Proof. Proposition 5.5.8 告訴我們 T_1, T_2 必存在且唯一. 又 T 為 normal 故 $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$.

(1) 我們只要證明 $\mathrm{Ker}(T_2) = \{\mathbf{O}_V\}$, 便可得 T_2 為 isomorphism. 現假設 $\mathrm{Ker}(T_2) \neq \{\mathbf{O}_V\}$ 且令 $W = \mathrm{Ker}(T_2)$. 由 $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$ 知對任意 $\mathbf{w} \in W$, $T_2(T_1(\mathbf{w})) = T_1(T_2(\mathbf{w})) = T_1(\mathbf{O}_V) = \mathbf{O}_V$. 亦即 $T_1(\mathbf{w}) \in \mathrm{Ker}(T_2) = W$, 得證 W 為 T_1-invariant. 又對任意 $\mathbf{w} \in W$, 皆有

$$T(\mathbf{w}) = T_1(\mathbf{w}) + T_2(\mathbf{w}) = T_1(\mathbf{w}), \text{ 即 } T|_W = T_1|_W.$$

由 Lemma 5.5.9 知 $T_1|_W$ 為 self-adjoint, 故 $T|_W$ 為 self-adjoint. 然而 $\mu_{T|_W}(x) \mid \mu_T(x)$ 且 $\mu_{T|_W}(x) \neq 1$ (否則 $W = \{\mathbf{O}_V\}$), 由 $(x-a)^2 + b^2$ $(b \neq 0)$ 在 $\mathbb{R}[x]$ 中為 irreducible 得 $\mu_{T|_W}(x) = \mu_T(x) = (x-a)^2 + b^2$. 另一方面由 $T|_W$ 為 self-adjoint, Theorem 5.6.5 告訴我們 $T|_W$ 為 unitary-diagonalizable, 此即表示 $\mu_{T|_W}(x)$ 可以分解成 $\mathbb{R}[x]$ 中一次多項式的乘積. 由此矛盾得證 $W = \mathrm{Ker}(T_2) = \{\mathbf{O}_V\}$.

(2) 由 $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$ 得

$$T^{\circ 2} = (T_1 + T_2) \circ (T_1 + T_2) = {T_1}^{\circ 2} + 2T_1 \circ T_2 + {T_2}^{\circ 2}.$$

同理由 $T^* = T_1^* + T_2^* = T_1 - T_2$, 得 $(T^*)^{\circ 2} = {T_1}^{\circ 2} - 2T_1 \circ T_2 + {T_2}^{\circ 2}$, 與上式相減得

$$T^{\circ 2} - (T^*)^{\circ 2} = 4T_1 \circ T_2. \tag{5.6}$$

另一方面, 由 Lemma 5.4.2 知 $\mu_{T^*}(x) = \overline{\mu_T}(x) = (x-a)^2 + b^2$, 故知

$$T^{\circ 2} = 2aT - (a^2 + b^2)\mathrm{id}_V, \quad (T^*)^{\circ 2} = 2aT^* - (a^2 + b^2)\mathrm{id}_V.$$

相減得

$$T^{\circ 2} - (T^*)^{\circ 2} = 2a(T - T^*) = 4aT_2. \tag{5.7}$$

由等式 (5.6), (5.7) 得 $4T_1 \circ T_2 = 4aT_2$, 由 (1) 知 T_2^{-1} 存在, 故將前面等式兩邊與 T_2^{-1} 合成得 $T_1 = a\,\mathrm{id}_V$. 即 $T_1 - a\,\mathrm{id}_V = \mathbf{O}$, 證得 $\mu_{T|_1}(x) = x - a$.

(3) 由 (2) 知 $T_2 = T - a\,\mathrm{id}_V$, 故

$${T_2}^{\circ 2} = (T - a\,\mathrm{id}_V)^{\circ 2} = T^{\circ 2} - 2aT + a^2\mathrm{id}_V = (2aT - (a^2 + b^2)\mathrm{id}_V) - 2aT + a^2\mathrm{id}_V = -b^2\mathrm{id}_V,$$

即 ${T_2}^{\circ 2} + b^2\mathrm{id}_V = \mathbf{O}$. 由 $b \neq 0$, $x^2 + b^2$ 在 $\mathbb{R}[x]$ 中為 irreducible, 得證 $\mu_{T_2}(x) = x^2 + b^2$. □

在 Lemma 5.6.12 中, 因 T_2 為 skew-adjoint 且 $\mu_{T_2}(x) = x^2 + b^2$, 由 Lemma 5.6.9 知存在 V 的一組 ordered orthonormal basis β 使得 $[T_2]_\beta$ 為如 (5.4) 的 block diagonal matrix. 而 $T_1 = a\,\mathrm{id}_V$, 故若 $\dim(V) = n$, 則 $[T_1]_\beta = aI_n$. 故由 $[T]_\beta = [T_1 + T_2]_\beta = [T_1]_\beta + [T_2]_\beta$ 我們有以下之結果.

