大學線性代數再探

李華介

國立台灣師範大學數學系

前言

本講義主要目的是針對大三學生介紹有關線性代數進一步的理論. 主要是著重於一個 linear operator 的結構問題. 先備知識在線性代數方面需了解矩陣的運算, 行列式的性質等. 至於向量空間以及 linear transformation 等基本性質, 在本講義會再次介紹. 另外代數方面需了解 field 的基本性質以及 over 一個 field 的 polynomial ring 的代數結構 (即多項式環的除法原理).

本講義雖然主要以中文撰寫, 不過當涉及定義或專有名詞時, 為免翻譯的困擾將以英文取代. 因此將以中英夾雜較不傳統的方式顯現, 若有不便請見諒.

本講義編寫費時, 編寫完後並未經過嚴謹的校對. 疏漏在所難免, 雖不至於有理論性上嚴重的錯誤, 但讀者仍應注意不宜概括全收. 若發現錯誤, 歡迎提出寶貴的意見.

Chapter 1

Vector Spaces

在本章我們要介紹 linear algebra 所要探討的主要對象 “Vector Space”. 接著我們將探討與 vector space 息息相關的 basis 以及 dimension.

1.1. Definition and Basic Properties

組成 vector space 的元素, 並不一定要是我們很熟悉的向量 (vector). 不過它的元素間需要有如向量一樣的運算性質. 一般向量中有所謂的加法, 所以我們也用 “+” 來表示一個 vector space 中元素的運算. 也就是說要有一個 vector space 首先要有的是一個非空的集合 V (也就是說 V 裡面一定要有元素), 再來元素間要有一個運算 “+”. 這個運算必須有封閉性, 亦即對所有 $\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$ 皆使得 $\mathbf{v}+\mathbf{w}\in V$. 另外這個運算有我們熟悉的以下性質

VS1: 對任意 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$, 皆有 $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$.

VS2: 對任意 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$, 皆有 $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$.

VS3: 存在一元素 $\mathbf{O}\in V$ 滿足對任意 $\mathbf{u}\in V$ 皆有 $\mathbf{O}+\mathbf{u}=\mathbf{u}$.

VS4: 對任意 $\mathbf{u}\in V$ 皆可找到 $\mathbf{u}'\in V$ 滿足 $\mathbf{u}+\mathbf{u}'=\mathbf{O}$.

大家可以看出來, V 在此 $+$ 的運算下, 形成一個 abelian group. 不過 vector space 不只是一個 group, 它的元素還可以和一個 filed 的元素 “作用” (action), 這是所謂的 *scaler multiplication*. 這個作用也必須有封閉性. 也就是說對於一個 vector space V, 還必須有一個 field F, 且對任意的 $r\in F$ 以及 $\mathbf{v}\in V$, r 和 $\mathbf{v}$ 作用之下的元素, (在此我們記作 $r\mathbf{v}$), 仍必須在 V 中.

當然了這個作用和 $+$ 之間仍需保有一定的關係才有意義, 它們之間有我們熟悉的以下性質

VS5: 對任意 $r,s\in F$ 以及 $\mathbf{u}\in V$, 皆有 $r(s\mathbf{u})=(rs)\mathbf{u}$.

VS6: 對任意 $r,s\in F$ 以及 $\mathbf{u}\in V$, 皆有 $(r+s)\mathbf{u}=r\mathbf{u}+s\mathbf{u}$.

VS7: 對任意 $r\in F$ 以及 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$ 皆有 $r(\mathbf{u}+\mathbf{v})=r\mathbf{u}+r\mathbf{v}$.

VS8: 對任意 $\mathbf{u} \in V$, 皆有 $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$.

為什麼要有這些運算性質呢? 有了以上 VS1 ∼ VS8 這 8 個性質, 我們就能對一個 vector space 中的元素像處理數字一樣來作運算. 注意這 8 個性質缺一不可, 另一方面它們又足以讓我們推導出許多其他的性質. 等一下我們會看一些例子, 在此我們先對一些符號加以說明.

首先我們會用粗體字來表示一個向量空間 V 中的元素, 而用細字表示 field F 中的元素. 例如 V 中的加法單位元素我們用 $\mathbf{O}$ 來表示, 而 F 中的加法單位元素用 0 來表示. 另外 V 和 F 中都有加法, 一般來說這兩個加法是不一樣的 (除非 $V = F$), 不過我們都用 $+$ 來表示. 這是因為除非 $V = F$, 要不然 V 中的元素是不可以和 F 中的元素相加的, 所以不至於造成混淆. 最後我們還要再強調, 要形成一個 vector space 一定要有一個 abelian group V 及一個 filed F. 這中間不只含有 V, F 本身的代數結構也牽涉到 V, F 之間作用的關係. 在具體例子裡要給一個 vector space 都必須明確說明這些運算關係. 不過在一般抽象的情形我們都會直接說 V 是一個 over F 的 vector space. 有時更會省略稱 V 為 F-space.

Example 1.1.1. 我們介紹一些常見的 vector space. 以下例子中 F 為一個 filed.

(1) 令 $F^n = \{(a_1,\dots,a_n) \mid a_i \in F\}$. 定義加法為: 若 $(a_1,\dots,a_n),(b_1,\dots,b_n) \in F^n$, 則 $(a_1,\dots,a_n)+(b_1,\dots,b_n) = (a_1+b_1,\dots,a_n+b_n)$. 依此定義很容易檢驗 F^n 在此加法之下是封閉的且 VS1 ∼ VS4 是符合的, 其中 $\mathbf{O} = (0,\dots,0)$. 令一方面我們定義 F 和 F^n 的作用為: 若 $r \in F$, $(a_1,\dots,a_n) \in F^n$, 則 $r(a_1,\dots,a_n) = (a_1,\dots,a_n)$. 也很容易看出此作用是封閉的且符合 VS5 ∼ VS8. 在這運算之下我們得 F^n 是一個 over F 的 vector space. 特別的是 F 本身是 over F 的 vector space. 我們也可將此推廣到 $M_{m\times n}(F)$ 是所有 entry 在 F 的 $m \times n$ 矩陣所成的集合. 利用類似上述運算方法 (即一般矩陣的運算方法), 我們得 $M_{m\times n}(F)$ 是一個 over F 的 vector space.

(2) 考慮所有係數在 F 且次數為 n 的多項式, 我們定義加法為: 若 $f(x) = a_nx^n+\cdots+a_0, g(x) = b_nx^n+\cdots+b_0$, 則 $f(x)+g(x) = (a_n+b_n)x^n+\cdots+(a_0+b_0)$. 首先要注意所有係數在 F 且次數為 n 的多項式在此加法的定義之下並不是封閉的. (兩個次數相同的多項式相加有可能次數變小). 不過若我們考慮所有次數小於或等於 n 的多項式, 則在此加法之下就是封閉的了, 而且它們符合 VS1 ∼ VS4. 若 $r \in F$, $f(x) = a_nx^n+\cdots+a_0$, 令 $rf(x) = ra_nx^n+\cdots+ra_0$, 則在此作用之下我們得所有係數在 F 且次數小於或等於 n 的多項式是一個 vector space over F. 我們用 $P_n(F)$ 來表示這一個 vector space. 零多項式是 $P_n(F)$ 中的 $\mathbf{O}$ (加法單位元素).

(3) 給定一集合 S. 考慮所有從 S 映射到 F 的函數所成的集合 F^S. 若 $r \in F$, $f,g \in F^S$, 我們定義 $f+g, rf \in F^S$ 為 $f+g : s \mapsto f(s)+g(s)$ 且 $rf : s \mapsto rf(s)$. 依此所定的運算我們可得 F^S 是一個 over F 的 vector space 且 $f \in F^S$ 滿足 $f(s) = 0, \forall s \in S$ 為 F^S 中的 $\mathbf{O}$.

Question 1.1. 你能看出來 *Example 1.1.1* 中 *(1)* 是 *(3)* 的一個特例嗎? *(1)* 和 *(2)* 有關連嗎?

Question 1.2. 若 V 是一個 *vector space over* F, V' 是 V 的一個 *subgroup* 且 F' 是 F 的一個 *subfield.* 利用 V, F 的運算, 是否 V' 是一個 *over* F 的 *vector space?* 是否 V 是一個 *over* F' 的 *vector space?*

接下來我們要談論 vector space 的一些基本性質. 若 V 是一個 F-space, 首先 V 本身由 abelian group 的結構所得的性質, 在這裡我們就略而不深談. 不過我們要特別提醒: VS3 中所提存在 $\mathbf{O} \in V$ 使得對所有 $\mathbf{v} \in V$ 皆有 $\mathbf{v}+\mathbf{O}=\mathbf{v}$. 這裡的 $\mathbf{O}$ 其實是唯一的, 就是所謂的加法單位元素. 另外 VS4 所提對所有 $\mathbf{v} \in V$ 皆存在 $\mathbf{v}' \in V$ 使得 $\mathbf{v}+\mathbf{v}'=\mathbf{O}$, 這裡的 $\mathbf{v}'$ 也會隨著 $\mathbf{v}$ 而唯一確定, 就是所謂的加法反元素, 在此情形之下我們用 $-\mathbf{v}$ 來表示 $\mathbf{v}'$. 最後我們要強調利用加法反元素存在, 對於 V 中的一個元素 $\mathbf{w}$, 只要存在一個 $\mathbf{v} \in V$ 使得 $\mathbf{v}+\mathbf{w}=\mathbf{v}$, 那麼我們便可以確認 $\mathbf{w}=\mathbf{O}$.

至於 VS5 $\sim$ VS8, 這些有關 V 與 F 相互間的作用關係, 可幫我們得到以下性質.

Proposition 1.1.2. 假設 V 為一個 *over* F 的 *vector space,* 我們有以下之性質*:*

(1) 設 $r \in F$, $\mathbf{v} \in V$, 則 $r\mathbf{v}=\mathbf{O}$ 若且唯若 $r=0$ 或 $\mathbf{v}=\mathbf{O}$.

(2) 對任意 $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{v}+(-1)\mathbf{v}=\mathbf{O}$. 換言之, $-\mathbf{v}=(-1)\mathbf{v}$.

Proof. (1) ($\Leftarrow$) 若 $r=0$, 要證明 $r\mathbf{v}=\mathbf{O}$, 由上面所討論的結果, 我們僅要證明 $0\mathbf{v}+\mathbf{v}=\mathbf{v}$ 即可. 然而由 VS6 及 VS8 知

$$0\mathbf{v}+\mathbf{v}=0\mathbf{v}+1\mathbf{v}=(0+1)\mathbf{v}=1\mathbf{v}=\mathbf{v}.$$

故得證. 另一方面, 若 $\mathbf{v}=\mathbf{O}$, 要證明 $r\mathbf{v}=\mathbf{O}$ 我們僅要證明 $r\mathbf{O}+r\mathbf{O}=r\mathbf{O}$ 即可. 然而由 VS3 及 VS7 知

$$r\mathbf{O}+r\mathbf{O}=r(\mathbf{O}+\mathbf{O})=r\mathbf{O}.$$

故得證.

