大學線性代數再探

李華介

國立台灣師範大學數學系

前言

本講義主要目的是針對大三學生介紹有關線性代數進一步的理論. 主要是著重於一個 linear operator 的結構問題. 先備知識在線性代數方面需了解矩陣的運算, 行列式的性質等. 至於向量空間以及 linear transformation 等基本性質, 在本講義會再次介紹. 另外代數方面需了解 field 的基本性質以及 over 一個 field 的 polynomial ring 的代數結構 (即多項式環的除法原理).

本講義雖然主要以中文撰寫, 不過當涉及定義或專有名詞時, 為免翻譯的困擾將以英文取代. 因此將以中英夾雜較不傳統的方式顯現, 若有不便請見諒.

本講義編寫費時, 編寫完後並未經過嚴謹的校對. 疏漏在所難免, 雖不至於有理論性上嚴重的錯誤, 但讀者仍應注意不宜概括全收. 若發現錯誤, 歡迎提出寶貴的意見.

Chapter 2

Linear Transformations

在學習數學的過程中大家應該體會到函數的重要性. 在不同課程中我們討論的函數對象都不同, 例如在微積分中我們有興趣於連續函數、可微函數; 而在群與環中我們有興趣於 group homomorphisms 及 ring homomorphisms. 在線性代數中我們有興趣的函數是希望能保持 vector spaces 中的運算與作用, 也就是所謂的 linear transformations.

2.1. Definition and Basic Properties

Definition 2.1.1. 設 V,W 皆為 over F 的 vector spaces. 給定一個從 V 到 W 的函數 $T:V\to W$, 若對所有 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\in V$ 以及 $r\in F$ 皆有 $T(r\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)=rT(\mathbf{v}_1)+T(\mathbf{v}_2)$, 則稱 T 為 *linear transformation* (或 *linear mapping*) from V to W.

有時候我們會簡稱為 T is F-linear. 另外我們用 $\mathscr{L}(V,W)$ 表示所有從 V 到 W 的 linear transformations 所成之集合.

Question 2.1. *你看得出來 T is F-linear 等價於對所有 $\mathbf{v},\mathbf{v}'\in V$ 以及 $r\in F$ 皆有 $T(\mathbf{v}+\mathbf{v}')=T(\mathbf{v})+T(\mathbf{v}')$ 以及 $T(r\mathbf{v})=rT(\mathbf{v})$ 嗎?*

接著我們將介紹一些有關於 linear transformation 的基本性質, 由於 linear transformation 可能牽涉到不同 vector spaces, 我們用 $\mathbf{O}_V$ 來表示 V 的加法單位元素.

Proposition 2.1.2. *若 $T:V\to W$ 為一個 linear transformation, 則*

(1) $T(\mathbf{O}_V)=\mathbf{O}_W$

(2) 對所有 $\mathbf{v}\in V$ 皆有 $T(-\mathbf{v})=-T(\mathbf{v})$.

Proof.

(1) 由 $T(\mathbf{O}_V)=T(\mathbf{O}_V+\mathbf{O}_V)=T(\mathbf{O}_V)+T(\mathbf{O}_V)$, 可得 $T(\mathbf{O}_V)=\mathbf{O}_W$.

(2) 若 $\mathbf{v}\in V$, 則由 $\mathbf{O}_W=T(\mathbf{v}+(-\mathbf{v}))=T(\mathbf{v})+T(-\mathbf{v})$ 得證 $T(-\mathbf{v})=-T(\mathbf{v})$.

$\square$

我們可以利用一些 linear transformations 創造新的 linear transformation. 若 T,T' 皆為 V 到 W 的 linear transformations, 我們定義一個新的 V 到 W 的函數 $T+T':V\to W$ 為對任意 $\mathbf{v}\in V$, $(T+T')(\mathbf{v})=T(\mathbf{v})+T'(\mathbf{v})$. 給定 $r\in F$ ，我們也可定義一個新的 V 到 W 的函數 $rT:V\to W$ 為對任意 $\mathbf{v}\in V$, $(rT)(\mathbf{v})=rT(\mathbf{v})$. 事實上這樣建構的新函數仍為 linear transformation.

Proposition 2.1.3. *若 T,T' 皆為 V 到 W 的 F-linear transformations 且 $r\in F$ ，則 $T+T'$ 以及 rT 皆為 V 到 W 的 F-linear transformations.*

Proof. 對於任意 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\in V$ 以及 $s\in F$, 皆有 $(T+T')(s\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)=T(s\mathbf{v}_11+\mathbf{v}_2)+T'(s\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)$ 由於 T,T' 為 F-linear, 故有 $T(s\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)+T'(s\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)=sT(\mathbf{v}_1)+T(\mathbf{v}_2)+sT'(\mathbf{v}_1)+T'(\mathbf{v}_2)=s(T(\mathbf{v}_1)+T'(\mathbf{v}_1))+(T(\mathbf{v}_2)+T'(\mathbf{v}_2))$. 亦即 $(T+T')(s\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)=s(T+T')(\mathbf{v}_1)+(T+T')(\mathbf{v}_2)$. 同理 $(rT)(s\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)=rT(s\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)=rsT(\mathbf{v}_1)+rT(\mathbf{v}_2)=s(rT(\mathbf{v}_1))+rT(\mathbf{v}_2)=s(rT)(\mathbf{v}_1)+(rT)(\mathbf{v}_2)$. □

Question 2.2. *考慮所有從 V 到 W 的 linear transformations 所成之集合 $\mathscr{L}(V,W)$, Proposition 2.1.3 是不是告訴我們 $\mathscr{L}(V,W)$ 是一個 vector space over F?*

當一個函數的對應域剛好是另一個函數的定義域時, 我們可以將之合成為一個新的函數. 下一個 Proposition 告訴我們 linear transformations 的合成仍為 linear transformation.

Proposition 2.1.4. *若 $T_1:V\to W$, $T_2:W\to U$ 皆為 F-linear, 則 $T_2\circ T_1:V\to U$ 亦為 F-linear.*

Proof. 對於任意 $\mathbf{v},\mathbf{v}'\in V$ 以及 $r\in F$, 考慮 $T_2\circ T_1(r\mathbf{v}+\mathbf{v}')=T_2(T_1(r\mathbf{v}+\mathbf{v}'))$. 因 T_1 為 F-linear, 故知 $T_1(r\mathbf{v}+\mathbf{v}')=rT_1(\mathbf{v})+T_1(\mathbf{v}')$ 再由 T_2 為 F-linear 得 $T_2\circ T_1(r\mathbf{v}+\mathbf{v}')=T+2(rT_1(\mathbf{v})+T_1(\mathbf{v}'))=rT_2(T_1(\mathbf{v}))+T_2(T_1(\mathbf{v}'))=rT_2\circ T_1(\mathbf{v})+T_2\circ T_1(\mathbf{v}')$. □

Question 2.3. *設 T,T' 皆為 V 到 W 的 F-linear transformations, T'' 為 W 到 U 的 F-linear transformation. 是否 $T''\circ(T+T')=T''\circ T+T''\circ T'$? 又對任意 $r\in F$ 是否 $r(T''\circ T)=(rT'')\circ T=T''\circ(rT)$?*

其實給定兩個 F-spaces V,W, 我們很容易建構出一個從 V 到 W 的 linear transformation. 下一個 Theorem 說的是所有 V 到 W 的 linear transformations 我們都可以完全掌握.

Theorem 2.1.5. *假設 $\{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n\}$ 是 V 的一組 basis, 給定任意 $\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_n\in W$, 存在一個唯一的 F-linear transformation $T:V\to W$ 滿足 $T(\mathbf{v}_i)=\mathbf{w}_i$, $\forall i\in\{1,\dots,n\}$.*

Proof. 證明存在性: 也就是說我們要找到一個 $T\in\mathscr{L}(V,W)$ 滿足 $T(\mathbf{v}_i)=\mathbf{w}_i$. 定義 $T:V\to W$, 滿足對所有 $\mathbf{v}=c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n\in V$, $T(\mathbf{v})=c_1\mathbf{w}_1+\cdots+c_n\mathbf{w}_n$. 由於 $\{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n\}$ 是 V 的一組 basis, T 是一個從 V 到 W 的 well-defined function. 又 T 滿足 $T(\mathbf{v}_i)=\mathbf{w}_i$, 所以我們僅剩下證明 T 為 F-linear. 對任意 $\mathbf{v}=\sum_{i=1}^n c_i\mathbf{v}_i$, $\mathbf{v}'=\sum_{i=1}^n d_i\mathbf{v}_i\in V$ 以及 $r\in F$, 我們有 $T(r\mathbf{v}+\mathbf{v}')=$

$T(\sum_{i=1}^n (rc_i + d_i)\mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^n (rc_i + d_i)\mathbf{w}_i$; 另一方面 $rT(\mathbf{v}) + T(\mathbf{v}') = rT(\sum_{i=1}^n c_i\mathbf{v}_i) + T(\sum_{i=1}^n d_i\mathbf{v}_i) = r\sum_{i=1}^n c_i\mathbf{w}_i + \sum_{i=1}^n d_i\mathbf{w}_i$, 利用 vector space 的運算性質, 我們得 $T(r\mathbf{v}+\mathbf{v}') = rT(\mathbf{v}) + T(\mathbf{v}')$.

證明唯一性: 我們要證明若 $T' : V \to W$ 亦為 F-linear 且滿足 $T'(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$, $\forall i \in \{1,\ldots,n\}$, 則 $T = T'$. 亦即證明 $T(\mathbf{v}) = T'(\mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in V$. 然而對任意 $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n c_i\mathbf{v}_i \in V$, 依 T 的定義 $T(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^n c_i\mathbf{w}_i$, 而依 T' 是 F-linear 可得 $T'(\mathbf{v})$ 亦為 $\sum_{i=1}^n c_i T(\mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^n c_i\mathbf{w}_i$, 故得證 $T = T'$. □

Theorem 2.1.5 告訴我們, 給定一個 linear transformation $T : V \to W$, 若能找到一組 basis S 讓我們知道對所有的 $\mathbf{u} \in S$, $T(\mathbf{u})$ 為何, 則對所有 $\mathbf{v} \in V$, 便可知 $T(\mathbf{v})$ 為何了! 例如 $T_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 為將 $\mathbb{R}^2$ 上任一組向量 (x,y) 以原點 $(0,0)$ 為圓心逆時針繞 θ 角所得的向量. $T_\theta((x,y))$ 是甚麼向量呢? 由於將向量 $(1,0) = (\cos 0, \sin 0)$ 以 $(0,0)$ 為圓心繞 θ 角後依定義所得向量為 $(\cos\theta, \sin\theta)$, 所以我們得到 $T_\theta((1,0)) = (\cos\theta, \sin\theta)$. 同理 $(0,1) = (\cos(\pi/2), \sin(\pi/2))$, 故得 $T_\theta((0,1)) = (\cos((\pi/2)+\theta), \sin((\pi/2)+\theta)) = (-\sin\theta, \cos\theta)$. 故知 $T_\theta((x,y)) = T_\theta(x(1,0)+y(0,1)) = xT_\theta((1,0)) + yT_\theta((0,1)) = x(\cos\theta, \sin\theta) + y(-\sin\theta, \cos\theta) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$. 不過要注意, 這個方法僅對 linear transformation 才成立, 所以要用這個方法處理函數的取值, 須先檢驗這個函數是 linear transformation 才行. 也就是說在上面的例子, 我們要先知道 T_θ 是 linear transformation (請自行驗證), 才可利用此法得到 $T_\theta((x,y)) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$.