Corollary 5.6.13. 假設 V 為 *finite dimensional inner product space over* $\mathbb{R}$, $T : V \to V$ 為 *normal operator.* 若 $\mu_T(x) = (x-a)^2 + b^2$ 其中 $b \neq 0$ 則存在 V 的一組 *ordered orthonormal basis* β 使得 $[T]_\beta$ 為以下的 *block diagonal matrix*

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} M & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & M \end{pmatrix}, \text{ 其中 } M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}. \tag{5.8}$$

Example 5.6.14. 假設 V 為 finite dimensional inner product space over $\mathbb{R}$ 且 $T:V\to V$ 為 normal operator. 若 $\chi_T(x)=(x^2+4x+6)^2$, 則由 Proposition 5.5.6 知 $\mu_T(x)=x^2+4x+6=(x+2)^2+2$. 故由 Corollary 5.6.13 知存在 V 的一組 ordered orthonormal basis β 使得

$$[T]_\beta=\begin{pmatrix} -2 & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}.$$

對於一般的 over $\mathbb{R}$ 的 normal operator $T:V\to V$, 由 Proposition 5.5.6 知 $\mu_T(x)=p_1(x)\cdots p_k(x)q_1(x)\cdots q_l(x)$, 其中 $p_1(x),\dots,p_k(x)\in\mathbb{R}[x]$ 為相異的 monic irreducible polynomial of degree 2, $q_1(x),\dots,q_l(x)\in\mathbb{R}[x]$ 為相異的 monic polynomial of degree 1. 令 $W_i=\operatorname{Ker}(p_i(T))$, $E_j=\operatorname{Ker}(q_j(T))$, 則

$$V=W_1\boxplus\cdots\boxplus W_k\boxplus E_1\boxplus\cdots\boxplus E_l.$$

由於 $E_j=\operatorname{Ker}(q_j(T))$ 為 T 的一個 eigenspace, 任取 E_j 的一組 ordered orthonormal basis β'_j, 皆會使得 $[T|_{E_j}]_{\beta'_j}$ 為 diagonal matrix. 而因 $p_i(x)$ 為 $(x-a)^2+b^2$ 的形式且 $T|_{W_j}$ 仍為 normal, 又 $\mu_{T|_{W_i}}(x)=p_i(x)$, 由 Corollary 5.6.13 我們可以找到 W_i 的一組 orthonormal ordered basis β_i, 使得 $[T|_{W_i}]_{\beta_i}$ 為如 (5.8) 的 block diagonal matrix. 由於這些 $\beta_1,\dots,\beta_k,\beta'_1,\dots,\beta'_l$ 可以組成 V 的一組 ordered orthonormal basis, 我們有以下有關 over $\mathbb{R}$ 的 spectral theorem.

Theorem 5.6.15 (Spectral Theorem: real case)**.** 假設 V 為 *finite dimensional inner product space over* $\mathbb{R}$. 則 $T:V\to V$ 為 *normal operator* 若且唯若存在 V 的一組 *ordered orthonormal basis* β 使得 $[T]_\beta$ 為以下的 *block diagonal matrix*

$$[T]_\beta=\begin{pmatrix} M_1 & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & M_l \end{pmatrix}, \text{其中 } M_i=\begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix}, b_i\neq 0 \text{ 或 } M_i=\lambda_i. \tag{5.9}$$

Proof. 若 $T:V\to V$ 為 normal operator 由前面的說明我們知存在 V 的一組 ordered orthonormal basis β 使得 $[T]_\beta$ 為如 (5.9) 的 block diagonal matrix.

反之, 若存在 V 的一組 ordered orthonormal basis β 使得 $[T]_\beta$ 為如 (5.9) 的 block diagonal matrix, 則由 Proposition 5.3.10 知

$$[T^*]_\beta=[T]_\beta^*=\begin{pmatrix} M_1^* & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & M_l^* \end{pmatrix},$$

其中 $M_i^*=\begin{pmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{pmatrix}$ 或 $M_i^*=\lambda_i=M_i$. 由於 $M_iM_i^*=M_i^*M_i$, 可得 $[T]_\beta[T^*]_\beta=[T^*]_\beta[T]_\beta$, 得證 $T\circ T^*=T^*\circ T$. □

由 Theorem 5.6.15, 我們可得到有關於 normal matrix 的性質. 也就是說 $A\in M_n(\mathbb{R})$ 滿足 $A^{\mathrm{t}}A=AA^{\mathrm{t}}$ 若且唯若存在 orthogonal matrix $P\in M_n(\mathbb{R})$ 使得 $P^{\mathrm{t}}AP$ 為如 (5.9) 的 block diagonal matrix.