($\Rightarrow$) 若 $r\mathbf{v}=\mathbf{O}$ 且 $r \neq 0$, 則由 F 是一個 field 知存在 $r^{-1} \in F$ 使得 $r^{-1}r=1$. 故由 VS5, VS8 及前面證得結果知

$$\mathbf{v}=1\mathbf{v}=r^{-1}(r\mathbf{v})=r^{-1}\mathbf{O}=\mathbf{O}.$$

故得證.

(2) 利用 VS8, VS6 及 (1) 所證得之結果, 可知

$$\mathbf{v}+(-1)\mathbf{v}=1\mathbf{v}+(-1)\mathbf{v}=(1-1)\mathbf{v}=0\mathbf{v}=\mathbf{O}.$$

故由加法反元素的唯一性得 $-\mathbf{v}=(-1)\mathbf{v}$.

□

Question 1.3. 設 V 是一個 F*-space.* 利用 *Proposition 1.1.2* 你能證明以下性質嗎*?*

(1) 若 $r, r' \in F$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ 且 $r \neq r'$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{O}$, 則 $r\mathbf{u}+\mathbf{v} \neq r'\mathbf{u}+\mathbf{v}$.

(2) 若 $r \in F$, $\mathbf{v} \in V$, 則 $-(r\mathbf{v})=(-r)\mathbf{v}=r(-\mathbf{v})$.

1.2. Subspaces

若 V 是一個 over F 的 vector space, U 是 V 的一個非空子集 (nonempty subset), 且在原先 V, F 的運算之下, U 是一個 over F 的 vector space, 則稱 U 是 V 的一個 *subspace*. 有時我們會用 U 是 V 的一個 F-subspace 這樣的說法來強調是 over F 的 subspace. 另外為了方便我們用 $U \leq V$ 來表示 U 是 V 的一個 subspace.

在 V 中任選一個非空的 subset S 會不會就是 V 的一個 subspace 呢? 答案顯然是不一定會, 因為要成為 subspace, S 本身一定要是一個 abelian group, 也就是說 S 需為 V 的 subgroup. 不過即使 S 是 V 的 subgroup, 在前面 Question 1.2 中我們也知道 S 仍不一定是一個 F-space. 問題出現在 S 和 F 作用不一定有封閉性. 事實上只要 S 在 V 的運算之下是封閉的且和 F 作用是封閉的就可以確認 S 是 V 的 subspace. 我們有以下之結果

Proposition 1.2.1. 設 V 是一個 *over* F 的 *vector space* 且 S 為 V 的一個 *subset.* 則 S 是 V 的一個 F*-subspace* 若且唯若 S 有以下之性質:

(1) $\mathbf{O} \in S$.

(2) 對於所有 $r, s \in F, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in S$ 皆有 $r\mathbf{u} + s\mathbf{v} \in S$.

Proof. ($\Rightarrow$) 若 S 是 V 的 subspace, 因 S 是非空, 故存在 $\mathbf{v}$ 在 S 中. 由 subspace 的定義知 S 是一個 F-space, 故由 S, F 作用的封閉性及 Proposition 1.1.2 (1) 得 $0\mathbf{v} = \mathbf{O} \in S$. 另一方面若 $r, s \in F, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in S$, 由 S, F 作用的封閉性得 $r\mathbf{u}, s\mathbf{v} \in S$, 再由 S 加法的封閉性得 $r\mathbf{u} + s\mathbf{v} \in S$.

($\Leftarrow$) 由 (1) $\mathbf{O} \in S$ 知 S 是一個非空集合. 要證明 S 是一個 F-space, 我們需驗證 S 加法封閉性及 S, F 作用的封閉性, 再驗證 VS1 $\sim$ VS8 成立. 首先說明對於 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S$ 因為 $S \subseteq V$, 故 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ 再由 V 是 F-space, 得 $1\mathbf{u} = \mathbf{u}, 1\mathbf{v} = \mathbf{v}$. 令 $r = 1, s = 1$ 由 (2) 得 $\mathbf{u} + \mathbf{v} = 1\mathbf{u} + 1\mathbf{v} \in S$, 即得證 S 加法封閉性. 另外對任意 $r \in F, \mathbf{u} \in S$, 因 $\mathbf{O} \in S$, 令 $s = 1, \mathbf{v} = \mathbf{O}$ 由 (2) 得 $r\mathbf{u} + 1\mathbf{O} \in S$. 但 $\mathbf{u}, \mathbf{O}$ 皆為 V 中元素, 故由 V 為 F-space 之假設得 $r\mathbf{u} + 1\mathbf{O} = r\mathbf{u}$, 即得證 S, F 作用的封閉性. 最後我們要驗證 VS1 $\sim$ VS8 對於 S 皆成立. 由於 $S \subseteq V$, VS1, VS2 以及 VS5 $\sim$ VS8 對於所有 V 中元素都成立, 自然對 S 中元素亦成立. 然而 VS3, 為 (1) 之假設. VS4 由前 S, F 作用的封閉性以及 Proposition 1.1.2 知對任意 $\mathbf{v} \in S$, $-\mathbf{v} = (-1)\mathbf{v} \in S$. 得證 S 為 V 的一個 F-subspace. $\square$

Question 1.4. 若 $\mathbf{u} \in S$ 令 $r = 1, s = -1$ 以及 $\mathbf{v} = \mathbf{u}$, 則利用 *Proposition 1.2.1* 的 *(2)* 可得 $\mathbf{O} = 1\mathbf{u} + (-1)\mathbf{u} \in S$. 為什麼還需要 *(1)* 的假設呢?

Question 1.5. 設 V 是一個 F*-space,* 且 S 是 V 的一個非空子集. 試證明若 S 利用 V 的加法運算是封閉的且利用 V*,* F 的作用也是封閉的*,* 則 S 是 V 的一個 F*-subspace.* 一般來講一個 *abelian group* 它的非空子集若在原運算之下是封閉的並不一定會是這個 *abelian group* 的 *subgroup.* 然而在 *vector space* 前述的情形為何 S 會是 V 的 *subgroup* 呢?

利用 Proposition 1.2.1, 我們很容易檢驗一個 vector space 的非空子集是否為其 subspace. 通常要檢查一個集合及其運算是否為 vector space, 要檢查 VS1 $\sim$ VS8 這些項目, 不過若已知它是包含於某個 vector space, 那麼所需檢查的項目就簡單多了.

Example 1.2.2. 以下我們舉出幾個在 Example 1.1.1 中的 vector space 它們的 subspace.

(1) 給定 $c_1,\ldots,c_n \in F$. $E = \{(a_1,\ldots,a_n) \in F^n \mid c_1a_1+\cdots+c_na_n = 0\}$, 是 F^n 的一個 subspace. E 可用 $c_1x_1+\cdots+c_nx_n = 0$ 來表示. 在幾何中通常在 F^n 中滿足 $c_1x_1+\cdots+c_nx_n = b$ 的元素所成的集合稱為 F^n 的 hyperplane. 不過僅有 $b = 0$ 時的 hyperplane 是一個 F-space.

(2) $P_n(F)$ 中考慮次數小於等於 $n-1$ 的多項式所成的集合, 即 $P_{n-1}(F)$, 是一個 subspace. 另外給定 $\lambda \in F$, 集合 $\Lambda = \{f(x) \in P_n(F) \mid f(\lambda) = 0\}$ 也是 $P_n(F)$ 的 subspace. 特別在 $P_n(F)$ 中常數項為 0 的多項式所成的集合 (即當 $\lambda = 0$) 是一個 subspace.

(3) 給定 $T \subseteq S$, F^S 中的子集合 $\{f \in F^S \mid f(t) = 0, \forall t \in T\}$ 是一個 subspace.

給定一個 over F 的 vector space V, 很容易得知 V 和 $\{\mathbf{O}\}$ 皆為其 subspace. 這兩個 subspace 稱為 V 的 trivial subspace. 若 V 中有其他的 F-subspace, 我們有興趣是否能利用這些 subspace 得到更多的 F-subspace. 首先有以下之結果.

Proposition 1.2.3. 若 V 是一個 *vector space over* F 且 U,W 為 V 的 *subspace,* 則 $U\cap W$ 也是 V 的 *subspace.*

Proof. 我們利用 Proposition 1.2.1 來證明. 首先因為 U,W 皆為 V 的 subspace, 我們有 $\mathbf{O}\in U$ 且 $\mathbf{O}\in W$, 故得 $\mathbf{O}\in U\cap W$. 另外若 $r,s\in F$ 且 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in U\cap W$, 則由 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in U$ 得 $r\mathbf{u}+s\mathbf{v}\in U$. 同理 $r\mathbf{u}+s\mathbf{v}\in W$ 故知 $r\mathbf{u}+s\mathbf{v}\in U\cap W$. □

Question 1.6. V 是一個 *vector space over* F. 設 I 為一個 *index set,* 且對於任意 $i\in I$, V_i 皆為 V 的 *subspace.* 是否 $\bigcap_{i\in I} V_i$ 也是 V 的 *subspace?*

我們很自然會問是否 V,W 為 V 的 F-subspace, 也會使得 $U\cup W$ 亦為 V 的 F-subspace. 一般來說這是不對的. 例如在 $\mathbb{R}^2$ 中 $L_1 = \{(r,0)\mid r\in\mathbb{R}\}$, $L_2 = \{(0,s)\mid s\in\mathbb{R}\}$ 皆為 $\mathbb{R}^2$ 的 subspace. 因為 $(1,0)\in L_1$, $(0,1)\in L_2$ 所以 $(1,0),(0,1)\in L_1\cup L_2$, 但是 $(1,1) = (1,0)+(0,1)\notin L_1\cup L_2$, 故知 $L_1\cup L_2$ 不是 $\mathbb{R}^2$ 的 subspace. 事實上當 F 是一個 infinite field 時, 我們有以下之結果.

Theorem 1.2.4. 設 F 是一個 *infinite field* 且 V 是一個 F*-space.* 若 $V_1,\ldots,V_n$ 為 V 的 *nontrivial* F*-subspaces,* 則 $V_1\cup\cdots\cup V_n \neq V$.

Proof. 我們利用反證法, 假設 $V = V_1\cup\cdots\cup V_n$. 若 $V_1 \subseteq V_2\cup\cdots\cup V_n$, 則可將 V_1 拿掉仍得 $V = V_2\cup\cdots\cup V_n$. 故不失一般性我們可假設 $V_1 \not\subseteq V_2\cup\cdots\cup V_n$. 因此存在 $\mathbf{u}\in V_1\setminus V_2\cup\cdots\cup V_n$ (即 $\mathbf{u}\in V_1$ 但 $\mathbf{u}\notin V_2\cup\cdots\cup V_n$). 又 $V_1 \subsetneq V$, 故存在 $\mathbf{v}\in V\setminus V_1$. 考慮集合

$$S = \{r\mathbf{u}+\mathbf{v} \mid r\in F\}.$$

注意若 $r\neq r'$ 則 $r\mathbf{u}+\mathbf{v}\neq r'\mathbf{u}+\mathbf{v}$ (否則會導致 $(r-r')\mathbf{u} = \mathbf{O}$, 而得到 $\mathbf{u} = \mathbf{O}$ 之矛盾). 因此由 F 是 infinite field 知 S 有無窮多個元素.