Question 2.4. *若 $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 是一個 linear transformation, 滿足 $T((1,2)) = (2,1)$, $T((2,4)) = (4,2)$ 是否可得 $T((x,y)) = (y,x)$? 又若 $T' : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 是一個 linear transformation, 滿足 $T'((1,2)) = (2,1)$, $T'((2,1)) = (1,2)$ 是否可得 $T'((x,y)) = (y,x)$?*

2.2. Image and Kernel

Linear transformation 既然保持了 vector spaces 的運算, 可以理解它應該也會“保持” subspaces. 首先我們定義一些符號, 給定一函數 $f : S_1 \to S_2$. 若 $S_1' \subseteq S_1$, 我們定

$$f(S_1') = \{f(s) \mid s \in S_1'\}.$$

注意 $f(S_1')$ 會是 S_2 的一個 subset, 稱之為 the *image* of S_1' under f; 另一方面若 $S_2' \subseteq S_2$, 令

$$f^{-1}(S_2') = \{s \in S_1 \mid f(s) \in S_2'\}.$$

注意 $f^{-1}(S_2')$ 會是 S_1 的一個 subset, 稱之為 the *preimage* of S_2' under f.

Question 2.5. *Image 和 preimage 是否為 inclusion-preserving? 也就是說一個函數 $f : S_1 \to S_2$, 若 $S_1'' \subseteq S_1' \subseteq S_1$ 是否可得 $f(S_1'') \subseteq f(S_1')$? 若 $S_2'' \subseteq S_2' \subseteq S_2$, 是否可得 $f^{-1}(S_2'') \subseteq f^{-1}(S_2')$?*

Question 2.6. *假設 $f : S_1 \to S_2$ 為一個函數, 且 $S_1', S_1'' \subseteq S_1$ 以及 $S_2', S_2'' \subseteq S_2$. 下列哪些是正確的?*

(1) $f(S_1' \cap S_1'') = f(S_1') \cap f(S_1'')$.

(2) $f(S_1' \cup S_1'') = f(S_1') \cup f(S_1'')$.

(3) $f^{-1}(S_2' \cap S_2'') = f^{-1}(S_2') \cap f^{-1}(S_2'')$.

(4) $f^{-1}(S_2' \cup S_2'') = f^{-1}(S_2') \cup f^{-1}(S_2'')$.

下面我們便是說 linear transformation 確實保持 subspace 的性質.

Lemma 2.2.1. 設 $T : V \to W$ 為一個 *linear transformation.*

(1) 若 V' 為 V 的 *subspace,* 則 $T(V')$ 為 W 的 *subspace.*

(2) 若 W' 為 W 的 *subspace,* 則 $T^{-1}(W')$ 為 V 的 *subspace.*

Proof. 依定義已知 $T(V') \subseteq W$ 且 $T^{-1}(W') \subseteq V$, 所以我們可利用 Proposition 1.2.1 來證明.

(1) 首先 $\mathbf{O}_V \in V'$ (因 V' 是 subspace), 故由 Proposition 2.1.2 (1) 知 $\mathbf{O}_W = T(\mathbf{O}_V) \in T(V')$. 再來對所有的 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in T(V')$ 及 $r, s \in F$, 依定義存在 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V'$ 使得 $\mathbf{w}_1 = T(\mathbf{v}_1), \mathbf{w}_2 = T(\mathbf{v}_2)$. 故考慮 $\mathbf{v} = r\mathbf{v}_1 + s\mathbf{v}_2 \in V'$, 可得 $r\mathbf{w}_1 + s\mathbf{w}_2 = T(\mathbf{v}) \in T(V')$, 得證 $T(V')$ 是 W 的 subspace.

(2) 因 $\mathbf{O}_W \in W'$ 故由 $T(\mathbf{O}_V) = \mathbf{O}_W \in W'$ 得 $\mathbf{O}_V \in T^{-1}(W')$. 再來對所有的 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in T^{-1}(W')$ 及 $r, s \in F$, 依定義 $T(\mathbf{v}_1) \in W'$ 且 $T(\mathbf{v}_2) \in W'$. 故由 W' 是 W 的 subspace 得 $T(r\mathbf{v}_1 + s\mathbf{v}_2) = rT(\mathbf{v}_1) + sT(\mathbf{v}_2) \in W'$, 亦即 $r\mathbf{v}_1 + s\mathbf{v}_2 \in T^{-1}(W')$, 得證 $T^{-1}(W')$ 是 V 的 subspace.

□

特別的, 我們對 $V' = V$ 以及 $W' = \{\mathbf{O}_W\}$ 的情形有興趣, 因此特別給予以下定義.

Definition 2.2.2. 設 $T : V \to W$ 為一個 linear transformation.

(1) $T(V)$ 稱為 the *image* (or *range*) of T , 我們用 $\mathrm{Im}(T)$ 來表示.

(2) $T^{-1}(\{\mathbf{O}_W\})$ 稱為 the *kernel* (or *null-space*) of T, 我們用 $\mathrm{Ker}(T)$ 來表示.

由 Lemma 2.2.1 知 $\mathrm{Im}(T)$ 是 W 的 subspace, 而 $\mathrm{Ker}(T)$ 為 V 的 subspace.

Question 2.7. 由 *image* 和 *preimage* 為 *inclusion-preserving* 我們知 $\mathrm{Im}(T) = T(V)$ 是所有 *subspaces* 的 *image* 中最大的 *subspace,* 而 $\mathrm{Ker}(T) = T^{-1}(\{\mathbf{O}_W\})$ 是所有 *subspaces* 的 *preimage* 中最小的. 為何不去探討 $T(\{\mathbf{O}_V\})$ 以及 $T^{-1}(W)$ 呢?

給定一個函數, 我們有興趣的是這個函數是否為映成 (onto) 或是一對一 (one-to-one). $\mathrm{Im}(T)$ 和 $\mathrm{Ker}(T)$ 之所以重要是因為在 T 為 linear transformation 的情形, 我們可以用 $\mathrm{Im}(T)$ 和 $\mathrm{Ker}(T)$ 來判斷 T 是否為映成或一對一, 事實上我們有以下之結果.

Proposition 2.2.3. 假設 $T : V \to W$ 是一個 *linear transformation.*

(1) T 為映成若且唯若 $\mathrm{Im}(T) = W$.

(2) T 為一對一若且唯若 $\mathrm{Ker}(T) = \{\mathbf{O}_V\}$.

Proof. 我們已知 $\mathrm{Im}(T) \subseteq W$ 以及 $\{\mathbf{O}_V\} \subseteq \mathrm{Ker}(T)$, 所以事實上 (1) 我們僅需考慮 $W \subseteq \mathrm{Im}(T)$ 的部分, 同理 (2) 我們僅需考慮 $\mathrm{Ker}(T) \subseteq \{\mathbf{O}_V\}$ 的部分.

(1) T 為 onto, 表示對所有 $\mathbf{w} \in W$, 皆存在 $\mathbf{v} \in V$ 使得 $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$, 亦即 $\mathbf{w} \in T(V) = \mathrm{Im}(T)$. 得證 $W \subseteq \mathrm{Im}(T)$, 故得 $W = \mathrm{Im}(T)$. 反之, 由 $W \subseteq \mathrm{Im}(T)$ 可知每一個 $\mathbf{w} \in W$ 皆在 $\mathrm{Im}(T)$ 中, 亦即存在 $\mathbf{v} \in V$ 使得 $\mathbf{w} = T(\mathbf{v})$, 故知 T 為 onto.

(2) T 為 one-to-one, 表示 V 中唯一滿足 $T(\mathbf{v}) = \mathbf{O}_W$ 的 $\mathbf{v}$ 應為 $\mathbf{O}_V$ (因已知 $T(\mathbf{O}_V) = \mathbf{O}_W$). 故若 $\mathbf{v} \in \mathrm{Ker}(T)$, 表示 $T(\mathbf{v}) = \mathbf{O}_W$, 得 $\mathbf{v} = \mathbf{O}_V$. 證得 $\mathrm{Ker}(T) = \{\mathbf{O}_V\}$. 反之, 假設 $\mathrm{Ker}(T) = \{\mathbf{O}_V\}$. 若 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ 滿足 $T(\mathbf{v}_1) = T(\mathbf{v}_2)$, 則由 T 為 linear 得 $T(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = \mathbf{O}_W$, 亦即 $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \in \mathrm{Ker}(T) = \{\mathbf{O}_V\}$. 故得 $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$, 得證 T 為 one-to-one.

□

從 Proposition 2.2.3 的證明可以看出, 並不需用到 T 是 linear 的假設來證明 T 是 onto 和 $\mathrm{Im}(T) = W$ 為等價的; 不過 T 是 one-to-one 和 $\mathrm{Ker}(T) = \{\mathbf{O}_V\}$ 為等價的就需要 T 為 linear 的假設了. 所以對一般函數 f, 除非先知道 f 是 linear 不能用 $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ 來判斷 f 是否為 one-to-one.

既然 image 和 kernel 這麼重要, 我們當然要去了解它們. 由下一個 Lemma 我們了解到 image 和 spanning set 有關而 kernel 就和 linear independency 相關.

Lemma 2.2.4. 假設 $T: V \to W$ 是一個 *linear transformation,* 且 S, S' 為 V 的 *subsets.*

(1) 若 S 是 V 的 *spanning set,* 則 $T(S)$ 是 $\mathrm{Im}(T)$ 的 *spanning set.*

(2) 若 S' 為 *linearly independent* 且 $\mathrm{Span}(S') \cap \mathrm{Ker}(T) = \{\mathbf{O}_V\}$, 則 $T(S')$ 亦為 *linearly independent.*

Proof.