Question 5.29. 假設 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 且 $A^{\mathrm{t}}A = AA^{\mathrm{t}}$. 若已知

$$\chi_A(x) = (x^2+1)(x^2+4x+6)^2(x+1)^2(x^2-2),$$

試寫下如 *(5.9)* 的 *block diagonal matrix* B 使得 $A \sim B$. 試寫下 A 的 *rational form.* 為何 A 的 *rational form* 不是 *normal?*

最後我們特別做以下的提醒. 一個 linear operator $T : V \to V$ 是否為 diagonalizable, 和 V 是否為 inner product space 無關. 但 T 是否為 unitary diagonalizable 就和 inner product 有關了. 也就是說 V 用不同的 inner product, 不會改變 T 是否為 diagonalizable 的性質, 但有可能改變其是否為 unitary diagonalizable 的性質. 我們有以下的例子.

Example 5.6.16. 在 Example 5.3.11 中我們考慮 $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 定義為

$$T(x_1,x_2,x_3) = (4x_1+x_2+2x_3, 4x_1+4x_2+4x_3, 2x_1+x_2+4x_3).$$

以及 $\mathbb{R}^3$ 上兩個 inner products $\langle\, ,\rangle$ 以及 $\langle\langle\, ,\rangle\rangle$. 簡單的計算我們得 T 的 eigenvalues 為 2 和 8 且其對應的 eigenspaces 分別為 $E_2 = \mathrm{Span}(\{(1,-2,0),(1,0,-1)\})$ 以及 $E_8 = \mathrm{Span}(\{(1,2,1)\})$.

若考慮 $\mathbb{R}^3$ 為 standard inner product space, 此時 $T \neq T^*$ 故 T 不是 self-adjoint operator. 由 Theorem 5.6.5 知 T 在 standard inner product $\langle\, ,\rangle$ 之下不是 unitary diagonalizable. 事實上 $\langle(1,-2,0),(1,2,1)\rangle = -3 \neq 0$, 知 $E_2 \not\subseteq E_8^{\perp}$. 但因 T 仍為 diagonalizable, 亦即 T 的 minimal polynomial $\mu_T(x)$ 可寫成一次 monic polynomial 的乘積 (事實上我們有 $\mu_T(x) = (x-2)(x-8)$). 依此我們可利用 Theorem 5.6.15 得知 T 在 standard inner product 之下不是 normal operator. 事實上由 Example 5.3.11 知此時

$$[T^*\circ T]_\varepsilon = [T^*]_\varepsilon[T]_\varepsilon = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & 22 & 32 \\ 22 & 18 & 22 \\ 32 & 22 & 36 \end{pmatrix},$$

而

$$[T\circ T^*]_\varepsilon = [T]_\varepsilon[T^*]_\varepsilon = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 28 & 17 \\ 28 & 48 & 28 \\ 17 & 28 & 21 \end{pmatrix},$$

考慮 $\mathbb{R}^3$ 為以 $\langle\langle\, ,\rangle\rangle$ 為 inner product 的 inner product space 時, 我們得 $T^* = T$, 亦即 T 為 self-adjoint operator, 故由 Theorem 5.6.5 知 T 在此 inner product 之下為 unitary diagonalizable. 事實上由 $\langle\langle(1,-2,0),(1,2,1)\rangle\rangle = 0$ 以及 $\langle\langle(1,0,-1),(1,2,1)\rangle\rangle = 0$ 得此時 $E_2 \perp E_8$. 利用 Gram-Schmidt's process 找到 E_2 的一組 orthogonal basis, 其過程如下: 令 $\mathbf{v}_1 = (1,-2,0), \mathbf{w}_2 = (1,0,-1)$, 則取

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{w}_2 - \frac{\langle\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_1\rangle\rangle}{\langle\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1\rangle\rangle}\mathbf{v}_1 = (1,0,-1) - \frac{1}{2}(1,-2,0) = (\frac{1}{2},1,-1),$$

可得 $\langle\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\rangle\rangle = 0$, 故 $\{(1,-2,0),(\frac{1}{2},1,-1),(1,2,1)\}$ 為 T 的 eigenvectors 且為 $\mathbb{R}^3$ 在 $\langle\langle\, ,\rangle\rangle$ 之下的一組 orthogonal basis.