接下來我們看看 S 和每一個 V_i 個別會有多少個共同元素. 若 $r\mathbf{u}+\mathbf{v}\in V_1$, 因 $r\mathbf{u}\in V_1$, 由 V_1 是 F-subspace 可得 $\mathbf{v}\in V_1$ 和當初 $\mathbf{v}$ 的選取矛盾, 故知 $S\cap V_1=\emptyset$. 另一方面, 當 $2\leq i\leq n$, 若存在 $r\neq r'$ 使得 $r\mathbf{u}+\mathbf{v}\in V_i$ 且 $r'\mathbf{u}+\mathbf{v}\in V_i$, 則由 V_i 是 F-subspace 得 $(r-r')\mathbf{u}\in V_i$, 再推得 $\mathbf{u}\in V_i\subseteq V_2\cup\cdots\cup V_n$. 此與 $\mathbf{u}$ 的選取相矛盾, 故知 S 和每個 V_i 最多僅有一個共同元素. 也就是說集合 $S\cap(V_1\cup\cdots\cup V_n)$ 最多僅有 $n-1$ 個元素. 但因 V 是一個 F-space, 由 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$ 可得 $S\subseteq V$. 換言之, $V=V_1\cup\cdots\cup V_n$ 的假設告訴我們 $S\cap(V_1\cup\cdots\cup V_n)=S\cap V=S$ 應有無窮多個元素. 此與剛才結論相矛盾故知 $V=V_1\cup\cdots\cup V_n$ 不可能成立. □

要注意 Theorem 1.2.4 若 F 是一個 finite field, 則不一定成立. 另外由此定理可知若 F 是一個 infinite field, 則一個 over F 的 vector space 中兩個無包含關係的 subspaces 的聯集一並不會是一個 F-space (參見以下 Questions).

Question 1.7. 當 F 是一個 *finite field,* 試找出一個 *Theorem 1.2.4* 的反例.

Question 1.8. 設 V 是一個 *over infinite field* F 的 *vector space* 且 $V_1,\ldots,V_n$ 為 V 的 F*-subspaces.* 你可以看出 *Theorem 1.2.4* 告訴我們 $V_1\cup\cdots\cup V_n$ 不會是一個 F*-space* 除非存在 $i\in\{1,\ldots,n\}$ 滿足 $V_j\subseteq V_i$, $\forall j\in\{1,\ldots,n\}$.

一般來說雖然一個 vector space 中的一些 subspaces 所成的聯集並不一定是一個 vector space, 但是我們仍能造出一個包含這些 subspaces 的 vector space. 我們需要以下的定義.

Definition 1.2.5. 假設 V 為一個 over F 的 vector space 且 $V_1,\ldots,V_n$ 為 V 的 F-subspaces. 定義

$$V_1+\cdots+V_n=\{\mathbf{v}_1+\cdots+\mathbf{v}_n\mid \mathbf{v}_i\in V_i,\,1\leq i\leq n\}.$$

要注意這只是為了以後方便使用所定的符號, 並不是要對這些 subspaces 定義加法.

Question 1.9. 當 V 是一個 F*-space* 而 W 是 V 的 *subspace,* 依定義 $W+W$ 會是什麼*?*

依照定義, 我們可得到以下的性質.

Proposition 1.2.6. 假設 V 為一個 *over* F 的 *vector space* 且 $V_1,\ldots,V_n$ 為 V 的 *subspaces.* 則 $V_1+\cdots+V_n$ 是 V 的 *subspace.*

Proof. 因 $\mathbf{O}\in V_i$ for $1\leq i\leq n$, 故 $\mathbf{O}\in V_1+\cdots+V_n$. 另一方面, 若 $\mathbf{u}_i,\mathbf{v}_i\in V_i$, $r,s\in F$ 因 V_i 是 F-subspace, 故 $r\mathbf{u}_i+s\mathbf{v}_i\in V_i$, 亦即

$$r(\mathbf{u}_1+\cdots+\mathbf{u}_n)+s(\mathbf{v}_1+\cdots+\mathbf{v}_n)=(r\mathbf{u}_1+s\mathbf{v}_1)+\cdots+(r\mathbf{u}_n+s\mathbf{v}_n)\in V_1+\cdots+V_n.$$

故由 Proposition 1.2.1 得知 $V_1+\cdots+V_n$ 是 V 的 subspace. □

Question 1.10. 假設 V 為一個 *over* F 的 *vector space* 且 U,W 為 V 的 *subspaces.* 很容易知道 $U\cap W$ 是 V 中包含於 U 且包含於 W 最大的 *subspace.* 而什麼是 V 中包含 U 且包含 W 最小的 *subspace?*

1.3. Spanning Sets

我們介紹 linear combination 的概念, 進而引進另一種得到 subspace 的方法.

Definition 1.3.1. 令 V 是一個 over F 的 vector space 且令 S 為 V 的一個非空子集. 若 $\mathbf{v}\in V$ 滿足 $\mathbf{v}=r_1\mathbf{v}_1+\cdots+r_n\mathbf{v}_n$, 其中 $r_i\in F$ 且 $\mathbf{v}_i\in S$, 則稱 $\mathbf{v}$ 是 S 的一個 *linear combination*. 我們用 $\mathrm{Span}(S)$ 來表示所有 S 的 linear combination 所成的集合.

要注意, 即使 S 是一個 infinite set, 每一個 S linear combination 僅牽涉到有限多個 S 中有限多個元素. 有的書會將 S 的一個 linear combination 用 $\mathbf{v}=\sum_{\mathbf{u}\in S} r_{\mathbf{u}}\mathbf{u}$ 這樣來表示, 不過都會標明其中每個 $r_{\mathbf{u}}\in F$ 且僅有有限多個 $r_{\mathbf{u}}$ 不等於 0. 另外若 $\mathbf{v}=\sum_{\mathbf{u}\in S} r_{\mathbf{u}}\mathbf{u}=\sum_{\mathbf{u}\in S} s_{\mathbf{u}}\mathbf{u}$, 其中有某個 $\mathbf{u}\in S$ 有 $r_{\mathbf{u}}\neq s_{\mathbf{u}}$, 則稱 $\mathbf{v}$ 寫成 S 的 linear combination 其表法“不唯一”.

Question 1.11. 由定義能看出若 $S'\subseteq S\subseteq V$, 則 $\mathrm{Span}(S')\subseteq\mathrm{Span}(S)$ 嗎? 一般來說將 S 拿掉一些元素有可能會使得 $\mathrm{Span}(S)$ 變小. 想想看在 S 中拿掉哪些元素才不會使得 $\mathrm{Span}(S)$ 變小呢?

若 S 是非空的, 任取 $\mathbf{w}\in S$, 因 $0\mathbf{w}=\mathbf{O}$ 知 $\mathbf{O}$ 是一個 S 的 linear combination. 故 $\mathbf{O}\in\mathrm{Span}(S)$. 另外若 $\mathbf{u}=r_1\mathbf{u}_1+\cdots+r_n\mathbf{u}_n$, $\mathbf{v}=s_1\mathbf{v}_1+\cdots+s_m\mathbf{v}_m$ 是 S 的 linear combination (即 $r_i,s_j\in F$ 且 $\mathbf{u}_i,\mathbf{v}_j\in S$), 很明顯的對任意 $r,s\in F$,

$$\begin{aligned} r\mathbf{u}+s\mathbf{v} &= r(r_1\mathbf{u}_1+\cdots+r_n\mathbf{u}_n)+s(s_1\mathbf{v}_1+\cdots+s_m\mathbf{v}_m)\\ &= (rr_1)\mathbf{u}_1+\cdots(rr_n)\mathbf{u}_n+(ss_1)\mathbf{v}_1+\cdots+(ss_m)\mathbf{v}_m \end{aligned}$$

也是 S 的 linear combination. 所以利用 Proposition 1.2.1 我們有以下之結果.

Lemma 1.3.2. *若 V 是一個 over F 的 vector space 且 S 為 V 的一個非空子集, 則 $\mathrm{Span}(S)$ 為 V 的一個 subspace.*

既然 $\mathrm{Span}(S)$ 是一個 F-subspace 我們便稱之為 the *subspace spanned by S*. 事實上 $\mathrm{Span}(S)$ 是 V 中包含 S 最小的 subspace.

Proposition 1.3.3. *若 V 是一個 over F 的 vector space 且 S 為 V 的一個非空子集, 則*

$$\mathrm{Span}(S)=\bigcap_{S\subseteq W,\, W\leq V} W,$$

這裡 W 是考慮 V 中所有包含 S 的 subspaces.

Proof. 首先由 Lemma 1.3.2 知 $\mathrm{Span}(S)$ 就是一個包含 S 的 subspace, 所以自然有

$$\mathrm{Span}(S)\supseteq\bigcap_{S\subseteq W,\, W\leq V} W.$$

另一方面若 W 是 V 的 subspace 且 $S\subseteq W$ 則任取 $\mathbf{v}\in\mathrm{Span}(S)$, 因 $\mathbf{v}=r_1\mathbf{v}_1+\cdots+r_n\mathbf{v}_n$, 其中 $r_1\in F$, $\mathbf{v}_i\in S\subseteq W$, 故由 W 為 subspace 得 $\mathbf{v}\in W$, 亦即 $\mathrm{Span}(S)\subseteq W$ (此即表示 $\mathrm{Span}(S)$ 是 V 中包含 S 最小的 subspace). 因此

$$\mathrm{Span}(S)\subseteq\bigcap_{S\subseteq W,\, W\leq V} W,$$

故得證. $\square$

當 $S=\emptyset$, 因為所有集合皆包含空集合, Proposition 1.3.3 中的交集部分就是所有 V 的 subspaces 的交集, 也就是 $\{\mathbf{O}\}$. 所以當 S 是空集合時, 我們也定義 $\mathrm{Span}(S)=\{\mathbf{O}\}$.

Question 1.12. 假設 V 為一個 *over* F 的 *vector space* 且 $V_1,\ldots,V_n$ 為 V 的 *subspaces.* 很容易看出 $\mathrm{Span}(V_i)=V_i$. 你能知道 $\mathrm{Span}(V_1\cup\cdots\cup V_n)$ 是什麼嗎?

前面 Question 1.11 中我們提到一般來說將 S 拿掉一些元素有可能會使得 $\mathrm{Span}(S)$ 變小. 以下我們回答在 S 中拿掉哪些元素才不會使得 $\mathrm{Span}(S)$ 變小.

Corollary 1.3.4. 令 V 為一個 *vector space over* F 且 $S'\subseteq S\subseteq V$. 則 $\mathrm{Span}(S)=\mathrm{Span}(S')$ 若且唯若 $S\setminus S'\subseteq\mathrm{Span}(S')$.

Proof. $(\Rightarrow)$ 因 $S\setminus S'\subseteq S$ 依定義自然有 $S\setminus S'\subseteq\mathrm{Span}(S)$. 故由前提 $\mathrm{Span}(S)=\mathrm{Span}(S')$ 可得 $S\setminus S'\subseteq\mathrm{Span}(S')$.