(1) 依定義若 $\mathbf{w} \in \mathrm{Im}(T)$ 表示存在 $v \in V$ 使得 $\mathbf{w} = T(\mathbf{v})$, 但 $V = \mathrm{Span}(S)$ 故存在 $c_1, \ldots, c_n \in F$ 以及 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in S$ 使得 $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$. 依定義 $T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_n) \in T(S)$, 因此由 T 為 linear 知 $\mathbf{w} = T(c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n) = c_1T(\mathbf{v}_1) + \cdots + c_nT(\mathbf{v}_n) \in \mathrm{Span}(T(S))$. 故得 $\mathrm{Im}(T) \subseteq \mathrm{Span}(T(S))$. 另一方面, 若 $\mathbf{w} \in \mathrm{Span}(T(S))$, 表示存在 $c_1, \ldots, c_n \in F$ 以及 $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n \in T(S)$ 使得 $\mathbf{w} = \sum_{i=1}^n c_i\mathbf{w}_i$. 但 $\mathbf{w}_i \in T(S)$ 依定義表示存在 $\mathbf{v}_i \in S$ 使得 $\mathbf{w}_i = T(\mathbf{v}_i)$, 故知 $\mathbf{w} = \sum_{i=1}^n c_iT(\mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^n T(c_i\mathbf{v}_i) \in T(\mathrm{Span}(S)) = T(V) = \mathrm{Im}(T)$, 得證 $\mathrm{Span}(T(S)) \subseteq \mathrm{Im}(T)$.

(2) 首先我們說明依假設 $T(S')$ 中的元素皆相異. 否則若存在 $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in S'$ 且 $\mathbf{v}, \mathbf{v}'$ 相異使得 $T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{v}')$, 可得 $T(\mathbf{v} - \mathbf{v}') = \mathbf{O}_W$, 亦即 $\mathbf{v} - \mathbf{v}' \in \mathrm{Ker}(T)$. 然而 $\mathbf{v} - \mathbf{v}' \in \mathrm{Span}(S')$, 故由假設知 $\mathbf{v} - \mathbf{v}' \in \mathrm{Span}(S') \cap \mathrm{Ker}(T) = \{\mathbf{O}_V\}$ 推得 $\mathbf{v} = \mathbf{v}'$ 之矛盾. 故知 $T(S')$ 中的元素必相異.

現利用反證法設 $T(S')$ 為 linearly dependent, 表示存在 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in S'$ 皆相異且 $c_1, \ldots, c_n \in F$ 皆不為 0 使得 $c_1T(\mathbf{v}_1) + \cdots + c_nT(\mathbf{v}_n) = \mathbf{O}_W$. 利用 T 為 linear 得 $T(c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n) = \mathbf{O}_W$, 亦即 $c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n \in \mathrm{Ker}(T)$. 然而 $c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n \in \mathrm{Span}(S')$, 故由 $\mathrm{Span}(S') \cap \mathrm{Ker}(T) = \{\mathbf{O}_V\}$, 得 $c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{O}_V$. 此與 S' 為 linearly independent 相矛盾, 故得 $T(S')$ 為 linearly independent.

□

Lemma 2.2.4 (1) 告訴我們當 $T: V \to W$ 是一個 linear transformation, 若 V 為 finite dimensional F-space, 則 $\mathrm{Im}(T)$ 亦為 finite dimensional F-space.

Question 2.8. 假設 $T: V \to W$ 是一個 *linear transformation.* 若 V 為 *finite dimensional F-space,* 可否得 $\dim(\mathrm{Im}(T)) \leq \dim(V)$? 又若已知 $\dim(W) > \dim(V)$ 是否可確定 T 是否為映成的?

以下我們將利用 V 的一組 basis 得到 $\mathrm{Im}(T)$ 的一組 basis.

Theorem 2.2.5. 假設 $T: V \to W$ 是一個 *linear transformation.* 若 S_0 為 $\mathrm{Ker}(T)$ 的一組 *basis* 且 $S_0 \cup S$ 為 V 的一組 *basis,* 則 $T(S)$ 為 $\mathrm{Im}(T)$ 的一組 *basis.*

Proof. 證明 $T(S)$ 為 $\mathrm{Im}(T)$ 的 spanning set: 因 $S_0 \cup S$ 為 V 的 spanning set, 由 Lemma 2.2.4 (1) 知 $T(S_0 \cup S)$ 為 $\mathrm{Im}(T)$ 的 spanning set. 由於 $S_0 \in \mathrm{Ker}(T)$ 故得 $T(S_0) = \{\mathbf{O}_W\}$. 但由於 $T(S_0 \cup S) = T(S_0) \cup T(S) = \{\mathbf{O}_W\} \cup T(S)$, 故由 $\{\mathbf{O}_W\} \subseteq \mathrm{Span}(T(S)$ (利用 Corollary 1.3.4) 知 $\mathrm{Span}(T(S)) = \mathrm{Span}(\{\mathbf{O}_W\} \cup T(S)) = \mathrm{Span}(T(S_0 \cup S)) = \mathrm{Im}(T)$.

證明 $T(S)$ 為 linearly independent: 因 $S_0 \cup S$ 為 linearly independent 且 S_0 為 linearly independent, 由 Corollary 1.4.4 知 S 為 linearly independent 且 $\mathrm{Span}(S) \cap \mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Span}(S) \cap \mathrm{Span}(S_0) = \{\mathbf{O}_V\}$. 故由 Lemma 2.2.4 (2) 知 $T(S)$ 為 linearly independent. □

特別的, 當 V 為 finite dimensional vector space, 我們可計算 V, $\mathrm{Ker}(T)$ 以及 $\mathrm{Im}(T)$ 之間 dimension 的關係.

Corollary 2.2.6 (Dimension Theorem)**.** 若 V 為一個 *finite dimensional F-space* 且 $T: V \to W$ 是一個 *linear transformation,* 則

$$\dim(V) = \dim(\mathrm{Ker}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)).$$

Proof. 首先利用 Theorem 1.5.8 找到 $\mathrm{Ker}(T)$ 的一組 basis $S_0 = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$, 再利用 Theorem 1.5.9 找到 $S = \{\mathbf{v}_{m+1}, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ 使得 $S_0 \cup S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m, \mathbf{v}_{m+1}, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ 為 V 的一組 basis. Theorem 2.2.5 告訴我們 $\{T(\mathbf{v}_{m+1}), \ldots, T(\mathbf{v}_n)\}$ 為 $\mathrm{Im}(T)$ 的一組 basis, 故知 $n - m = \dim(\mathrm{Im}(T))$, 得證 $\dim(V) = n = m + (n-m) = \dim(\mathrm{Ker}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T))$. □

當 V 為 finite dimensional vector space 且 $T: V \to W$ 是一個 linear transformation, $\dim(\mathrm{Im}(T))$ 一般也稱為 the *rank* of T, 而 $\dim(\mathrm{Ker}(T))$ 也稱為 the *nullity* of T. 所以 Dimension Theorem 也有人稱為 Rank Theorem: rank of T + nullity of T = $\dim(V)$.

Question 2.9. 假設 $T: V \to W$ 是一個 *linear transformation.* 若 V 為 *finite dimensional F-space,* 若已知 $\dim(W) < \dim(V)$ 是否可確定 T 是否為一對一的?

2.3. Isomorphism

Linear transformation 將兩個 vector spaces 關連起來. 如果兩個 vector spaces 間可找到一個一對一且映成的 linear transformation, 我們便認為這兩個 vector spaces 有相同的結構, 稱它們為 isomorphic. 這一節中我們主要便是要探討幾個有關 isomorphism 的重要性質.

Definition 2.3.1. 假設 $T : V \to W$ 是一個 linear transformation. 若 T 為 one-to-one and onto, 則稱 T 為一個 *isomorphism*. 此時我們稱 V 和 W 為 *isomorphic* 且用 $V \simeq W$ 來表示.

由 Proposition 2.2.3 我們知 $T : V \to W$ 為 isomorphism 若且唯若 $\mathrm{Im}(T) = W$ and $\mathrm{Ker}(T) = \{\mathbf{O}_V\}$. 所以當 T 為 isomorphism 時, 若 S 為 V 的一組 basis, 由 T 為 one-to-one 知 $T(S)$ 中的元素皆相異 (即若 $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in S$ 且 $\mathbf{v} \neq \mathbf{v}'$, 則 $T(\mathbf{v}) \neq T(\mathbf{v}')$), 再由 Lemma 2.2.4 知 $T(S)$ 亦為 W 的一組 basis. 反之, 若 $T(S)$ 中的元素皆相異且 $T(S)$ 為 W 的一組 basis, 由 $\mathrm{Span}(T(S)) = W$, 得 $\mathrm{Im}(T) = W$. 另一方面, 若 $\mathbf{v} \in \mathrm{Ker}(T)$, 由於 S 為 V 的一組 basis, 存在 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in S$ 皆相異, $c_1, \dots, c_n \in F$ 使得 $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$. 由此得 $\mathbf{O}_W = T(c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n) = c_1T(\mathbf{v}_1) + \cdots + c_n(T\mathbf{v}_n)$. 但 $T(S)$ 為一組 basis 且 $T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n) \in T(S)$ 皆相異得 $c_1, \dots, c_n$ 皆為 0, 故得 $\mathbf{v} = \mathbf{O}_V$, 即 $\mathrm{Ker}(T) = \{\mathbf{O}_V\}$. 綜合以上, 我們有以下之結論.

Proposition 2.3.2. 假設 $T : V \to W$ 是一個 *linear transformation* 且 S 為 V 的一組 *basis*. 則 T 是 *isomorphism* 若且唯若 $T(S)$ 中的元素皆相異且 $T(S)$ 為 W 的一組 *basis*.

Question 2.10. *Proposition 2.3.2* 中為何要強調 $T(S)$ 中元素皆相異?

當 V 為 finite dimensional vector space 時, 我們有以下很好之結果.

Corollary 2.3.3. 假設 V, W 皆為 F*-spaces* 且 V 為 *finite dimensional* F*-space*. 則 $V \simeq W$ 若且唯若 $\dim(V) = \dim(W)$.

Proof. $V \simeq W$ 表示存在一個 isomorphism $T : V \to W$, 因此由 Proposition 2.3.2 知 W 亦為 finite dimensional F-space 且 $\dim(W) = \dim(V)$. 反之, 若 W 為 finite dimensional F-space 且 $\dim(W) = \dim(V) = n$, 可任取 V 的一組 basis $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ 以及 W 的一組 basis $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n\}$, 利用 Theorem 2.1.5 知存在一個 linear transformation $T : V \to W$ 滿足 $T(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$. 由於 $\{T(\mathbf{v}_1) \dots, T(\mathbf{v}_n)\} = \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n\}$ 為 W 的一組 basis, 由 Proposition 2.3.2 知 T 為 isomorphism, 得證 $V \simeq W$. $\square$

Corollary 2.3.3 告訴我們考慮 finite dimensional vector spaces 間是否 isomorphic 是個簡單的問題, 只要看它們的 dimension 是否相同即可. 底下我們介紹幾個 isomorphism 的定理, 事實上在 finite dimension 的情形確實可以很簡單的利用 dimension 來證得. 不過這些定理在一般狀況之下也成立, 雖然我們不會去談 infinite dimensional vector space, 不過利用 linear transformation 的性質來證明這些 isomorphism 更能讓我們了解這些 vector spaces 間的關係, 所以我們還是不假設 finite dimensional 的情形, 選擇不用 dimension 的方法來證明這些定理 (不過大家可以利用 dimension 來驗證這些定理的正確性).

