, 得 $\mu_{T|_{W^\perp}}(x) = 1$ 或 $\mu_{T|_{W^\perp}}(x) = x^2 + b^2$. 若 $\mu_{T|_{W^\perp}}(x) = 1$, 表示 $W^\perp = \{\mathbf{O}_V\}$, 亦即表示 $V = W$, 得證本定理. 若 $\mu_{T|_{W^\perp}}(x) = x^2 + b^2$, 則我們可套用數學歸納法找到 $W^\perp$ 的一組 ordered orthonormal basis β_2 使得 $[T|_{W^\perp}]_{\beta_2}$ 為如 (5.4) 的 block diagonal matrix. 此時將 β_1, β_2 合組成 V 的一組 ordered orthonormal basis β, 則 $[T]_\beta$ 即為所求. □

Example 5.6.10. 假設 V 為 finite dimensional inner product space over $\mathbb{R}$ 且 $T : V \to V$ 為 skew-adjoint operator. 若 $\chi_T(x) = (x^2+2)^2$, 則由 Proposition 5.5.6 知 $\mu_T(x) = x^2 + 2$. 故由 Lemma 5.6.9 知存在 V 的一組 ordered orthonormal basis β 使得

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Question 5.27. 假設 V 為 *finite dimensional inner product space over* $\mathbb{R}$ 且 $T : V \to V$ 為 *skew-adjoint operator.* 若已知 $\mu_T(x) = x^2 + b^2$ 其中 $b \neq 0$, 試說明 $\dim(V)$ 必為偶數.

對於一般的 over $\mathbb{R}$ 的 skew-adjoint operator $T : V \to V$, 由 Proposition 5.5.6 知 $V = W_1 \boxplus \cdots \boxplus W_k$, 其中 $W_i = \mathrm{Ker}(T)$ 或 $W_i = \mathrm{Ker}(T^{\circ 2} + b^2\mathrm{id}_V)$. 若 $W_i = \mathrm{Ker}(T)$, 因 $T|_{W_i}$ 為 zero mapping, 任取 W_i 的一組 ordered orthonormal basis β_i, 皆會使得 $[T|_{W_i}]_{\beta_i}$ 為 zero matrix. 而若 $W_i = \mathrm{Ker}(T^{\circ 2} + b^2\mathrm{id}_V)$, 由 Lemma 5.6.9 我們可以找到 W_i 的一組 ordered orthonormal basis β_i, 使得 $[T|_{W_i}]_{\beta_i}$ 為如 (5.4) 的 block diagonal matrix. 由於這些 $\beta_1, \ldots, \beta_k$ 可以組成 V 的一組 orthonormal ordered basis, 我們有以下之結果.

Theorem 5.6.11. 假設 V 為 *finite dimensional inner product space over* $\mathbb{R}$. 則 $T:V\to V$ 為 *skew-adjoint operator* 若且唯若存在 V 的一組 *ordered orthonormal basis* β 使得 $[T]_\beta$ 為以下的 *block diagonal matrix*

$$[T]_\beta=\begin{pmatrix} M_1 & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & M_l \end{pmatrix},\ \text{其中}\ M_i=\begin{pmatrix} 0 & -b_i \\ b_i & 0 \end{pmatrix}, b_i\neq 0\ \text{或}\ M_i=0. \tag{5.5}$$

Proof. 若 $T:V\to V$ 為 skew-adjoint operator 由前面的說明我們知存在 V 的一組 ordered orthonormal basis β 使得 $[T]_\beta$ 為如 (5.5) 的 block diagonal matrix.

反之, 若存在 V 的一組 ordered orthonormal basis β 使得 $[T]_\beta$ 為如 (5.5) 的 block diagonal matrix, 則由 Proposition 5.3.10 知

$$[T^*]_\beta=[T]_\beta^*=\begin{pmatrix} M_1^* & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & M_l^* \end{pmatrix},$$

其中 $M_i^*=\begin{pmatrix} 0 & b_i \\ -b_i & 0 \end{pmatrix}=-M_i$ 或 $M_i^*=0=-M_i$. 換言之, $[T^*]_\beta=-[T]_\beta=[-T]_\beta$, 得證 $T^*=-T$. □

由 Theorem 5.6.11, 我們可得到有關於 skew-adjoint matrix 的性質. 也就是說 $A\in M_n(\mathbb{R})$ 滿足 $A^{\mathrm{t}}=-A$ 若且唯若存在 orthogonal matrix $P\in M_n(\mathbb{R})$ 使得 $P^{\mathrm{t}}AP$ 為如 (5.5) 的 block diagonal matrix.

Question 5.28. 假設 $A\in M_n(\mathbb{R})$ 且 $A^{\mathrm{t}}=-A$. 若已知 $\chi_A(x)=x^3(x^2+1)(x^2+2)^2$, 試寫下如 *(5.5)* 的 *block diagonal matrix* B 使得 $A\sim B$. 試寫下 A 的 *rational form* (或 *classical form*). 為何 A 的 *rational form* 不是 *skew-symmetric?*

最後我們來探討一般 over $\mathbb{R}$ 的 normal operator. 若 $T:V\to V$ 為 normal operator, 則由 Proposition 5.5.6 我們有 $V=W_1\boxplus\cdots\boxplus W_k$, 其中 $W_i=\mathrm{Ker}(p_i(T))$ 且 $p_i(x)\in\mathbb{R}[x]$ 為 monic irreducible polynomial. 我們知 $\mathbb{R}[x]$ 中的 monic irreducible polynomial 僅有以下兩種形式, 即 $x-\lambda, \lambda\in\mathbb{R}$, 以及 $(x-a)^2+b^2$, $a,b\in\mathbb{R}$ 且 $b\neq 0$. 若 $p_i(x)=x-\lambda$, 則 $W_i=\mathrm{Ker}(p_i(T))$ 為 eigenvalue 為 λ 的 eigenspace. 所以我們僅要探討 $p_i(x)=(x-a)^2+b^2$ 的情形. 注意由於 $W_i^\perp=\boxplus_{j\neq i}W_j$ 且 W_j 皆為 T-invariant, 得 $W_i^\perp$ 亦為 T-invariant. 故由 Lemma 5.5.2(2) 知 $T|_{W_i}$ 亦為 normal operator. 又此時 $\mu_{T|_{W_i}}(x)=(x-a)^2+b^2$, 所以我們僅要考慮以下之情形.

Lemma 5.6.12. 假設 V 為 *finite dimensional inner product space over* $\mathbb{R}$, $T:V\to V$ 為 *normal operator* 且 $\mu_T(x)=(x-a)^2+b^2$ 其中 $b\neq 0$. 令 $T=T_1+T_2$, 其中 $T_1:V\to V$ 為 *self-adjoint operator*, $T_2:V\to V$ 為 *skew-adjoint operator.* 則

(1) T_2 為 *isomorphism.*

(2) $\mu_{T_1}(x)=x-a.$

(3) $\mu_{T_2}(x)=x^2+b^2.$