$(\Leftarrow)$ 由 $S'\subseteq S$ 可得 $\mathrm{Span}(S')\subseteq\mathrm{Span}(S)$, 因此我們僅要證明 $\mathrm{Span}(S)\subseteq\mathrm{Span}(S')$. 事實上, 我們只要證明 $S\subseteq\mathrm{Span}(S')$ 即可. 這是因為 Lemma 1.3.2 告訴我們 $\mathrm{Span}(S')$ 是一個 subspace of V, 故若 S 包含於 $\mathrm{Span}(S')$ 則由 Proposition 1.3.3 可得 $\mathrm{Span}(S)\subseteq\mathrm{Span}(S')$. 然而對任意 $\mathbf{v}\in S$, 我們有 $\mathbf{v}\in S'$ 或 $\mathbf{v}\in S\setminus S'$. 若 $\mathbf{v}\in S'$ 依定義自然有 $\mathbf{v}\in\mathrm{Span}(S')$; 而若 $\mathbf{v}\in S\setminus S'$ 依假設也有 $\mathbf{v}\in\mathrm{Span}(S')$. 故知 $S\subseteq\mathrm{Span}(S')$, 因而得證 $\mathrm{Span}(S)=\mathrm{Span}(S')$. $\square$

特別地, 當 V 是一個 F-space, 而 S 是 V 的子集滿足 $\mathrm{Span}(S)=V$, 則稱 S 是 V 的一個 *spanning set.* 依此定義很容易知道若 $S\subseteq S'\subseteq V$, 且 S 是 V 的 spanning set, 則 S' 也是 V 的 spanning set.

Example 1.3.5. 我們藉由 Example 1.1.1 的 vector spaces, 舉出它們幾個基本的 spanning sets.

(1) 在 F^n 中考慮 $\mathbf{e}_i=(0,\ldots,1,\ldots,0)$, 其中 1 是在第 i 個位置, 其他位置都是 0. 則 $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ 是 F^n 的一個 spanning set.

(2) 在 $P_n(F)$ 中因為所有元素皆可用 $a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$ 來表示, 其中 $a_i\in F$, 所以 $\{1,x,\ldots,x^n\}$ 是 $P_n(F)$ 的一個 spanning set.

(3) 在 F^S 中, 任取 $\lambda\in S$ 定義 $f_\lambda\in F^S$, 為
$$f_\lambda(s)=\begin{cases}1, & s=\lambda;\\ 0, & s\neq\lambda.\end{cases}$$
當 S 是一個 finite set 時, $\{f_\lambda\mid\lambda\in S\}$ 是 F^S 的一個 spanning set. 不過當 S 是 infinite set 時, 這就不對了. 這是因為在 vector space 中我們僅考慮有限多個元素相加 (無窮多個元素相加會有收斂發散的問題, 這會牽涉到 “Topology”, 不是一般線性代數所談的範疇).

Question 1.13. 在上述 F^S 的情形, 若 S 是一個 *infinite set,* $\mathrm{Span}(\{f_\lambda\mid\lambda\in S\})$ 是什麼?

1.4. Linear Independence

我們介紹 linear independence 的概念, 不過為了避免大家邏輯上可能發生的謬誤, 我們由 linear dependence 的概念出發. 事實上 Linear independence 和 spanning set 之間有許多相呼應的性質, 希望大家研習此節一些結果時能常常和前一節的結果相對照.

Definition 1.4.1. 令 V 是一個 over F 的 vector space 且令 S 為 V 的一個非空子集. 若存在 $\mathbf{v} \in S$ 滿足 $\mathbf{v} \in \mathrm{Span}(\{\mathbf{w} \in S \mid \mathbf{w} \neq \mathbf{v}\})$, 則稱 S 為 *linearly dependent.* 反之, 則稱 S 為 *linearly independent.*

依此定義我們很容易得知, 若 $\mathbf{O} \in S$, 則 S 一定是 linearly dependent. 因為 $\mathbf{O}$ 一定會在任何的 subspace 中.

Question 1.14. *依此定義你能看出若 $S \subseteq S'' \subseteq V$, 而 S'' 是 linearly independent, 則 S 是 linearly independent 嗎? (or 若 S 是 linearly dependent, 則 S'' 是 linearly dependent) 不過若 S 是 linearly independent, S'' 不一定是 linearly independent. 也就是說一個 linearly independent 的集合多加了元素後有可能變成 linearly dependent. 要加入怎樣的元素才能保持 linearly independent 呢?*

Linear dependence 有以下等價的看法.

Proposition 1.4.2. *令 V 是一個 over F 的 vector space 且 S 為 V 的一個非空子集. 則 S 是 linearly dependent 若且唯若存在 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in S$ 以及 $r_1, \ldots, r_n \in F$, 其中這些 $\mathbf{v}_i$ 皆相異而 r_i 全不為 0 使得 $r_1\mathbf{v}_1 + \cdots + r_n\mathbf{v}_n = \mathbf{O}$.*

Proof. $(\Rightarrow)$ 由 S 是 linearly dependent 知存在 $\mathbf{v}_1 \in S$ 滿足 $\mathbf{v}_1 \in \mathrm{Span}(\{\mathbf{w} \in S \mid \mathbf{w} \neq \mathbf{v}_1\})$, 亦即存在 $\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \in S$ 皆相異且不等於 $\mathbf{v}_1$ 以及 $r_2, \ldots, r_n \in F$ 皆不為 0 使得 $\mathbf{v}_1 = r_2\mathbf{v}_2 + \cdots + r_n\mathbf{v}_n$. 故得 $(-1)\mathbf{v}_1 + r_2\mathbf{v}_2 + \cdots + r_n\mathbf{v}_n = \mathbf{O}$.

$(\Leftarrow)$ 假設對於 $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\mathbf{v}_i \in S$ 皆相異且 $r_i \in F$ 全不為 0 使得 $r_1\mathbf{v}_1 + \cdots + r_n\mathbf{v}_n = \mathbf{O}$, 則 $\mathbf{v}_1 = (-r_2r_1^{-1})\mathbf{v}_2 + \cdots + (-r_nr_1^{-1})\mathbf{v}_n \in \mathrm{Span}(\{\mathbf{w} \in S \mid \mathbf{w} \neq \mathbf{v}_1\})$, 亦即 S 為 linearly dependent. □

提醒一下 Proposition 1.4.2 中若 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ 中沒有 $\mathbf{O}$, 則會有 $n \geq 2$, 否則若僅有 $r_1 \neq 0$, 會導致 $r_1\mathbf{v}_1 = \mathbf{O}$ 而推得 $\mathbf{v}_1 = \mathbf{O}$.

另外 linear independence 也有以下等價的看法.

Proposition 1.4.3. *令 V 是一個 over F 的 vector space 且 S 為 V 的一個非空子集. 則 S 是 linearly independent 若且唯若 $\mathrm{Span}(S)$ 中任意的元素皆僅有唯一的方法寫成 S 中元素的 linear combination.*

Proof. $(\Rightarrow)$ 我們利用反證法證明表法唯一. 首先若 $\mathbf{v} = \mathbf{O}$ 有兩種表示法, 即存在 $r_1, \ldots, r_n \in F$ 全不為 0 及 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in S$ 使得 $r_1\mathbf{v}_1 + \cdots + r_n\mathbf{v}_n = \mathbf{O}$. 由 Proposition 1.4.2 知此與 S 為 linearly independent 相矛盾. 另一方面若 $\mathbf{v} \in \mathrm{Span}(S)$ 且 $\mathbf{v} \neq \mathbf{O}$ 有兩種寫法, 即存在

$r_1,\ldots,r_n,s_1,\ldots,s_m \in F$ (其中這些 r_i,s_j 皆不為 0) 以及 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n,\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_m \in S$ (其中這些 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 皆相異且 $\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_m$ 皆相異) 使得

$$\mathbf{v} = r_1\mathbf{v}_1 + \cdots + r_n\mathbf{v}_n = s_1\mathbf{w}_1 + \cdots + s_m\mathbf{w}_m.$$

經適當排序後我們假設: $\mathbf{v}_1 = \mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{v}_k = \mathbf{w}_k$ 且其他的 $\mathbf{v}_i,\mathbf{w}_j$ 皆相異. 而得

$$\mathbf{O} = (r_1-s_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + (r_k-s_k)\mathbf{v}_k + r_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} + \cdots + r_n\mathbf{v}_n + s_{k+1}\mathbf{w}_{k+1} + \cdots + s_m\mathbf{w}_m.$$

依表法不同之假設, 若 $k=n=m$, 則必有某個 $r_i \neq s_i$; 而其他情形必有 $k<n$ (此時 $r_{k+1} \neq 0$); 或 $k<m$ (此時 $s_{k+1} \neq 0$). 因此由 Proposition 1.4.2 知此與 S 為 linearly independent 相矛盾, 故得證.

($\Leftarrow$) 依假設對任意 $\mathbf{v} \in S$ 因 $\mathbf{v} \in \mathrm{Span}(S)$ 且 $\mathbf{v} = 1\mathbf{v}$ 故由 $\mathbf{v}$ 寫成 S 中元素的 linear combination 的寫法僅一種, 得 $\mathbf{v} \notin \mathrm{Span}(\{\mathbf{w} \in S \mid \mathbf{w} \neq \mathbf{v}\})$, 依定義此即表示 S 為 linearly independent.

□

要注意, linearly dependent 和 linearly independent 是兩個互補的關係, 我們只是為了敘述方便將 Propositions 1.4.2, 1.4.3 分開, 其實它們是相關的. 例如要證明一個集合是 linearly independent, 你可以用反證法先假設它是 linearly dependent, 然後利用 Proposition 1.4.2 得到矛盾. 另一方面若有一個集合已知是 linearly independent, 你就可以利用 Proposition 1.4.3 表法的唯一性來推導其他相關的性質.

Question 1.15. 分別利用 *Proposition 1.4.2* 和 *Proposition 1.4.3* 來說明 $S = \{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ 是 *linearly independent* 等價於

$$r_1\mathbf{v}_1 + \cdots + r_n\mathbf{v}_n = \mathbf{O} \Rightarrow r_1 = \cdots = r_n = 0.$$

Question 1.16. 若 S 是 *linearly dependent* 且 $\mathbf{O} \notin S$, *Proposition 1.4.3* 告訴我們存在一個 *Span*(S) 中的元素會有兩種 (或更多) 方法寫成 S 中元素的 *linear combination.* 你看得出在這種情形, 其實每一個 Span(S) 中的元素都會有兩種 (或更多) 方法寫成 S 中元素的 *linear combination* 嗎? 甚至當 F 是一個 *infinite field* 時, 每一個 Span(S) 中的元素都會有無窮多種方法寫成 S 中元素的 *linear combination.*

前面 Question 1.14 中我們提到一般來說將一個 linearly independent set S 多加一些元素有可能會使得 S 變成 linearly dependent. 以下我們回答在一個 linearly independent set 中多加哪些元素仍會保持 linearly independent.