當一個函數 f 是一對一且映成時, 我們知其反函數 $f^{\circ-1}$ 是存在的, 但當 f 是 linear transformation 時其反函數 $f^{\circ-1}$ 是否也是 linear transformation? 以下我們便是回答這個問題. 要注意, 在這裡因為要避免和 preimage 的符號相混淆, 我們用 $f^{\circ-1}$ 來表示 f 的反函數.

Proposition 2.3.4. *假設 $T:V\to W$ 為一個 isomorphism, 則 T 的 inverse (反函數) $T^{\circ-1}:W\to V$ 亦為 isomorphism.*

Proof. T 為 one-to-one and onto, 故其 inverse $T^{\circ-1}$ 亦為 one-to-one and onto. 所以我們僅要證明 $T^{\circ-1}$ 為 W 到 V 的 linear transformation 即可. 任取 $\mathbf{w},\mathbf{w}'\in W$, 由 T 為 isomorphism 知存在唯一的 $\mathbf{v},\mathbf{v}'\in V$ 滿足 $T(\mathbf{v})=\mathbf{w}$ 且 $T(\mathbf{v}')=\mathbf{w}'$. 依 inverse 的定義 $T^{\circ-1}(\mathbf{w})=\mathbf{v}$ 且 $T^{\circ-1}(\mathbf{w}')=\mathbf{v}'$. 對任意 $r\in F$, 要證明 $T^{\circ-1}$ 為 linear transformation, 即要證明 $T^{\circ-1}(r\mathbf{w}+\mathbf{w}')=rT^{\circ-1}(\mathbf{w})+T^{\circ-1}(\mathbf{w}')=r\mathbf{v}+\mathbf{v}'$. 然而依 T 為 linear, 可得 $T(r\mathbf{v}+\mathbf{v}')=rT(\mathbf{v})+T(\mathbf{v}')=r\mathbf{w}+\mathbf{w}'$. 故再依 inverse 之定義得 $T^{\circ-1}(r\mathbf{w}+\mathbf{w}')=r\mathbf{v}+\mathbf{v}'$, 得證 $T^{\circ-1}:W\to V$ 為 linear transformation, 故為 isomorphism. □

Question 2.11. *Vector spaces 之間的 isomorphic 是否為一個 equivalent relation?*

Question 2.12. *當 V 是一個 finite dimensional vector space, 你能利用 Theorem 2.1.5 證明 Proposition 2.3.4 嗎?*

接下來我們將介紹大家在學習代數時已接觸過的幾個 Isomorphism Theorems. 首先我們先看利用一個已知的 linear transformation 得到新的 linear transformation 的方法. 假設 $T:V\to W$ 是一個 linear transformation 且 U 是一個 $\mathrm{Ker}(T)$ 的 subspace, 定義 $\overline{T}:V/U\to\mathrm{Im}(T)$ 為 $\overline{T}(\overline{\mathbf{v}})=T(\mathbf{v}),\forall\overline{\mathbf{v}}\in V/U$. 首先我們先說明 $\overline{T}$ 是一個 well-defined function. 亦即, 若 $\overline{\mathbf{v}_1}=\overline{\mathbf{v}_2}$ in V/U, 則需驗證 $\overline{T}(\overline{\mathbf{v}_1})=\overline{T}(\overline{\mathbf{v}_2})$. 然而 $\overline{\mathbf{v}_1}=\overline{\mathbf{v}_2}$, 表示 $\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2\in U\subseteq\mathrm{Ker}(T)$, 故得 $T(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2)=\mathbf{O}_W$, 亦即 $\overline{T}(\overline{\mathbf{v}_1})=T(\mathbf{v}_1)=T(\mathbf{v}_2)=\overline{T}(\overline{\mathbf{v}_2})$. 另一方面, 對任意 $\overline{\mathbf{v}_1},\overline{\mathbf{v}_2}\in V/U$ 以及 $r\in F$,

$$\overline{T}(r\overline{\mathbf{v}_1}+\overline{\mathbf{v}_2})=\overline{T}(\overline{r\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2})=T(r\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)=rT(\mathbf{v}_1)+T(\mathbf{v}_2)=r\overline{T}(\overline{\mathbf{v}_1})+\overline{T}(\overline{\mathbf{v}_2}),$$

得知 $\overline{T}$ 是一個 linear transformation.

Theorem 2.3.5. *假設 $T:V\to W$ 是一個 linear transformation 且 U 是一個 $\mathrm{Ker}(T)$ 的 subspace, 則函數 $\overline{T}:V/U\to\mathrm{Im}(T)$ 定義為 $\overline{T}(\overline{\mathbf{v}})=T(\mathbf{v}),\forall\overline{\mathbf{v}}\in V/U$ 是一個 linear transformation 且 $\mathrm{Ker}(\overline{T})=\mathrm{Ker}(T)/U$ 以及 $\mathrm{Im}(\overline{T})=\mathrm{Im}(T)$.*

Proof. 前面已知, $\overline{T}$ 是一個 linear transformation. 現若 $\overline{\mathbf{v}}\in\mathrm{Ker}(\overline{T})$, 依定義表示 $\mathbf{O}_W=\overline{T}(\overline{\mathbf{v}})=T(\mathbf{v})$, 亦即 $\mathbf{v}\in\mathrm{Ker}(T)$, 得證 $\overline{\mathbf{v}}\in\mathrm{Ker}(T)/U$. 另一方面, 若 $\overline{\mathbf{v}}\in\mathrm{Ker}(T)/U$, 表示 $\mathbf{v}\in\mathrm{Ker}(T)$, 故 $\overline{T}(\overline{\mathbf{v}})=T(\mathbf{v})=\mathbf{O}_W$, 得證 $\overline{\mathbf{v}}\in\mathrm{Ker}(\overline{T})$. 故得 $\mathrm{Ker}(\overline{T})=\mathrm{Ker}(T)/U$. 最後依定義, 我們知 $\mathbf{w}\in\mathrm{Im}(\overline{T})$ 若且唯若存在 $\overline{\mathbf{v}}\in V/U$ 使得 $\mathbf{w}=\overline{T}(\overline{\mathbf{v}})=T(\mathbf{v})$ 若且唯若 $\mathbf{w}\in\mathrm{Im}(T)$. 得證 $\mathrm{Im}(\overline{T})=\mathrm{Im}(T)$. □

特別地當 $U=\mathrm{Ker}(T)$, 我們有以下的定理.

Corollary 2.3.6 (The First Isomorphism Theorem)**.** 假設 $T : V \to W$ 是一個 *linear transformation* 且 $\overline{T} : V/\mathrm{Ker}(T) \to \mathrm{Im}(T)$ 定義為 $\overline{T}(\overline{\mathbf{v}}) = T(\mathbf{v})$, 則 $\overline{T}$ 是一個 *isomorphism,* 即得

$$V/\mathrm{Ker}(T) \simeq \mathrm{Im}(T).$$

Proof. 因 $\overline{T} : V/\mathrm{Ker}(T) \to \mathrm{Im}(T)$ 為 linear transformation 滿足 $\mathrm{Ker}(\overline{T}) = \mathrm{Ker}(T)/\mathrm{Ker}(T) = \{\overline{\mathbf{O}_V}\}$ 且 $\mathrm{Im}(\overline{T}) = \mathrm{Im}(T)$, 故知 $\overline{T}$ 為 isomorphism 得證 $V/\mathrm{Ker}(T) \simeq \mathrm{Im}(T)$. □

Question 2.13. 當 V 為 *finite dimensional vector space,* 你能利用 *quotient space* 的 *dimension* 性質以及 *Dimension Theorem* 證明 $V/\mathrm{Ker}(T) \simeq \mathrm{Im}(T)$ 嗎?

Theorem 2.3.6 之所以稱為 The First Isomorphism Theorem, 是因為可以利用它證得其他的 Isomorphism Theorems.

Corollary 2.3.7 (The Second Isomorphism Theorem)**.** 假設 V 為一個 *vector space* 且 U,W 為 V 的 *subspaces.* 則

$$(U+W)/U \simeq W/U \cap W.$$

Proof. 首先注意 U 為 $U+W$ 的 subspace, 所以 $(U+W)/U$ 為一個 vector space. 考慮 $T : W \to (U+W)/U$ 定義為 $T(\mathbf{w}) = \overline{\mathbf{w}}, \forall \mathbf{w} \in W$. 很容易驗證 T 為一個 linear transformation. 接著我們要證明 $\mathrm{Im}(T) = (U+W)/U$ 以及 $\mathrm{Ker}(T) = U \cap W$, 便可由 Corollary 2.3.6 得證 $(U+W)/U \simeq W/U \cap W$.

由於 $\mathrm{Im}(T) \subseteq (U+W)/U$, 我們僅要證明 $\mathrm{Im}(T) \supseteq (U+W)/U$. 對於任意 $\overline{\mathbf{v}} \in (U+W)/U$, 由定義知存在 $\mathbf{u} \in U, \mathbf{w} \in W$ 使得 $\overline{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{u}+\mathbf{w}}$. 此時考慮 $T(\mathbf{u}) = \overline{\mathbf{u}}$, 我們要說明 $\overline{\mathbf{u}} = \overline{\mathbf{v}}$. 然而 $\mathbf{v} - (\mathbf{u}+\mathbf{w}) \in W$ (因 $\overline{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{u}+\mathbf{w}}$) 以及 $\mathbf{w} \in W$, 我們有 $\mathbf{v} - \mathbf{u} = \mathbf{v} - (\mathbf{u}+\mathbf{w}) + \mathbf{w} \in W$, 故得 $\overline{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{u}} = T(\mathbf{u}) \in \mathrm{Im}(T)$. 得證 $\mathrm{Im}(T) = (U+W)/U$.