Corollary 1.4.4. 令 V 為一個 *vector space over* F 且 $S \subseteq S'' \subseteq V$. 則 S'' 是 *linearly independent* 若且唯若 S 和 $S'' \setminus S$ 皆為 *linearly independent* 且 $\mathrm{Span}(S) \cap \mathrm{Span}(S'' \setminus S) = \{\mathbf{O}\}$.

Proof. ($\Rightarrow$) 因 $S \subseteq S'' \subseteq V$ 依定義若 S'' 是 linearly independent 自然 S 和 $S'' \setminus S$ 皆為 linearly independent. 今若存在 $\mathbf{v} \in \mathrm{Span}(S) \cap \mathrm{Span}(S'' \setminus S)$ 且 $\mathbf{v} \neq \mathbf{O}$, 即表示存在 $r_1,\ldots,r_n,s_1,\ldots,s_m \in F$ 皆不為 0 以及 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n \in S$, $\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_m \in S'' \setminus S$ 使得 $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} r_i\mathbf{v}_i = \sum_{j=1}^{m} s_j\mathbf{w}_j$. 亦即

$\mathbf{v} \in \mathrm{Span}(S'')$ 但有兩種寫成 S'' 中元素的 linear combination 的寫法, 由 Proposition 1.4.3 知此與 S'' 為 linearly independent 相矛盾. 故得證 $\mathrm{Span}(S) \cap \mathrm{Span}(S'' \setminus S) = \{\mathbf{O}\}$.

($\Leftarrow$) 利用反證法, 若 S'' 是 linearly dependent, 由 Proposition 1.4.2 知存在 $r_1, \ldots, r_n \in F$ 全不為 0 以及 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in S''$ 使得 $r_1\mathbf{v}_1 + \cdots + r_n\mathbf{v}_n = \mathbf{O}$. 因 S 以及 $S'' \setminus S$ 皆為 linearly independent, Proposition 1.4.2 告訴我們這些 $\mathbf{v}_i$ 不可能全落在 S 中也不可能全落在 $S'' \setminus S$ 中. 適當排序後, 我們假設 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \in S$ 且 $\mathbf{v}_{m+1}, \ldots, \mathbf{v}_n \in S'' \setminus S$. 換言之, $r_1\mathbf{v}_1 + \cdots + r_m\mathbf{v}_m = (-r_{m+1})\mathbf{v}_{m+1} + \cdots + (-r_n)\mathbf{v}_n \in \mathrm{Span}(S) \cap \mathrm{Span}(S'' \setminus S)$. 然而 $r_1, \ldots, r_m$ 皆不為 0 且 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ 為 linearly independent (因 S 為 linearly independent), 由 Proposition 1.4.3 知 $r_1\mathbf{v}_1 + \cdots + r_m\mathbf{v}_m \neq \mathbf{O}$, 亦即 $\mathrm{Span}(S) \cap \mathrm{Span}(S'' \setminus S) \neq \{\mathbf{O}\}$. 此矛盾告訴我們 S'' 是 linearly independent. $\square$

關於 linearly independent 的例子, 我們很容易驗證在 Example 1.3.5 中介紹的 spanning set 都是 linearly independent. 不過請不要誤以為 spanning set 一定就是 linearly independent. 例如在 $\mathbb{R}^n$ 的情況 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\}$ 也是 $\mathbb{R}^n$ 的 spanning set, 不過就不再是 linearly independent 了.

1.5. Basis and Dimension

當 vector space V 中的一個子集合 S 太小時, 可能 S 無法成為 V 的 spanning set, 不過若 S 太大時, 又可能不是 linearly independent. Basis 就是保持平衡的最佳狀況. 我們有以下之定義.

Definition 1.5.1. 令 V 是一個 vector space over F 且 $S \subseteq V$. 當 $\mathrm{Span}(S) = V$ 且 S 是 linearly independent 時, 我們稱 S 為 V 的一組 basis.

依此定義, 我們可以知道在 Example 1.3.5 中介紹的 $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ 就是 F^n 的一組 basis; 而 $\{1, x, \ldots, x^n\}$ 就是 $P_n(F)$ 的一組 basis; 而當 S 是一個 finite set 時, $\{f_\lambda \mid \lambda \in S\}$ 就是 F^S 的一組 basis.

Question 1.17. 依此定義利用前一節的 *Proposition,* 你能看出 S 是 V 的一組 *basis* 等價於任何 V 中的元素都可以唯一寫成 S 中元素的 *linear combination* 嗎?

Question 1.18. 若 $S' \subsetneq S \subsetneq S''$ 且 S 是 V 的一組 *basis,* 那麼 S', S'' 有可能是 V 的一組 *basis* 嗎? 你能看出此時 $\mathrm{Span}(S') \neq V$ 而 S'' 一定是 *linearly dependent* 嗎?

由上一個 Question 我們知道若 S 是 V 的一組 basis, 則不會有其他的 spanning set 會包含於 S; 另一方面也知不會有其他的 linearly independent set 會包含 S. 這個論述的反向也是正確的, 事實上我們有以下之結果.

Proposition 1.5.2. 令 V 為一個 *vector space over* F 且 $S \subseteq V$. 我們有以下的等價關係.

(1) S 是 V 的一組 *basis.*

(2) S 是 V 的一個 *spanning set,* 且對任意 $S' \subsetneq S$ 皆有 $\mathrm{Span}(S') \neq V$.

(3) S 是 *linearly independent* 且對任意 $S'' \supsetneq S$ 皆有 S'' 為 *linearly dependent.*

Proof. 我們證明 (1)(2) 是等價的, 再證明 (1)(3) 為等價.

((1) $\Rightarrow$ (2)) 因 S 是一組 basis 由定義知 S 是 V 的一組 spanning set. 任取 $S' \subsetneq S$, 利用反證法假設 $\mathrm{Span}(S') = V$. 此時取 $\mathbf{v} \in S \setminus S'$ 可得 $\mathbf{v} \in V = \mathrm{Span}(S') \subseteq \mathrm{Span}(\{\mathbf{w} \in S \mid \mathbf{w} \neq \mathbf{v}\}$. 此與 S 為 linearly independent 相矛盾, 故得 $\mathrm{Span}(S') \neq V$.

((2) $\Rightarrow$ (1)) 因已知 S 為 spanning set, 依定義我們僅要證明 S 為 linearly independent. 利用反證法, 假設 S 為 linearly dependent, 亦即存在 $\mathbf{v} \in S$ 滿足 $\mathbf{v} \in \mathrm{Span}(S \setminus \{\mathbf{v}\})$. 故考慮 $S' = S \setminus \{\mathbf{v}\}$. 因 $S \setminus S' = \{\mathbf{v}\}$, 由 Corollary 1.3.4 知 $\mathrm{Span}(S') = \mathrm{Span}(S) = V$, 但因 $S' \subsetneq S$, 此與 (2) 的前提相矛盾, 故得證 S 為 linearly independent.

((1) $\Rightarrow$ (3)) 因 S 是一組 basis 由定義知 S 為 linearly independent. 任取 $S'' \supsetneq S$, 利用反證法假設 S'' 為 linearly independent. 此時取 $\mathbf{v} \in S'' \setminus S$ 可得 $\mathbf{v} \notin \mathrm{Span}(S)$. 此與 S 為 V 的 spanning set 相矛盾, 故得 S'' 為 linearly dependent.

((3) $\Rightarrow$ (1)) 因已知 S 為 linearly independent, 依定義我們僅要證明 S 為 V 的 spanning set. 利用反證法, 假設 $\mathrm{Span}(S) \neq V$ 為, 亦即存在 $\mathbf{v} \in V$ 滿足 $\mathbf{v} \notin \mathrm{Span}(S)$ (亦即 $\mathrm{Span}(\{\mathbf{v}\}) \cup \mathrm{Span}(S) = \{\mathbf{O}\}$). 故考慮 $S'' = S \cup \{\mathbf{v}\}$. 因 $S'' \setminus S = \{\mathbf{v}\}$, 由 Corollary 1.4.4 知 S'' 為 linearly independent, 但因 $S'' \supsetneq S$, 此與 (3) 的前提相矛盾, 故得證 S 為 V 的 spanning set.

□

在本講義中我們將專注於有一組 finite set 為 basis 的 vector space, 我們有以下之定義.

Definition 1.5.3. 假設 V 是一個 vector space over F. 若 $V = \{\mathbf{O}\}$ 或是存在一個 finite set $S \subseteq F$ 是 V 的一組 basis, 則稱 V 為一個 *finite dimensional* F-space.

注意在此我們特別將 $V = \{\mathbf{O}\}$ 這個情況列出, 主要是依定義 $\mathrm{Span}(\emptyset) = \{\mathbf{O}\}$, 所以我們定義 $\emptyset$ 為 $\{\mathbf{O}\}$ 的 basis. 在前面提過的例子 F^n, $P_n(F)$ 以及當 S 是 finite set 的 F^S 皆為 finite dimensional vector space over F. 不過要特別注意若 F' 是 F 的一個 subfield, 前面提過一個 F-space 可看成為 F'-space, 因此在此情況一定要強調是 over 哪一個 filed 為 finite dimensional, 因為有可能一個 finite dimensional F-space 不是 finite dimensional F'-space. 例如 $\mathbb{R}^n$ 是 finite dimensional $\mathbb{R}$-space 卻不是 finite dimensional $\mathbb{Q}$-space.

我們在 Definition 1.5.1 中定義了何謂 vector space 的 basis, 但我們還沒有去探討是否一個 vector space 一定會有一組 basis. 所以依目前的定義一個 vector space 若不是 finite dimensional 則有可能它沒有 basis 或是有 basis 但是所有的 basis 皆為 infinite set. 事實前者不會發生, 也就是說我們可以證明所有的 vector space 都會有 basis, 不過它的證明牽涉到所謂 Zorn's lemma. 由於以後我們將只專注於 finite dimensional vector space, 再加上有些同學可能覺得 Zorn's lemma 不是很容易了解. 以下我們的探討將分為兩段: 第一段專注於 finite dimensional 的情形; 第二段談的是一般的情形. 第一段的內容相當重要, 而第二段談的就是所有的 vector space 皆會有 basis. (大家可以直接接受這個事實而略過第二段).

1.5.1. Finite Dimensional Case. 當 V 是 finite dimensional vector space, 依定義是有一個 finite set 為 V 的一組 basis. 會不會有一個 infinite set 也是 V 的一組 basis 呢? 答案是不會的, 事實上這時候每一個組成 V 的 basis 的集合它們的元素個數是相同的. 以下我們便是要處理這一個問題. 為了方便起見, 給定一個 finite set S, 我們用 $\#(S)$ 來表示 S 中元素的個數.

Lemma 1.5.4. 令 V 是一個 *vector space over* F 且假設 $S \subseteq V$ 是一個 *finite set* 滿足 $\mathrm{Span}(S) = V$. 若 $S' \subseteq V$ 且 $\#(S') > \#(S)$, 則 S' 為 *linearly dependent.*

Proof. 令 $S = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$, $S' = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\}$ 其中 $m > n$. 利用反證法, 我們假設 S' 為 linearly independent.

由於 $\mathrm{Span}(S) = V$, 故存在 $r_1, \dots, r_n \in F$ 使得 $\mathbf{u}_1 = r_1\mathbf{v}_1 + \cdots + r_n\mathbf{v}_n$. 因假設 S' 為 linearly independent, 我們知 $r_1, \dots, r_n$ 不全為 0. (否則 $r_1 = \cdots = r_n = 0$ 會導致 $\mathbf{O} = \mathbf{u}_1 \in S'$, 那麼 S' 就不會是 linearly independent 了.) 因此不失一般性, 我們假設 $r_1 \neq 0$, 此時

$$\mathbf{v}_1 = r_1^{-1}(\mathbf{u}_1 - r_2\mathbf{u}_2 - \cdots - r_n\mathbf{v}_n) \in \mathrm{Span}(\{\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}).$$

故利用 Corollary 1.3.4 知

$$\mathrm{Span}(\{\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}) = \mathrm{Span}(\{\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}) = V.$$

接著利用 $\mathbf{u}_2 \in \mathrm{Span}(\{\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\})$ 知存在 $s_1, \dots, s_n \in F$ 使得 $\mathbf{u}_2 = s_1\mathbf{v}_1 + s_2\mathbf{u}_2 + \cdots + s_n\mathbf{u}_n$. 同理利用 S' 為 linearly independent 的假設, 得 $s_2, \dots, s_n$ 不全為 0. (否則若 $s_2 = \cdots = s_n = 0$, 則得 $\mathbf{u}_2 = s_1\mathbf{u}_1 \in \mathrm{Span}(\{\mathbf{u}_1\})$, 那麼 S' 就不會是 linearly independent 了.) 故不失一般性, 我們假設 $s_2 \neq 0$, 此時

$$\mathbf{v}_2 = s_2^{-1}(\mathbf{u}_2 - s_1\mathbf{u}_1 - s_3\mathbf{v}_3 - \cdots - s_n\mathbf{v}_n) \in \mathrm{Span}(\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n\}).$$

故利用 Corollary 1.3.4 知

$$\mathrm{Span}(\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n\}) = \mathrm{Span}(\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}) = V.$$

簡單來說, 我們將 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ 做適當排序後, 可以用 $\mathbf{u}_1$ 取代 $\mathbf{v}_1$; $\mathbf{u}_2$ 取代 $\mathbf{v}_2$, ... 如此一直下去. 利用數學歸納法, 我們假設 $k < n$ 且 $\mathrm{Span}(\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_n\}) = V$, 想要用 $\mathbf{u}_{k+1}$ 來取代剩下的某個 $\mathbf{v}_i$. 如同前面的做法, 我們知道存在 $t_1, \dots, t_n \in F$ 使得 $\mathbf{u}_{k+1} = t_1\mathbf{u}_1 + \cdots + t_k\mathbf{u}_k + t_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} + \cdots t_n\mathbf{v}_n$. 利用 S' 為 linearly independent 的假設, 得 $t_{k+1}, \dots, t_n$ 不全為 0. 故不失一般性, 我們假設 $t_{k+1} \neq 0$, 此時

$$\mathbf{v}_{k+1} = t_{k+1}^{-1}(\mathbf{u}_{k+1} - t_1\mathbf{u}_1 - \cdots - t_k\mathbf{u}_k - t_{k+2}\mathbf{v}_{k+2} \cdots - t_n\mathbf{v}_n) \in \mathrm{Span}(\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{v}_{k+2}, \dots, \mathbf{v}_n\}).$$

故利用 Corollary 1.3.4 知

$$\mathrm{Span}(\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{v}_{k+2}, \dots, \mathbf{v}_n\}) = \mathrm{Span}(\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_n\}) = V.$$

數學歸納法告訴我們, 可以如此一直下去直到將所有的 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ 置換完畢, 亦即得 $\mathrm{Span}(\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}) = V$. 不過如此一來會造成 $\mathbf{u}_{n+1} \in \mathrm{Span}(\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\})$ 而與 S' 為 linearly independent 相矛盾, 故 S' 必為 linearly dependent. $\square$

Question 1.19. 在 *Lemma 1.5.4* 中若將 S 為 *spanning set* 改為 *linearly dependent,* 當 $S' \subseteq V$, 你覺得 S' 相對應的有關於 *spanning set* 的性質應該是甚麼?

Lemma 1.5.4 是有關 finite dimensional vector space 相當重要的定理, 它告訴我們一個 linearly independent set 的元素個數不可以有多於一個 spanning set 的元素個數. 我們有以下幾個重要應用.

Theorem 1.5.5. 假設 V 是一個 *finite dimensional vector space.* 若 S 為 V 的一組 *basis,* 則 S 是一個 *finite set.* 另外若 S' 亦為 V 的一組 *basis,* 則 $\#(S) = \#(S')$.

Proof. 依 V 為 finite dimensional vector space 之假設, 存在 $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ 為 V 的一組 basis. 故我們有 $\mathrm{Span}(\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}) = V$.

今若 S 為 V 的一組 basis 且為 infinite set, 由於 S 為 linearly independent, S 的任何 subset 亦為 linearly independent. 故任取 $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n+1} \in S$, $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n+1}\} \subseteq S$ 亦為 linearly independent, 此明顯與 Lemma 1.5.4 相矛盾, 故知 S 必為 finite set.

現若 S, S' 皆為 V 的一組 basis, 由於 $\mathrm{Span}(S) = V$ 且 S' 為 linearly independent, Lemma 1.5.4 告訴我們 $\#(S) \geq \#(S')$. 同理由 $\mathrm{Span}(S') = V$ 以及 S 為 linearly independent, 得 $\#(S) \leq \#(S')$. 故得證 $\#(S) = \#(S')$. □

由 Theorem 1.5.5 知一個 finite dimension vector space 它的任一組 basis 的元素個數是固定的. 因此我們有以下之定義.

Definition 1.5.6. 令 V 為一個 finite dimensional vector space over F. 若 S 為 V 的一組 basis 且 $\#(S) = n$, 則稱 V over F 的 *dimension* 為 n, 記做 $\dim(V) = n$.

依此定義由於我們視 $\emptyset$ 為 $\{\mathbf{O}\}$ 的 basis, 故 $\dim(\{\mathbf{O}\}) = 0$.

注意, 我們談過當 V 看成 over 不同 field 的 vector space 時, 其 dimension 就可能不同了. 當這種情形發生時, 我們特別用 $\dim_F(V)$ 來強調是 over F 的 dimension. 例如複數 $\mathbb{C}$ 可看成是 over $\mathbb{C}$ 或 over $\mathbb{R}$ 的 vector space, 而我們有 $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$ 及 $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$.

Question 1.20. 你知道 $\dim_F(F^n)$, $\dim_F(P_n(F))$ 以及 $\dim_F(F^S)$ *(*S 為 *finite set)* 為何嗎? 又若 S 為 *infinite set,* 如何說明 F^S 不是 *finite dimensional* F*-space?*

Question 1.21. 設 V 為 *finite dimensional* F*-space* 且令 $\dim(V) = n$. 若 $S' \subseteq V$ 為 *linearly independent* 及 $S'' \subseteq V$ 為 V 的一個 *spanning set,* 則 $\#(S')$ 和 $\#(S'')$ 與 n 的關係為何?

利用 dimension 我們可將 Proposition 1.5.2 化為以下形式.

Corollary 1.5.7. 令 V 為一個 *finite dimensional vector space over* F 且 $S' \subseteq V$. 我們有以下的等價關係.

(1) S 是 V 的一組 *basis.*

(2) S 是 V 的一個 *spanning set* 且 $\#(S) = \dim(V)$.

(3) S 是 *linearly independent* 且 $\#(S) = dim(V)$.

Proof. 令 $\dim(V) = n$. 若 S 是 V 的一組 basis, 依定義 S 為 V 的 spanning set 且 S 為 linearly independent. 又由 dimension 的定義知 $\#(S) = \dim(V)$. 故 (1) $\Rightarrow$ (2) 且 (1) $\Rightarrow$ (3).

(2) $\Rightarrow$ (1): 對任意 $S' \subsetneq S$, 我們有 $\#(S') < \#(S) = n$. 若 $\mathrm{Span}(S') = V$, 由 Lemma 1.5.4 知任意 n 個元素所成的集合皆不可能為 linearly independent, 此與 $\dim(V) = n$ 相矛盾. 故知 $\mathrm{Span}(S') \neq V$ 因此由 Proposition 1.5.2 ((2) $\Rightarrow$ (1)) 得證 S 為 V 的一組 basis.

(3) $\Rightarrow$ (1): 對任意 $S'' \supsetneq S$, 我們有 $\#(S'') > \#(S) = n$. 因 $\dim(V) = n$ 表示 V 中存在一個有 n 個元素的 spanning set, 由 Lemma 1.5.4 知 S'' 必為 linearly dependent. 因此由 Proposition 1.5.2 ((3) $\Rightarrow$ (1)) 得證 S 為 V 的一組 basis. $\square$

若 V 是一個 finite dimensional F-space, 而 W 是 V 的 nontrivial F-subspace, 是否 W 也是 finite dimensional F-space 呢? 要注意, 我們不能直接套用 Lemma 1.5.4 來回答這個問題, 因為我們不知是否 W 有 basis, 不過我們可以利用 Proposition 1.5.2 的想法幫助我們解決這個問題.

我們說明 W 的 basis 是存在的. 考慮 $S_1 = \{\mathbf{v}_1\}$, 其中 $\mathbf{v}_1 \in W$ 且 $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{O}$. 依定義 S_1 是 linearly independent. 若 $\mathrm{Span}(S_1) = W$, 則得到 S_1 為 W 的一組 basis; 而若 $\mathrm{Span}(S_1) \neq W$, 則任取 $\mathbf{v}_2 \in W \setminus \mathrm{Span}(S_1)$. 令 $S_2 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, 依定義 S_2 亦為 linearly independent. 若 $\mathrm{Span}(S_2) = W$, 則得到 S_2 為 W 的一組 basis; 而若 $\mathrm{Span}(S_2) \neq W$, 我們再加 $\mathbf{v}_3 \in W \setminus \mathrm{Span}(S_2)$ 得 $S_3 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, 由 Corollary 1.4.4 知 S_3 亦為 linearly independent. 如此一直下去得 $S_3, S_4, \ldots$ 其中 S_i 皆為 linearly independent. 若這個步驟無法停止 (即對所有 $n \in \mathbb{N}$ 皆無法得 $\mathrm{Span}(S_n) = W$) 表示對任意 $n \in \mathbb{N}$, 在 V 中皆存在有 n 個元素的集合 S_n 是 linearly independent. 但 V 是 finite dimensional vector space, 若 $n > \dim(V)$, 依 Lemma 1.5.4 知 S_n 不可能是 linearly independent. 因此這個步驟一定要停止, 亦即存在一個 m 使得 $\mathrm{Span}(S_m) = W$ 也就是說 S_m 是 W 的一組 basis, 故 W 亦為 finite dimensional F-space. 我們有以下之結果.

Theorem 1.5.8. 若 V 為一個 *finite dimensional F-space* 且 W 為 V 的一個 *nontrivial F-subspace,* 則 W 亦為 *finite dimensional F-space,* 且 $\dim(W) < \dim(V)$.