現若 $\mathbf{u} \in \mathrm{Ker}(T)$, 由於 T 的定義域為 U, 可知 $\mathbf{u} \in U$. 又因 $(U+W)/U$ 的加法單位元素為 $\overline{\mathbf{O}}$, 其中 $\mathbf{O}$ 為 V 的加法單位元素, 得 $\overline{\mathbf{O}} = T(\mathbf{u}) = \overline{\mathbf{u}}$. 亦即 $\mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{O} \in W$, 故 $\mathbf{u} \in U \cap W$, 得證 $\mathrm{Ker}(T) \subseteq U \cap W$. 反之, 若 $\mathbf{u} \in U \cap W$ 則因 $\mathbf{u} \in W$, 得 $\overline{\mathbf{u}} = \overline{\mathbf{O}}$. 故 $T(\mathbf{u}) = \overline{\mathbf{u}} = \overline{\mathbf{O}}$, 即 $\mathbf{u} \in \mathrm{Ker}(T)$, 得證 $\mathrm{Ker}(T) = U \cap W$. □

從這裡我們可以看出, 只要定出一個好的 linear transformation 就可利用 the First Isomorphism Theorem, 得到好的 isomorphic 性質.

Corollary 2.3.8 (The Third Isomorphism Theorem)**.** 假設 V 為一個 *vector space* 且 U,W 為 V 的 *subspaces* 滿足 $U \subseteq W$. 則

$$(V/U)/(W/U) \simeq V/W.$$

Proof. 首先注意, 由於 $U \subseteq W \subseteq V$ 且皆為 vector spaces, 故 V/U 以及 V/W 皆為 vector spaces. 現考慮 $T : V \to V/W$, 定義為 $T(\mathbf{v}) = \overline{\mathbf{v}}, \forall \mathbf{v} \in V$. 很容易驗證 $\mathrm{Ker}(T) = W$ 且 $\mathrm{Im}(T) = V/W$. 故由 $U \subseteq \mathrm{Ker}(T) = W$, 利用 Theorem 2.3.5, 知 $\overline{T} : V/U \to V/W$ 為一個

linear transformation, 且 $\mathrm{Im}(\overline{T}) = \mathrm{Im}(T) = V/W$ 以及 $\mathrm{Ker}(\overline{T}) = \mathrm{Ker}(T)/U = W/U$. 因此利用 Corollary 2.3.6 得 $(V/U)/\mathrm{Ker}(\overline{T}) \simeq \mathrm{Im}(\overline{T})$, 即 $(V/U)/(W/U) \simeq V/W$. □

Question 2.14. 當 V 為 *finite dimensional vector space,* 你能利用 *dimension* 來證明 *the Second and Third Isomorphism Theorems* 嗎?

Question 2.15. 假設 V 為一個 *finite dimensional vector space* 且 U,W 為 V 的 *subspaces* 滿足 $U \subseteq W \subseteq V$. 我們知 $\dim(V/U) = \dim(V) - \dim(U), \dim(V/W) = \dim(V) - \dim(W)$ 且 $\dim(W/U) = \dim(W) - \dim(U)$. 也就是說 $\dim(V/U) - \dim(V/W) = \dim(W/U)$, 那我們可不可以說 $(V/U)/(V/W) \simeq W/U$?

2.4. The Matrix Connection

一個 vector space V, 若給定一組 basis 後, 由於 V 中的元素用這組 basis 都只有唯一的表法, 所以我們可以將 V 中的元素用熟悉的向量坐標來表示. 另一方面, 一個 linear transformation, 只要給定 vector space 的 basis, 也可以被唯一確定. 所以我們很自然的會將 linear transformation 和 matrix 相連結. 雖然大家以前可能僅接觸過 over $\mathbb{R}$ 或 over $\mathbb{C}$ 的 matrix. 不過關於 matrix 的運算性質的證明, 其實和 over 哪一個 field 是無關的, 所以這裡我們假設大家已熟悉這些性質, 不會再去證明它們.

若 V 是一個 finite dimensional vector space 且給定 V 的一組 basis $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\}$, 我們要先將這些 $\mathbf{v}_i$ 的順序排定, 用 $\beta = (\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)$ 來表示這一組排好順序的 basis, 稱為 V 的一組 *ordered basis*. 所以要注意, 一組 basis 若將其元素重新排列, 那麼所排出的 ordered basis, 雖然看成集合的話元素皆相同, 但是因為順序不同, 我們將它們視為不同的 ordered basis. 也就是說若 $\beta = (\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)$, $\beta' = (\mathbf{v}'_1,\ldots,\mathbf{v}'_n)$ 為 V 的 ordered bases, 則 $\beta = \beta'$ 表示 $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i$, $\forall i = 1,\ldots,n$.

假設 $\dim(V) = n$, 給定 V 的一個 ordered basis β 以後, 我們很自然的定出一個 V 到 $\mathbb{F}^n$ 的 linear transformation $\tau_\beta : V \to F^n$, 其中對所有 $\mathbf{v} \in V$, 利用 β 將 $\mathbf{v}$ 寫成 $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$, 定義

$$\tau_\beta(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

這裡我們將 F^n 裡的元素寫成 column vector, 因為版面的關係有時會寫成 $(c_1,\ldots,c_n)^{\mathrm{t}}$ (即將 row vector $(c_1,\ldots,c_n)$ 取轉置). 將 F^n 裡的元素寫成 column vector 的原因是習慣性的問題, 主要是符合以後矩陣乘法的運算. 因為 β 為 ordered basis, 很容易看出 τ_β 是 well-defined, 且是一個 isomorphism. 換言之, 對於 V 中的元素, 我們可以利用 τ_β 將之置換成 F^n 中的一個 column vector. 同樣的對於 F^n 中的 column vector, 我們可利用 $\tau_\beta^{\circ -1}$ 將之還原成 V 中的元素. 這就是我們要選取 ordered basis 的主要目的, 可以利用一組 ordered basis 將 V 中的元素和 F^n 中的 column vector 作一個一對一的置換且保持 vector space 中的運算. 這裡要強調的是, 在一般的情形要將 V 中的元素轉換成 F^n 的元素 $\tau_\beta(\mathbf{v})$ 過程較麻煩 (可

能牽涉到解聯立方程組), 不過將 F^n 中的 column vector $(c_1,\ldots,c_n)^{\mathrm{t}}$ 轉換成 V 中的元素 $\tau_\beta^{\circ-1}((c_1,\ldots,c_n)^{\mathrm{t}})$ 就簡單多了, 它就是 $c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n$.

Example 2.4.1. 考慮 $P_2(\mathbb{R})=\{ax^2+bx+c \mid a,b,c\in\mathbb{R}\}$ 這一個 $\mathbb{R}$-space, 以及它的一個 ordered basis $\beta=(x^2,x+1,-1)$. 因為 $ax^2+bx+c=a(x^2)+b(x+1)+(b-c)(-1)$, 我們可得 $\tau_\beta(ax^2+bx+c)=(a,b,b-c)^{\mathrm{t}}$. 例如 $\tau_\beta(x^2+x+1)=(1,1,0)^{\mathrm{t}}$, 而我們也可馬上知 $\tau_\beta^{\circ-1}((1,1,0)^{\mathrm{t}})=1(x^2)+1(x+1)+0(-1)=x^2+x+1$.

另外考慮 $P_1(\mathbb{R})=\{ax+b \mid a,b\in\mathbb{R}\}$ 這一個 $\mathbb{R}$-space, 以及它的一個 ordered basis $\beta'=(x-1,x+1)$. 解 $ax+b=r(x-1)+s(x+1)$, 我們可得 $r=(a-b)/2, s=(a+b)/2$, 故 $\tau_{\beta'}(ax+b)=((a-b)/2,(a+b)/2)^{\mathrm{t}}$.

Question 2.16. 在 *Example 2.4.1* 中若將 β,β' 改為 $\beta=(-1,x+1,x^2),\beta'=(x+1,x-1)$, 那麼 $\tau_\beta(ax^2+bx+c),\tau_{\beta'}(ax+b)$ 會是什麼?

現給定一 linear transformation $T:V\to W$, 我們分別選定 V,W 上的 ordered basis $\beta=(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)$, $\beta'=(\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_m)$. 利用 β,β', 我們可將 T 用一個 over F 的 $m\times n$ (m 個 row, n 個 column) 的矩陣來表示. 這矩陣的每個 column 是用以下的方法定的: 第 i 個 column 為 $\tau_{\beta'}(T(\mathbf{v}_i))$. 也就是說若 $T(\mathbf{v}_i)$ 利用 β' 這個 ordered basis 可表示為 $T(\mathbf{v}_i)=c_1\mathbf{w}_1+\cdots+c_m\mathbf{w}_m$, 則這個矩陣的 i-th column 為 $\begin{pmatrix} c_1\\ \vdots \\ c_m\end{pmatrix}$. 這個矩陣和 T 有關也和 β,β' 有關, 我們就用 ${}_{\beta'}[T]_\beta$ 來表示, 亦即

$$ {}_{\beta'}[T]_\beta=\Big(\tau_{\beta'}(T(\mathbf{v}_1)),\ldots,\tau_{\beta'}(T(\mathbf{v}_n))\Big), $$

注意每一個 $\tau_{\beta'}(T(\mathbf{v}_i))\in F^m,\forall i=1,\ldots,n$ 是一個 $m\times 1$ 的 column vector, 所以 ${}_{\beta'}[T]_\beta$ 是一個 $m\times n$ 的 over F 的 matrix.

Example 2.4.2. 同 Example 2.4.1, 考慮 $P_2(\mathbb{R})$ 以及其 ordered basis $\beta=(x^2,x+1,-1)$, 和 $P_1(\mathbb{R})$ 以及其 ordered basis $\beta'=(x-1,x+1)$. 若 $T:P_2(\mathbb{R})\to P_1(\mathbb{R})$ 定義為

$$ T(ax^2+bx+c)=2ax+b, $$

很容易驗證 T 為 linear transformation. 因為 $\dim(P_1(\mathbb{R}))=2$, $\dim(P_2(\mathbb{R}))=3$ 我們可定出 ${}_{\beta'}[T]_\beta$ 這一個 2×3 的 matrix. 事實上由於 $T(x^2)=2x, T(x+1)=1, T(-1)=0$, 利用 Example 2.4.1 的結果我們得

$$ \tau_{\beta'}(T(x^2))=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \tau_{\beta'}(T(x+1))=\begin{pmatrix}\frac{-1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}, \tau_{\beta'}(T(-1))=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, $$

故知

$$ {}_{\beta'}[T]_\beta=\begin{pmatrix}1 & \frac{-1}{2} & 0\\ 1 & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}. $$

Question 2.17. 在 *Example 2.4.2* 中若將 β,β' 改為 $\beta=(-1,x+1,x^2),\beta'=(x+1,x-1)$, 那麼 ${}_{\beta'}[T]_\beta$ 會是什麼?

${}_{\beta'}[T]_{\beta}$ 這一個矩陣有什麼用呢? 它稱作 the *representative matrix* of T with respect to β,β'. 意思是說矩陣 ${}_{\beta'}[T]_{\beta}$ 足以代表 T 這一個 linear transformation. 回顧一下, 給定一個 $m\times n$ over F 的 matrix A, 我們可以定義一個從 F^n 到 F^m 的函數 $m_A : F^n \to F^m$, 其定義為將任意 F^n 的 column vector $\mathbf{x}$ 乘上 A 這一個 $m\times n$ matrix, 得到 $A\cdot\mathbf{x}$ 這個 F^m 的 column vector, 即 $m_A(\mathbf{x}) = A\cdot\mathbf{x}$. 利用矩陣運算的性質 $A\cdot(r\mathbf{x}+\mathbf{x}') = rA\cdot\mathbf{x}+A\cdot\mathbf{x}'$, 我們知 $m_A : F^n \to F^m$ 是一個 linear transformation. 所以有了 ${}_{\beta'}[T]_{\beta}$, 我們可以得到一個從 F^n 到 F^m 的 linear transformation $m_{{}_{\beta'}[T]_{\beta}} : F^n \to F^m$, 它和 $T : V \to W$ 有著密切的關係, 我們用以下的圖示來說明:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rrr, "T"] \arrow[ddd, "\tau_\beta"'] & & & W \\
& \mathbf{v} \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & T(\mathbf{v}) & \\
& \tau_\beta(\mathbf{v}) \arrow[r, mapsto] & {}_{\beta'}[T]_{\beta}\cdot\tau_\beta(\mathbf{v}) \arrow[u, mapsto] & \\
F^n \arrow[rrr, "m_{{}_{\beta'}[T]_{\beta}}"'] & & & F^m \arrow[uuu, "\tau_{\beta'}^{\circ-1}"']
\end{tikzcd}$$

首先我們將任意 $\mathbf{v}\in V$ 利用 τ_β 將它轉換成 F^n 中的 column vector $\tau_\beta(\mathbf{v})$, 然後將 $\tau_\beta(\mathbf{v})$ 左邊乘上 $m\times n$ 的 matrix ${}_{\beta'}[T]_{\beta}$, 得到 ${}_{\beta'}[T]_{\beta}\cdot\tau_\beta(\mathbf{v})$ 這一個 F^m 中的 column vector. 最後我們利用 $\tau_{\beta'} : W \to F^m$ 的反函數 $\tau_{\beta'}^{\circ-1} : F^m \to W$ 將 ${}_{\beta'}[T]_{\beta}\cdot\tau_\beta(\mathbf{v})$ 轉換成 W 上的元素

$$\tau_{\beta'}^{\circ-1}({}_{\beta'}[T]_{\beta}\cdot\tau_\beta(\mathbf{v})).$$

我們希望這個元素就是 $T(\mathbf{v})$. 也就是說, 我們要說明 T 和 $\tau_{\beta'}^{\circ-1}\circ m_{{}_{\beta'}[T]_{\beta}}\circ\tau_\beta$ 是相同的函數, 若真是如此, 將來我們求 $T(\mathbf{v})$ 之值的問題, 就可轉換成簡單的矩陣乘法問題.

Example 2.4.3. matmul 延續 Examples 2.4.1 和 2.4.2, 我們檢查上述矩陣乘法的方法所得的元素是否就是 $T(ax^2+bx+c) = 2ax+b$. 首先將 $P_2(\mathbb{R})$ 中的任一元素 ax^2+bx+c 轉為 $\mathbb{R}^3$ 的元素 $\tau_\beta(ax^2+bx+c) = (a,b,b-c)^{\mathrm{t}}$, 再將之左邊乘上矩陣 ${}_{\beta'}[T]_{\beta}$ 得

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \\ b-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-\frac{1}{2}b \\ a+\frac{1}{2}b \end{pmatrix}.$$

最後將此 $\mathbb{R}^2$ 的元素轉回 $P_1(\mathbb{R})$ 的元素得 $(a-(b/2))(x-1)+(a+(b/2))(x+1) = 2ax+b$ 確實和 $T(ax^2+bx+c)$ 相等.

在回答為何 $T = \tau_{\beta'}^{\circ-1}\circ m_{{}_{\beta'}[T]_{\beta}}\circ\tau_\beta$ 之前, 我們先回顧一個矩陣乘法的重要看法. 當一個 $m\times n$ matrix A, 乘上 F^n 的一個 column vector $\mathbf{x}$, 我們知道 $A\cdot\mathbf{x}$ 會是 F^m 的 column vector. 事實上, 若 $\mathbf{A}_1,\ldots,\mathbf{A}_n$ 為 A 的第 1 到第 n 個 column (別忘了 A 有 n 個 column 且每個

column 是 F^m 的一個 column vector), 而 $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)^{\mathrm{t}}$, 則

$$A\cdot\mathbf{x}=x_1\mathbf{A}_1+\cdots+x_n\mathbf{A}_n.$$

現已知 T 和 $\tau_{\beta'}^{\circ-1}\circ m_{_{\beta'}[T]_\beta}\circ\tau_\beta$ 皆為 $V\to W$ 的 linear transformation, 由 Theorem 2.1.5, 我們知道要說它們相等, 只要將 β 這一個 basis 內的每個元素 $\mathbf{v}_i$, 分別代入檢查是否相同即可. 然而依定義 $\tau_\beta(\mathbf{v}_i)=(0,\ldots,1,\ldots,0)^{\mathrm{t}}$, 其中 $(0,\ldots,1,\ldots,0)$ 只有在第 i 個位置是 1 其他位置皆為 0. 所以依前面所提矩陣的乘法知 ${}_{\beta'}[T]_\beta\cdot\tau_\beta(\mathbf{v}_i)={}_{\beta'}[T]_\beta\cdot(0,\ldots,1,\ldots,0)^{\mathrm{t}}$ 為矩陣 ${}_{\beta'}[T]_\beta$ 的第 i 個 column, 依前面定義知此 column 為 $\tau_{\beta'}(T(\mathbf{v}_i))$, 因此

$$\tau_{\beta'}^{\circ-1}\circ m_{_{\beta'}[T]_\beta}\circ\tau_\beta(\mathbf{v}_i)=\tau_{\beta'}^{\circ-1}({}_{\beta'}[T]_\beta\cdot\tau_\beta(\mathbf{v}_i))=\tau_{\beta'}^{\circ-1}(\tau_{\beta'}(T(\mathbf{v}_i)))=T(\mathbf{v}_i),\forall i=1,\ldots,n$$

得證

$$T=\tau_{\beta'}^{\circ-1}\circ m_{_{\beta'}[T]_\beta}\circ\tau_\beta. \tag{2.1}$$

當 V,W 為 vector spaces, 我們曾介紹所有 V 到 W 的 linear transformation 形成一個 vector space, 用 $\mathscr{L}(V,W)$ 來表示. 現令 $M_{m\times n}(F)$ 表示所有 over F 的 $m\times n$ matrices. 依矩陣的運算性質, 很容易檢查 $M_{m\times n}(F)$ 亦為一個 vector space. 今若固定 V 的一組 ordered basis $\beta=(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)$ 和 W 的一組 ordered basis $\beta'=(\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_m)$, 前面將 linear transformation 轉換成 matrix 的方法, 給了我們一個從 $\mathscr{L}(V,W)$ 到 $M_{m\times n}(F)$ 的函數 Φ, 其定義為將任意 linear transformation $T:V\to W$ 送到 ${}_{\beta'}[T]_\beta$ 這一個 $m\times n$ matrix, 亦即 $\Phi(T)={}_{\beta'}[T]_\beta,\forall T\in\mathscr{L}(V,W)$. 我們需要說明 Φ 是一個 linear transformation, 即說明對任意 $T_1,T_2\in\mathscr{L}(V,W)$ 以及 $r\in F$, $\Phi(rT_1+T_2)={}_{\beta'}[rT_1+T_2]_\beta$ 會和 $r\Phi(T_1)+\Phi(T_2)=r({}_{\beta'}[T_1]_\beta)+{}_{\beta'}[T_2]_\beta$ 相等. 然而依定義, 矩陣 ${}_{\beta'}[rT_1+T_2]_\beta$ 的 i-th column 為 $\tau_{\beta'}((rT_1+T_2)(\mathbf{v}_i))=\tau_{\beta'}(rT_1(\mathbf{v}_i)+T_2(\mathbf{v}_i))$, 但因 $\tau_{\beta'}$ 為 linear, 此即 $r\tau_{\beta'}(T_1(\mathbf{v}_i))+\tau_{\beta'}(T_2(\mathbf{v}_i))$. 另一方面矩陣 ${}_{\beta'}[T_1]_\beta,{}_{\beta'}[T_2]_\beta$ 的 i-th column 分別為 $\tau_{\beta'}(T_1(\mathbf{v}_i)),\tau_{\beta'}(T_2(\mathbf{v}_i))$, 故依矩陣加法及係數積的定義矩陣 $r({}_{\beta'}[T_1]_\beta)+{}_{\beta'}[T_2]_\beta$ 的 i-th column 為 $r\tau_{\beta'}(T_1(\mathbf{v}_i))+\tau_{\beta'}(T_2(\mathbf{v}_i))$. 得證 ${}_{\beta'}[rT_1+T_2]_\beta$ 和 $r({}_{\beta'}[T_1]_\beta)+{}_{\beta'}[T_2]_\beta$ 為相同的矩陣, 故知 Φ 為 linear transformation.

接著我們要說明 $\Phi:\mathscr{L}(V,W)\to M_{m\times n}(F)$ 為 isomorphism (即 one-to-one and onto). 給定任意矩陣 $A\in M_{m\times n}(F)$, 若 A 的 i-th column 為 $\mathbf{A}_i$, 考慮 $\tau_{\beta'}^{\circ-1}(\mathbf{A}_i)\in W$. 由 Theorem 2.1.5 知存在唯一的 linear transformation $T:V\to W$ 滿足 $T(\mathbf{v}_i)=\tau_{\beta'}^{\circ-1}(\mathbf{A}_i),\forall i=1,\ldots,n$. 依定義, 此時 ${}_{\beta'}[T]_\beta$ 的 i-th row 為

$$\tau_{\beta'}(T(\mathbf{v}_i))=\tau_{\beta'}(\tau_{\beta'}^{\circ-1}(\mathbf{A}_i))=\mathbf{A}_i,$$

故知 ${}_{\beta'}[T]_\beta=A$. 亦即 T 為 $\mathscr{L}(V,W)$ 中唯一滿足 $\Phi(T)={}_{\beta'}[T]_\beta=A$ 的 linear transformation, 得證 Φ 為 isomorphism. 我們將此結果整理如下.