Proof. 前面已證得 W 為 finite dimensional F-space. 現假設 S 為 W 的一組 basis, 因 S 為 linearly independent, 由 Lemma 1.5.4 知 $\dim(W) = \#(S) \leq \dim(V)$. 若 $\#(S) = \dim(V)$, 則由 Corollary 1.5.7 ((3) $\Rightarrow$ (1)) 知 S 亦為 V 的一組 basis, 得 $W = \mathrm{Span}(S) = V$. 此與 W 為 nontrivial subspace 相矛盾, 故知 $\dim(W) < dim(V)$. $\square$

在 Theorem 1.5.8 的證明過程中, 我們事實上是將一個 finite dimensional vector space 中的一組 linearly independent 的子集合設法加入元素且保持 linearly independent, 這樣一直擴大到無法再擴大為止, 然後就可以由 Proposition 1.5.2 得知此為一組 basis. 相對應的, 一個 spanning set 我們也可以設法在其中取出元素且保持仍為 spanning set 直到無法再縮小為止, 此時也可由 Proposition 1.5.2 得知其為一組 basis. 我們有以下之結果.

Theorem 1.5.9. 若 V 為一個 *finite dimensional* F*-space* 且 $S' \subseteq S'' \subseteq V$, 其中 S' 為 *linearly independent* 而 S'' 為 V 的 *spanning set,* 則 V 有一組 *basis* S 滿足 $S' \subseteq S \subseteq S''$.

Proof. 我們在 S' 中逐一加入 $S'' \setminus S'$ 的元素使其仍保持 linearly independent. 由於 V 是 finite dimensional vector space, 由 Lemma 1.5.4 知不可能一直如此將 S' 擴大下去. 我們令加入元素到最後不能再擴大的集合為 S, 也就是說 $S'' \setminus S$ 中的元素都在 $\mathrm{Span}(S)$ 中. 依假設 S 為 linearly independent, 所以我們要證明 $\mathrm{Span}(S) = V$, 亦即 $\mathrm{Span}(S) = \mathrm{Span}(S'')$. 然而依 S 的選取方式, $S'' \setminus S \subseteq \mathrm{Span}(S)$, 故 Corollary 1.3.4 告訴我們這是成立的. □

我們再強調 Theorem 1.5.9 中 S 的選取並不一定是唯一的, 但是 S 中元素個數是固定的, 即為 $\dim(V)$.

Question 1.22. 你能看出 *Theorem 1.5.9* 告訴我們一個 *finite dimensional vector space* 中的一個 *linearly independent set* 皆可擴大成為一組 *basis;* 而一個 *spanning set* 皆可縮小成為一組 *basis?*

下一段我們談論一般 vector space 時, 就是利用和 Theorem 1.5.9 類似的結果 (除去 finite dimensional 的假設) 來證明所有的 vector space 皆存在一組 basis.

1.5.2. General Case. 在這一小段中我們要說明所有的 vector space 皆存在一組 basis. 由於這個證明需用到 Zorn's Lemma 而且以後我們不會用到這個結果, 所以若可以接受這個事實的同學, 可將此當成已知, 略過這一小段不讀.

要證明所有的 vector space 皆存在一組 basis, 我們可以沿用前面的想法, 一個一個加入此 vector space 中的元素且保持 linearly independent, 直到不能再加為止. 但問題是我們無法得知這樣的步驟一定會停止 (除非事先知道此 vector space 為 finite dimensional). 所以要利用 Proposition 1.5.2 得到一組 basis 我們必須用到 Zorn's Lemma. 首先我們將簡單的介紹一下這個 Lemma.

通常在一個集合中給定了比較大小 (order) 的關係後, 有可能這個集合中每個元素相互間都可比較大小 (例如實數上的大於, 小於關係), 我們稱此為 totally ordered; 也有可能兩個元素間並不一定能比較大小 (例如集合間的包含關係), 我們稱此為 partially ordered. 在 totally ordered 的情形, 當我們談到 maximal element 時, 指的是此元素比其他的元素大; 不過若在 partially ordered 的情形這樣的定義並不合理, 因為並不是所有的元素都可以比大小. 所以在此時 maximal element 指的是沒有其他的元素比該元素大. 同樣的道理, minimal element 指的便是沒有其他的元素比該元素小. 利用這種說法一個 vector space 的一組 basis 利用 Proposition 1.5.2 便可以說成就是該 vector space 中所有 spanning set 的 minimal element; 也可以說是該 vector space 中所有 linearly independent set 的 maximal element. 所以要說明一個 vector space 的 basis 是存在的, 我們必須說明此 vector space 中所有 linearly independent set 的 maximal element 是存在的 (或所有 spanning set 的 minimal element 存在). 這就是我們需要 Zorn's Lemma 的地方.

Zorn's Lemma 是一個檢查 partially ordered set 的 maximal element 存在的方法. 它說若一個非空的 partially ordered set $\mathscr{P}$ 中任取一個遞增的序列 (ascending chain) 皆可在 $\mathscr{P}$ 中找到一元素比此序列中的所有元素都大, 則 $\mathscr{P}$ 的 maximal element 便會存在. 所以目前的情形, 要使用 Zorn's Lemma, 我們可以考慮一個 vector space V 中所有的 linearly independent set 所成的集合 $\mathscr{P}$. 也就是說 $\mathscr{P}$ 中的元素都是 V 的一組 linearly independent set. 我們考慮 $\mathscr{P}$ 中元素的包含關係所形成的 partial order. 此時 $\mathscr{P}$ 中任意的 ascending chain, 即為 $S_1 \subseteq S_2 \subseteq \cdots \subseteq S_n \subseteq \cdots$ 這種遞增的 linearly independent sets (其中 S_i 皆在 $\mathscr{P}$ 所以都是 V 的 linearly independent set). 若我們在 $\mathscr{P}$ 中能找到 S (即 S 為 V 的一組 linearly independent set) 滿足 $S_i \subseteq S, \forall i \in \mathbb{N}$, 則由 Zorn's Lemma 得知 $\mathscr{P}$ 中會有 maximal element. 事實上我們有以下有關於 Theorem 1.5.9 的推廣.

Theorem 1.5.10. 若 V 為一個 *vector space* 且 $S' \subseteq S'' \subseteq V$, 其中 S' 為 *linearly independent* 而 S'' 為 V 的 *spanning set,* 則 V 有一組 *basis* S 滿足 $S' \subseteq S \subseteq S''$.

Proof. 考慮 $\mathscr{P} = \{S \subseteq V \mid S \text{ is linearly independent}, S' \subseteq S \subseteq S''\}$. 注意, 因 $S' \in \mathscr{P}$, 故 $\mathscr{P}$ 為 nonempty. 今任取 $S_1 \subseteq S_2 \subseteq \cdots$, 其中對所有 $i \in \mathbb{N}$, S_i 皆在 $\mathscr{P}$. 首先令 $T = \cup_{i\in\mathbb{N}} S_i$. 我們要說明 T 在 $\mathscr{P}$ 中, 亦即 T 為 linearly independent 且 $S' \subseteq T \subseteq S''$. 因 S_i 皆滿足 $S' \subseteq S_i \subseteq S''$, 很自然的 $S' \subseteq T \subseteq S''$. 現假設 T 不為 linearly independent, 依定義此即表示存在 $\mathbf{v} \in T$ 且 $\mathbf{v} \in \operatorname{Span}(T \setminus \{\mathbf{v}\})$. 也就是說存在 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in T$ 且這些 $\mathbf{v}_i$ 皆不等於 $\mathbf{v}$ 使得 $\mathbf{v} \in \operatorname{Span}(\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\})$. 因 $\mathbf{v} \in T$ 故由 $T = \cup_{i\in\mathbb{N}} S_i$ 知 $\mathbf{v}$ 會落在某個 S_k 中 (也因此會落在 $S_{k+1}, S_{k+2}, \ldots$), 同理每個 $\mathbf{v}_i$ 也會落在某個 S_{k_i} 中. 因此我們僅要取 $m = \max\{k, k_1, \ldots, k_n\}$, 則可得 $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ 皆在 S_m 中. 故由 $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subseteq S_m \setminus \{\mathbf{v}\}$, 得 $\mathbf{v} \in \operatorname{Span}(S_m \setminus \{\mathbf{v}\})$, 此與 S_m 為 linearly independent (因假設 S_m 在 $\mathscr{P}$ 中) 相矛盾故得證 T 為 linearly independent. 因此知 T 為 $\mathscr{P}$ 的一個元素且滿足 $S_i \subseteq T, \forall i \in \mathbb{N}$, 故由 Zorn's Lemma 得知 $\mathscr{P}$ 中存在著 maximal element, 我們令 S 為 $\mathscr{P}$ 的一個 maximal element.

接下來我們要證明 S 確為 V 的一組 basis, 且滿足 $S' \subseteq S \subseteq S''$. 首先 S 為 $\mathscr{P}$ 裡的元素, 自然有 S 為 linearly independent 且 $S' \subseteq S \subseteq S''$, 所以我們僅剩要證明 $\operatorname{Span}(S) = V$. 現假設 $\operatorname{Span}(S) \neq V = \operatorname{Span}(S'')$, 由 Corollary 1.3.4 知存在 $\mathbf{w} \in S''$ 但 $\mathbf{w} \notin \operatorname{Span}(S)$. 此時考慮 $S^+ = S \cup \{\mathbf{w}\}$. 很明顯的 $S' \subseteq S^+ \subseteq S''$, 然而 Corollary 1.4.4 告訴我們 S^+ 仍為 linearly independent, 因此 S^+ 亦為 $\mathscr{P}$ 的一個元素. 但是 $S \subsetneq S^+$, 此與 S 為 $\mathscr{P}$ 中的 maximal element 相矛盾, 故得證 $\operatorname{Span}(S) = V$. □

1.6. Direct Sum and Quotient Space

前面介紹 subspace 時, 我們談到幾種建構 subspace 的方法, 那些方法所得的 vector space 都是在原先的 vector space 中. 在這節中, 我們將介紹兩個建構“全新”的 vector space 的方法.

1.6.1. Direct Sum. 給定兩個 over F 的 vector spaces U,W (這裡不需假設 U,W 是某個 vector space 的 subspaces) 我們考慮一個新的集合

$$U \oplus W = \{(\mathbf{u},\mathbf{w}) \mid \mathbf{u} \in U, \mathbf{w} \in W\}.$$

稱此集合為 the (*external*) *direct sum* of U and W. 要注意 $U \oplus W$ 是一個新的集合, 所以我們要說明這個集合裡的元素怎樣才會相等 (這就好像當我們介紹多項式時要說明何謂多項式的相等). 在這裡我們要求若 $(\mathbf{u}_1,\mathbf{w}_1) = (\mathbf{u}_2,\mathbf{w}_2)$, 則 $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$ 且 $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_2$.