Theorem 2.4.4. 假設 V,W 為 *vector spaces* 且 $\dim(V)=n,\dim(W)=m$. 給定 V,W 的 *ordered basis* β,β'. 若令 $\Phi:\mathscr{L}(V,W)\to M_{m\times n}(F)$ 滿足 $\Phi(T)={}_{\beta'}[T]_\beta,\forall T\in\mathscr{L}(V,W)$, 則 Φ 為一個 *isomorphism*, 即

$$\mathscr{L}(V,W)\simeq M_{m\times n}(F).$$

Question 2.18. 若 $\dim(V)=n,\dim(W)=m$, *Theorem 2.4.4* 告訴我們 $\dim(\mathscr{L}(V,W))=\dim(M_{m\times n}(F))=mn$, 你能利用 $M_{m\times n}(F)$ 的標準基底, 找到 $\mathscr{L}_(V,W)$ 的 *basis?*

Question 2.19. 給定 $A\in M_{m\times n}(F)$. 令 $m_A:F^n\to F^m$ 為 $m_A(\mathbf{x})=A\cdot\mathbf{x},\forall\mathbf{x}\in F^n$. 回顧 $\operatorname{Im}(m_A)=\{A\cdot\mathbf{x}\in F^m\mid\mathbf{x}\in F^n\}$ 稱為 A 的 column space, 用 $C(A)$ 來表示, 且 $\dim(C(A))$ 稱為 *the* rank *of* A. 而 $\operatorname{Ker}(m_A)=\{\mathbf{x}\in F^n\mid A\cdot\mathbf{x}=\mathbf{O}\}$ 稱為 A 的 null space, 用 $N(A)$ 來表示, 且 $\dim(N(A))$ 稱為 *the* nullity *of* A. 若 $T:V\to W$ 為 *linear transformation* 且 $\Phi(T)=A$, 利用 $\tau_\beta,\tau_{\beta'}$ 為 *isomorphism,* 可得 $\operatorname{Ker}(T)\simeq N(A)$ 且 $\operatorname{Im}(T)\simeq C(A)$. 你能看出

$$\text{rank of } A+\text{ nullity of } A=n?$$

在前面我們曾用以下圖示說明 linear transformation T 和 matrix ${}_{\beta'}[T]_\beta$ 之間關係.

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "T"] \arrow[d, shift right, "\tau_\beta"'] & W \arrow[d, shift right, "\tau_{\beta'}"'] \\
F^n \arrow[r, "m_{\beta'[T]_\beta}"] \arrow[u, shift right, "\tau_\beta^{\circ-1}"'] & F^m \arrow[u, shift right, "\tau_{\beta'}^{\circ-1}"']
\end{tikzcd}$$

因為我們證得了 $T=\tau_{\beta'}^{\circ-1}\circ m_{\beta'[T]_\beta}\circ\tau_\beta$, 這個圖示便可稱為是 *commutative diagram.* 在 Commutative diagram 中, 任兩個端點若有不同路徑可連結, 則這兩個路徑所對應的函數會相同. 例如 V 到 W 有兩個路徑: 一個是直接利用 T; 另一個是由 V 先利用 τ_β 到達 F^n, 再利用 $m_{\beta'[T]_\beta}$ 到 F^m, 最後經 $\tau_{\beta'}^{\circ-1}$ 到達 W. 所以說這個圖示為 commutative diagram 就是表達 $T=\tau_{\beta'}^{\circ-1}\circ m_{\beta'[T]_\beta}\circ\tau_\beta$. 不過這裡要注意路徑的方向性, 例如從 F^m 到 W 的 $\tau_{\beta'}^{\circ-1}$ 是 isomorphism 所以也有一個反向的 W 到 F^m 路徑可行, 即其反函數 $\tau_{\beta'}$. 所以從 V 到 F^m 我們也有兩個路徑: 一個先利用 T 從 V 到 W, 再接 $\tau_{\beta'}$ 到達 F^m; 另一個是利用 τ_β 由 V 到 F^n, 再經 $m_{\beta'[T]_\beta}$ 到達 F^m. 所以我們有 $\tau_{\beta'}\circ T=m_{\beta'[T]_\beta}\circ\tau_\beta$. 事實上

$$\tau_{\beta'}\circ T=\tau_{\beta'}\circ(\tau_{\beta'}^{\circ-1}\circ m_{\beta'[T]_\beta}\circ\tau_\beta)=(\tau_{\beta'}\circ\tau_{\beta'}^{\circ-1})\circ m_{\beta'[T]_\beta}\circ\tau_\beta=m_{\beta'[T]_\beta}\circ\tau_\beta,$$

所以 commutative diagram 是一個很方便判斷兩函數是否相同的工具.

另一方面 V 到 F^n 就不能說有兩個路徑了, 主要是可利用 T 從 V 到 W 然後經 $\tau_{\beta'}$ 到 F^m 但無法保證能由 F^m 到 F^n 了 (除非知矩陣 ${}_{\beta'}[T]_\beta$ 為 invertible).

Question 2.20. 上圖示中 F^n 到 F^m 是否有兩個路徑? 它們代表哪些函數間的關係?

接著我們便是要用 commutative diagram 來看合成函數與矩陣乘法的關係. 設 V,W,U 為 vector spaces, 其中 $\dim(V)=n,\dim(W)=m,\dim(U)=q$ 且 $\beta,\beta'\beta''$ 分別為它們的 ordered bases. 若 $T_1:V\to W$, $T_2:V\to W$ 為 linear transformations 我們有以下的 commutative diagram:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "T_1"] \arrow[d, "\tau_\beta"'] & W \arrow[r, "T_2"] \arrow[d, shift left, "\tau_{\beta'}"] & U \\
F^n \arrow[r, "m_{{}_{\beta'}[T_1]_\beta}"] & F^m \arrow[r, "m_{{}_{\beta''}[T_2]_{\beta'}}"] \arrow[u, shift left, "\tau_{\beta'}^{\circ-1}"] & F^q \arrow[u, "\tau_{\beta''}^{\circ-1}"']
\end{tikzcd}$$

事實上

$$T_2\circ T_1=(\tau_{\beta''}^{\circ-1}\circ m_{{}_{\beta''}[T_2]_{\beta'}}\circ\tau_{\beta'})\circ(\tau_{\beta'}^{\circ-1}\circ m_{{}_{\beta'}[T_1]_\beta}\circ\tau_\beta)=\tau_{\beta''}^{\circ-1}\circ m_{{}_{\beta''}[T_2]_{\beta'}}\circ m_{{}_{\beta'}[T_1]_\beta}\circ\tau_\beta.$$

回顧一下, 當 A 是一個 $m\times n$ matrix, B 是一個 $q\times m$ matrix, 則 $m_A:F^n\to F^m$ 和 $m_B:F^m\to F^q$ 的合成 $m_B\circ m_A:F^n\to F^q$ 就是 $m_{B\cdot A}:F^n\to F^q$. 這是因為對任意 $\mathbf{x}\in F^n$, 由矩陣乘法的結合率可得

$$m_B\circ m_A(\mathbf{x})=m_B(m_A(\mathbf{x}))=m_B(A\cdot\mathbf{x})=B\cdot(A\cdot\mathbf{x})=(B\cdot A)\cdot\mathbf{x}=m_{B\cdot A}(\mathbf{x}).$$

所以利用 $m_{{}_{\beta''}[T_2]_{\beta'}}\circ m_{{}_{\beta'}[T_1]_\beta}=m_{{}_{\beta''}[T_2]_{\beta'}\cdot{}_{\beta'}[T_1]_\beta}$ 可得

$$T_2\circ T_1=\tau_{\beta''}^{\circ-1}\circ m_{{}_{\beta''}[T_2]_{\beta'}\cdot{}_{\beta'}[T_1]_\beta}\circ\tau_\beta. \tag{2.2}$$

我們有以下之結果.

Proposition 2.4.5. 假設 V,W,U 為 *finite dimensional vector spaces,* 且 $\beta,\beta'\beta''$ 分別為它們的 *ordered bases.* 若 $T_1:V\to W$, $T_2:V\to W$ 為 *linear transformations,* 則

$${}_{\beta''}[T_2\circ T_1]_\beta={}_{\beta''}[T_2]_{\beta'}\cdot{}_{\beta'}[T_1]_\beta.$$

Proof. 首先回顧, 若 A,A' 皆為 $q\times n$ matrices, 且 $m_A:F^n\to F^q$ 和 $m_{A'}:F^n\to F^q$ 相同, 則考慮 $\mathbf{x}_i=(0,\ldots,1,\ldots,0)^t$, 其中 $(0,\ldots,1,\ldots,0)$ 表示第 i 位置為 1 其他位置為 0, 可由 $m_A(\mathbf{x}_i)=m_{A'}(\mathbf{x}_i),\forall i=1,\ldots,n$ 得 A 和 A' 每一個 column 皆相同. 故得 $A=A'$. 現由等式 (2.1) 和等式 (2.2) 我們知

$$\tau_{\beta''}^{\circ-1}\circ m_{{}_{\beta''}[T_2\circ T_1]_\beta}\circ\tau_\beta=T_1\circ T_2=\tau_{\beta''}^{\circ-1}\circ m_{{}_{\beta''}[T_2]_{\beta'}\cdot{}_{\beta'}[T_1]_\beta}\circ\tau_\beta,$$

故由 $\tau_\beta,\tau_{\beta''}^{\circ-1}$ 皆為 isomorphism 知

$$m_{{}_{\beta''}[T_2\circ T_1]_\beta}=m_{{}_{\beta''}[T_2]_{\beta'}\cdot{}_{\beta'}[T_1]_\beta},$$

得證 ${}_{\beta''}[T_2\circ T_1]_\beta={}_{\beta''}[T_2]_{\beta'}\cdot{}_{\beta'}[T_1]_\beta$. □

最後我們要談換了一組 ordered basis 對 representative matrix 的影響. 假設 $\dim(V)=n,\dim(W)=m$ 且 β_1,β_2 為 V 的 ordered bases, β_1',β_2' 為 W 的 ordered bases. $T:V\to W$ 為 linear transformation, 依定義 T 分別利用 V,W 的 ordered bases β_1,β_1' 所得的 representative matrix 為 ${}_{\beta_1'}[T]_{\beta_1}$, 而 T 用 ordered bases β_2,β_2' 所得的 representative matrix 為 ${}_{\beta_2'}[T]_{\beta_2}$. 我

們要探討這兩個矩陣的關係為何, 首先我們有以下的 commutative diagram.

$$\begin{tikzcd}
F^n \arrow[r, "m_{\beta_2'}[T]_{\beta_2}"] & F^m \arrow[d, "\tau_{\beta_2'}^{\circ-1}"] \\
V \arrow[u, "\tau_{\beta_2}"] \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\tau_{\beta_1}"'] & W \\
F^n \arrow[r, "m_{\beta_1'}[T]_{\beta_1}"] & F^m \arrow[u, "\tau_{\beta_1'}^{\circ-1}"']
\end{tikzcd}$$

最上層的 $m_{\beta_2'}[T]_{\beta_2} : F^n \to F^m$, 可用下面的路徑 (別忘了 $\tau_{\beta_2}, \tau_{\beta_2'}$ 為 isomorphism), 所以我們有

$$m_{\beta_2'}[T]_{\beta_2} = (\tau_{\beta_2'} \circ \tau_{\beta_1'}^{\circ-1}) \circ m_{\beta_1'}[T]_{\beta_1} \circ (\tau_{\beta_1} \circ \tau_{\beta_2}^{\circ-1}). \tag{2.3}$$

這裡 $\tau_{\beta_1} \circ \tau_{\beta_2}^{\circ-1}$ 和 $\tau_{\beta_2'} \circ \tau_{\beta_1'}^{\circ-1}$ 皆為 linear transformations, 所以我們也可以探討它們的矩陣表示法. 考慮 V 到 V 的 identity map, $\mathrm{id} : V \to V$, 滿足 $\mathrm{id}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$, $\forall \mathbf{v} \in V$. 很自然的這是一個 linear transformation, 所以對定義域的 V 使用 ordered basis β_2, 而對映域的 V 使用 ordered basis β_1, 我們有以下的 commutative diagram.

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\tau_{\beta_2}"'] & V \\
F^n \arrow[r, "m_{\beta_1}[\mathrm{id}]_{\beta_2}"] & F^n \arrow[u, "\tau_{\beta_1}^{\circ-1}"']
\end{tikzcd}$$

考慮下層的 $m_{\beta_1}[\mathrm{id}]_{\beta_2} : F^n \to F^n$, 可用往上的路徑 $\tau_{\beta_2}^{\circ-1}$ 從 F^n 到 V 接 identity map id, 再接 τ_{β_1} 到 F^n. 利用 identity map 和函數合成不變我們有以下的等式

$$m_{\beta_1}[\mathrm{id}]_{\beta_2} = \tau_{\beta_1} \circ \mathrm{id} \circ \tau_{\beta_2}^{\circ-1} = \tau_{\beta_1} \circ \tau_{\beta_2}^{\circ-1}. \tag{2.4}$$

同理我們有

$$m_{\beta_2'}[\mathrm{id}]_{\beta_1'} = \tau_{\beta_2'} \circ \tau_{\beta_1'}^{\circ-1}. \tag{2.5}$$

結合等式 (2.3, 2.4, 2.5), 得

$$m_{\beta_2'}[T]_{\beta_2} = m_{\beta_2'}[\mathrm{id}]_{\beta_1'} \circ m_{\beta_1'}[T]_{\beta_1} \circ m_{\beta_1}[\mathrm{id}]_{\beta_2},$$

因此我們有以下之結果.

Proposition 2.4.6. 設 β_1, β_2 為 V 的 *ordered bases,* β_1', β_2' 為 W 的 *ordered bases.* $T : V \to W$ 為 *linear transformation,* 則

$${}_{\beta_2'}[T]_{\beta_2} = {}_{\beta_2'}[\mathrm{id}]_{\beta_1'} \cdot {}_{\beta_1'}[T]_{\beta_1} \cdot {}_{\beta_1}[\mathrm{id}]_{\beta_2}.$$

要注意, 這裡第一個 ${}_{\beta_1}[\mathrm{id}]_{\beta_2}$ 的 identity map 是 V 到 V 的 linear transformation, 所以若 $\dim(V)=n$, 則 ${}_{\beta_1}[\mathrm{id}]_{\beta_2}$ 是一個 $n\times n$ 的 matrix. 而第二個 ${}_{\beta_2'}[\mathrm{id}]_{\beta_1'}$ 的 identity map 是 W 到 W 的 linear transformation, 所以若 $\dim(W)=m$, 則 ${}_{\beta_2'}[\mathrm{id}]_{\beta_1'}$ 是一個 $m\times m$ 的 matrix.

Question 2.21. 你可以利用 *Proposition 2.4.5* 證明 *Proposition 2.4.6* 嗎?

當 $\beta_1=(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)$, $\beta_2=(\mathbf{v}_1',\dots,\mathbf{v}_n')$ 為 V 的 ordered bases, 利用 representative matrix 的造法, 我們知道矩陣 ${}_{\beta_1}[\mathrm{id}]_{\beta_2}$ 的第 i 個 column, 就是將 $\mathbf{v}_i'$ 用 β_1 所得的坐標, 即 $\tau_{\beta_1}(\mathbf{v}_i')$. 因此可得

$${}_{\beta_1}[\mathrm{id}]_{\beta_2}=\big(\tau_{\beta_1}(\mathbf{v}_1'),\dots,\tau_{\beta_1}(\mathbf{v}_n')\big).$$

特別的, 當 $\beta_1=\beta_2$ 時, 我們有 ${}_{\beta_1}[\mathrm{id}]_{\beta_1}$ 就是 $n\times n$ 的 identity matrix I_n.

Question 2.22. 考慮 $P_2(\mathbb{R})$ 以及其 *ordered bases* $\beta_1=(x^2,x+1,-1)$, $\beta_2=(x+1,-1,x^2)$. 試求 ${}_{\beta_1}[\mathrm{id}]_{\beta_2}$ 和 ${}_{\beta_2}[\mathrm{id}]_{\beta_1}$. 什麼是 ${}_{\beta_1}[\mathrm{id}]_{\beta_2}\cdot{}_{\beta_2}[\mathrm{id}]_{\beta_1}$ 和 ${}_{\beta_2}[\mathrm{id}]_{\beta_1}\cdot{}_{\beta_1}[\mathrm{id}]_{\beta_2}$ 呢?

${}_{\beta_1}[\mathrm{id}]_{\beta_2}$ 稱為 the *change of basis matrix* from β_2 to β_1. 它指的是 V 中的元素 $\mathbf{v}$ 用 β_2 所得的坐標 $\tau_{\beta_2}(\mathbf{v})$ 轉換成用 β_1 所得的坐標 $\tau_{\beta_1}(\mathbf{v})$ 所需乘上的矩陣. 也就是說若 $\mathbf{v}=c_1\mathbf{v}_1'+\cdots+c_n\mathbf{v}_n'$ (即 $\tau_{\beta_2}(\mathbf{v})=(c_1,\dots,c_n)^{\mathrm{t}}$), 且 ${}_{\beta_1}[\mathrm{id}]_{\beta_2}\cdot(c_1,\dots,c_n)^{\mathrm{t}}=(d_1,\dots,d_n)^{\mathrm{t}}$, 則可得 $\mathbf{v}=d_1\mathbf{v}_1+\cdots+d_n\mathbf{v}_n$. 很容易理解將這個動作反向操作便可還原成原坐標, 事實上由 Proposition 2.4.5, 我們知

$${}_{\beta_1}[\mathrm{id}]_{\beta_2}\cdot{}_{\beta_2}[\mathrm{id}]_{\beta_1}={}_{\beta_1}[\mathrm{id}]_{\beta_1}=I_n \quad 且 \quad {}_{\beta_2}[\mathrm{id}]_{\beta_1}\cdot{}_{\beta_1}[\mathrm{id}]_{\beta_2}={}_{\beta_2}[\mathrm{id}]_{\beta_2}=I_n. \tag{2.6}$$

所以 ${}_{\beta_1}[\mathrm{id}]_{\beta_2}$ 和 ${}_{\beta_2}[\mathrm{id}]_{\beta_1}$ 皆為 invertible matrices, 且它們互為 inverse.

我們已知 change of basis matrix 必為 invertible matrix, 那給定一個 invertible matrix, 是否也會是一個 change of basis matrix 呢? 我們有以下之結果.

Proposition 2.4.7. 假設 V 為 *finite dimensional vector space* 且 $\dim(V)=n$. 若 β_1 為 V 的一個 *ordered basis* 且 P 為一個 $n\times n$ 的 *invertible matrix,* 則可找到 V 的一個 *ordered basis* β_2 使得 ${}_{\beta_1}[\mathrm{id}]_{\beta_2}=P$, 也可找到 V 的一個 *ordered basis* β_3 使得 ${}_{\beta_3}[\mathrm{id}]_{\beta_1}=P$.

Proof. 令 $\beta_1=(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)$, 對於 $i=1,\dots,n$ 若 P_i 為 P 的 i-th column, 考慮 $\mathbf{v}_i'=\tau_{\beta_1}^{\circ-1}(P_i)$ (即若 $P_i=(r_1,\dots,r_n)^{\mathrm{t}}$, 則令 $\mathbf{v}_i'=r_1\mathbf{v}_1+\cdots+r_n\mathbf{v}_n$). 因 P 為 invertible, $\{P_1,\dots,P_n\}$ 為 F^n 中的 linearly independent column vectors, 故由 τ_{β_1} 為 isomorphism 知 $\{\mathbf{v}_1',\dots,\mathbf{v}_n'\}$ 亦在 V 中為 linearly independent, 得知 $\{\mathbf{v}_1',\dots,\mathbf{v}_n'\}$ 為 V 中的一組 basis. 令 $\beta_2=(\mathbf{v}_1',\dots,\mathbf{v}_n')$, 則依定義 ${}_{\beta_1}[\mathrm{id}]_{\beta_2}$ 的 i-th column 為 $\tau_{\beta_1}(\mathbf{v}_i')=\tau_{\beta_1}(\tau_{\beta_1}^{\circ-1}(P_i))=P_i$, 得證 $P={}_{\beta_1}[\mathrm{id}]_{\beta_2}$. 同理, 可得 V 的一個 ordered basis β_3 使得 ${}_{\beta_1}[\mathrm{id}]_{\beta_3}=P^{-1}$, 則此時 $P={}_{\beta_1}[\mathrm{id}]_{\beta_3}^{-1}={}_{\beta_3}[\mathrm{id}]_{\beta_1}$. □

Question 2.23. 假設 V,W 為 *vector spaces,* $\dim(V)=n,\dim(W)=m$ 且 β_1,β_1' 分別為 V,W 的 *ordered basis.* 設 $T:V\to W$ 為 *linear transformation,* 若 $P\in M_{n\times n}(F)$ 且 $Q\in M_{m\times m}(F)$ 皆為 *invertible matrices,* 是否可找到 β_2,β_2' 分別為 V,W 的 *ordered basis* 使得

$${}_{\beta_2'}[T]_{\beta_2}=Q\cdot{}_{\beta_1'}[T]_{\beta_1}\cdot P?$$