我們可以利用 U,W 本身為 vector space 的性質定義在 $U \oplus W$ 中的運算及 F 的作用. 給定 $(\mathbf{u}_1,\mathbf{w}_1),(\mathbf{u}_2,\mathbf{w}_2) \in U \oplus W$ 及 $r \in F$, 我們定義

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}_1,\mathbf{w}_1)+(\mathbf{u}_2,\mathbf{w}_2) &= (\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2,\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2)\\ r(\mathbf{u}_1,\mathbf{w}_1) &= (r\mathbf{u}_1,r\mathbf{w}_1)\end{aligned}$$

在此定義之下, 很容易檢查 $U \oplus W$ 為一個 vector space over F.

Question 1.23. 請檢查 $U \oplus W$ 為一個 *vector space over* F. 你知道為什麼不能僅檢查封閉性呢? $U \oplus W$ 的 $\mathbf{O}$ (加法單位元素) 應該長什麼樣子呢?

Question 1.24. 若 U',W' 分別為 U,W 的 *subspaces,* 試證明 $U' \oplus W'$ 是 $U \oplus W$ 的 *subspace.* 反過來若 V 為 $U \oplus W$ 的 *subspace,* 是否可找到 U,W 的 *subspaces* U',W' 使得 $V = U' \oplus W'$?

若 U,W 為 finite dimensional F-spaces, 我們自然會問是否 $U \oplus W$ 亦為 finite dimensional F-space, 且其 dimension 為何?

Proposition 1.6.1. 假設 U,W 為 *finite dimensional F-spaces,* 則 $U \oplus W$ 亦為 *finite dimensional F-space,* 且

$$\dim(U \oplus W) = \dim(U) + \dim(W).$$

Proof. 設 $\{\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_m\}$ 為 U 的一組 basis 且 $\{\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_n\}$ 為 W 的一組 basis. 我們僅要證明 $S = \{(\mathbf{u}_1,\mathbf{O}_W),\ldots,(\mathbf{u}_m,\mathbf{O}_W),(\mathbf{O}_U,\mathbf{w}_1),\ldots,(\mathbf{O}_U,\mathbf{w}_n)\}$ 為 $U \oplus W$ 的一組 basis (其中 $\mathbf{O}_U,\mathbf{O}_W$ 分別表 U,W 中的加法單位元素).

首先我們證明 S 為 $U \oplus W$ 的一組 spanning set. 對任意 $(\mathbf{u},\mathbf{w}) \in U \oplus W$, 由於 $\mathbf{u} \in U$ 且 $\{\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_m\}$ 為 U 的一組 basis, 故存在 $c_1,\ldots,c_m \in F$ 使得 $\mathbf{u} = c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_m\mathbf{u}_m$. 同理存在 $d_1,\ldots,d_n \in F$ 使得 $\mathbf{w} = d_1\mathbf{w}_1 + \cdots + d_n\mathbf{w}_n$. 因此得

$$(\mathbf{u},\mathbf{w}) = c_1(\mathbf{u}_1,\mathbf{O}_W) + \cdots + c_m(\mathbf{u}_m,\mathbf{O}_W) + d_1(\mathbf{O}_U,\mathbf{w}_1) + \cdots + d_n(\mathbf{O}_U,\mathbf{w}_n),$$

故得證 S 為 $U \oplus W$ 的一組 spanning set.

最後我們要證明 S 為 linearly independent. 用反證法, 假設 S 為 linearly dependent, 由 Proposition 1.4.2 知存在 $c_1,\ldots,c_m,d_1,\ldots,d_n$ 不全為 0 使得

$$(\mathbf{O}_U,\mathbf{O}_W) = c_1(\mathbf{u}_1,\mathbf{O}_W) + \cdots + c_m(\mathbf{u}_m,\mathbf{O}_W) + d_1(\mathbf{O}_U,\mathbf{w}_1) + \cdots + d_n(\mathbf{O}_U,\mathbf{w}_n),$$

依 $U \oplus W$ 中元素相等的定義此即 $\mathbf{O}_U = c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_m\mathbf{u}_m$ 且 $\mathbf{O}_W = d_1\mathbf{w}_1 + \cdots + d_n\mathbf{w}_n$. 由於 $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ 和 $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ 皆為 linearly independent 可得 $c_1, \ldots, c_m$ 和 $d_1, \ldots, d_n$ 皆為 0, 此與之前假設相矛盾. 故得證 S 為 linearly independent. □

最後我們要強調要 over 相同的 field 的 vector spaces 才可以談論其 direct sum. 另外我們可以將兩個 F-spaces 的 direct sum 的定義推廣到任意有限多個 F-spaces 的 direct sum.

Question 1.25. 假設 $U_1, \ldots, U_n$ 為 *F-spaces,* 你認為 $U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$ 的定義應為何? 又若 $U_1, \ldots, U_n$ 皆為 *finite dimensional F-spaces,* 則 $\dim(U_1 \oplus \cdots \oplus U_n)$ 為何?

1.6.2. Quotient Space. 給定 vector space V 及其 subspace W, 我們可以利用 W 在 V 中定義一個 equivalent relation, 其定義為對任意 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$, $\mathbf{v}_1 \sim \mathbf{v}_2$ 若且唯若 $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \in W$. 我們來說明一下這是一個 equivalent relation.

(1) 對任意 $\mathbf{v} \in V$ 皆有 $\mathbf{v} \sim \mathbf{v}$: 這是因為 $\mathbf{O} \in W$, 故 $\mathbf{v} - \mathbf{v} \in W$.
(2) 若 $\mathbf{v}_1 \sim \mathbf{v}_2$, 則 $\mathbf{v}_2 \sim \mathbf{v}_1$: 這是因為 $\mathbf{v}_1 \sim \mathbf{v}_2$ 表示 $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \in W$, 故由 W 為 vector space 知 $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = -(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \in W$, 亦即 $\mathbf{v}_2 \sim \mathbf{v}_1$.
(3) 若 $\mathbf{v}_1 \sim \mathbf{v}_2$ 且 $\mathbf{v}_2 \sim \mathbf{v}_3$, 則 $\mathbf{v}_1 \sim \mathbf{v}_3$: 這是因為由 $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \in W$ 以及 $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 \in W$, 可得 $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3 = (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) + (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3) \in W$.

由於這一個 equivalent relation, 我們定義一個新的集合

$$V/W = \{\overline{\mathbf{v}} \mid v \in V\}.$$

當然了我們要說明 V/W 上的元素怎樣才會相等, 在這裡我們要求 $\overline{\mathbf{u}} = \overline{\mathbf{v}}$ 若且唯若 $\mathbf{u} \sim \mathbf{v}$ (亦即 $\mathbf{u} - \mathbf{v} \in W$).

Question 1.26. 前面為什麼要去說明 $\sim$ 是一個 *equivalent relation* 才能定義 V/W 呢?

若學過代數 group 的同學可以看出因為 V 在加法上是一個 abelian group, 而 W 為 V 的 (normal) subgroup, 所以我們可以定出 V/W 上的運算使其成為一個 abelian group. 事實上我們還可以定出 F 對 V/W 上元素的作用使得 V/W 為一個 vector space over F. 其定義為對任意的 $\overline{\mathbf{u}}, \overline{\mathbf{v}} \in V/W$ 且 $r \in F$, 我們定

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{u}} + \overline{\mathbf{v}} &= \overline{\mathbf{u} + \mathbf{v}} \\ r\overline{\mathbf{v}} &= \overline{r\mathbf{v}}. \end{aligned}$$

因 W 為 V 的 subspace, 很容易驗證這個 V/W 的運算與作用皆為 well-defined, 而且我們可得 V/W 為一個 vector space over F, 稱之為 the *quotient space* of V *modulo* W.

Question 1.27. 請驗證這個運算是 *well-defined* 且 V/W 是一個 *vector space over F*. 什麼是 V/W 上的加法單位元素呢?

Question 1.28. 若 U 為 V 的 *subspace* 且 $W \subseteq U$, 則 U/W 為 V/W 的 *subspace* 嗎? $W \subseteq U$ 這個假設是需要的嗎?

若 V,W 為 finite dimensional F-spaces, 我們自然會問是否 V/W 亦為 finite dimensional F-space, 且其 dimension 為何?

Proposition 1.6.2. 假設 V 為 *finite dimensional F-spaces* 且 W 為 V 的一個 *F-subspace,* 則 V/W 亦為 *finite dimensional F-space,* 且

$$\dim(V/W) = \dim(V) - \dim(W).$$

Proof. 由 Theorem 1.5.8 我們知 W 亦為 finite dimensional F-space. 設 $\{\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_m\}$ 為 W 的一組 basis, 由 Theorem 1.5.9 知存在 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n \in V$ 使得 $\{\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_m,\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n\}$ 為 V 的一組 basis. 我們要證明 $S = \{\overline{\mathbf{v}_1},\dots,\overline{\mathbf{v}_n}\}$ 為 V/W 的一組 basis.

首先我們證明 S 為 V/W 的一組 spanning set. 對任意 $\overline{\mathbf{v}} \in V/W$, 由於 $\mathbf{v} \in V$ 且 $\{\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_m,\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n\}$ 為 V 的一組 basis, 故存在 $c_1,\dots,c_m,d_1,\dots,d_n \in F$ 使得

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{w}_1 + \cdots + c_m\mathbf{w}_m + d_1\mathbf{v}_1 + \cdots + d_n\mathbf{v}_n.$$

因此依定義得

$$\overline{\mathbf{v}} = c_1\overline{\mathbf{w}_1} + \cdots + c_m\overline{\mathbf{w}_m} + d_1\overline{\mathbf{v}_1} + \cdots + d_n\overline{\mathbf{v}_n}.$$

然而對所有 $\overline{\mathbf{w}_i}$ 因 $\mathbf{w}_i \in W$, 我們有 $\overline{\mathbf{w}_i} = \overline{\mathbf{O}}$, 因此

$$\overline{\mathbf{v}} = d_1\overline{\mathbf{v}_1} + \cdots + d_n\overline{\mathbf{v}_n}.$$

故得證 S 為 V/W 的一組 spanning set.

最後我們要證明 S 為 linearly independent. 用反證法, 假設 S 為 linearly dependent, 由 Proposition 1.4.2 知存在 $d_1,\dots,d_n \in F$ 不全為 0 使得 $\overline{\mathbf{O}} = d_1\overline{\mathbf{v}_1} + \cdots + d_n\overline{\mathbf{v}_n}$. 依定義此即 $d_1\mathbf{v}_1 + \cdots + d_n\mathbf{v}_n \in W = \operatorname{Span}(\{\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_m\})$, 故知

$$d_1\mathbf{v}_1 + \cdots + d_n\mathbf{v}_n \in \operatorname{Span}(\{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n\}) \cap \operatorname{Span}(\{\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_m\}).$$

然而 S 為 linearly independent, 由 Corollary 1.4.4 知

$$\operatorname{Span}(\{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n\}) \cap \operatorname{Span}(\{\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_m\}) = \{\mathbf{O}\},$$

故得 $d_1\mathbf{v}_1 + \cdots + d_n\mathbf{v}_n = \mathbf{O}$. 由於 $d_1,\dots,d_n$ 不全為 0, 此與 $\{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n\}$ 為 linearly independent 相矛盾. 故得證 S 為 linearly independent. □